

Introduction mathématique aux sciences de la vie

Séance d'exercices du 01/12/25



[Télécharger le PDF](#)

Remédiations

- Lundi (Biologie+Pharma): Q/R (Attention: début de la remédiation à 16h15)

Pour les Q/R: -> Préparez des questions !!!

Optimisation

3.4.E)

Décomposez le nombre 150 en la somme de deux nombres tels que le produit de l'un par le carré de l'autre soit maximum.

3.4.E)

QCM sur les dérivées

-> correction dans le PDF

Intégration

Primitives

Définition: Soit f une fonction et $I \subset \text{dom}(f)$. On dit qu'une fonction F définie sur I est une primitive de f sur I si: $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Par exemple x^3 est une primitive de $3x^2$ sur $I = \mathbb{R}$ car $(x^3)' = 3x^2$.

De même, $\sin(x)$ est une primitive de $\cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$ car $(\sin(x))' = \cos(x)$.

Primitives

Étant donnée une fonction f primitivable sur I , disons $F' = f$, alors f a une infinité de primitives, toutes de la forme $F + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

On notera: $\int f(x)dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

Formulaire:

Dans ce formulaire, on travaille toujours sur un intervalle \mathbf{I} dans le domaine de l'intégrand. La constante c est un nombre réel.

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}.$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c,$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$

Formulaire:

- $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$
- $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \int 1 + \tan^2(x)dx = \tan(x) + c$

Techniques de calcul

Linéarité

$$\int a f(x) + b g(x) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

Exemple:

$$\begin{aligned}\int 3x - \sin(x) dx &= 3 \int x dx - \int \sin(x) dx \\&= 3 \frac{x^2}{2} - (-\cos(x)) + c \\&= 3 \frac{x^2}{2} + \cos(x) + c\end{aligned}$$

Intégration par parties

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Exemple:

$$\int x e^x$$

Ici: l'idée est de tuer x en le dérivant.

Intégration par parties

On choisit: $f'(x) = e^x$ et $g(x) = x$. Dans ce cas: $f(x) = e^x$ et $g'(x) = 1$.
Donc,

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\&= x e^x - e^x + c \\&= (x - 1) e^x + c.\end{aligned}$$

Intégration par parties

A utiliser si l'intégrand est de la forme

$$\text{polynôme} \cdot \begin{cases} \text{cosinus} \\ \text{sinus} \\ \text{exponentielle} \\ \text{logarithme} \end{cases}$$

Dans le cas du logarithme, on prendra $g(x) = \text{logarithme}$, ce qui permettra de tuer le logarithme. Dans les autres cas, on prendra $g(x) = \text{polynôme}$ de sorte à diminuer le degré pas à pas (on devra intégrer par partie autant de fois que le degré du polynôme).

Changement de variable:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

Exemple (4.1.A) 1): $\int 2x(1+x^2)^5dx$

Ici, on remarque que $2x = (1+x^2)'$. Donc on choisit $u = 1+x^2$. Ainsi, $du = (1+x^2)'dx = 2x dx$. Donc

$$\begin{aligned}\int 2x(1+x^2)^5dx &= \int u^5 du \\ &= \frac{u^6}{6} + c = \frac{(1+x^2)^6}{6} + c\end{aligned}$$

Changement de variable:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

Exemple (4.1.A) 5): $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

Ici on remarque que x est presque la dérivée de $x^2 + 1$: $(x^2 + 1)' = 2x$. Il manque donc un facteur 2:

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

Donc on choisit $u = x^2 + 1$. Donc $du = 2x \, dx$. Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2 + 1} \, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx \\&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \, du \\&= \frac{1}{2} \ln(|u|) + c \\&= \frac{\ln(|x^2 + 1|)}{2} + c \\&= \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} + c\end{aligned}$$

Méthodologie:

1. Analyser la nature algébrique de l'intégrand:

- a. Est-ce une somme-différence? Si oui: appliquer la linéarité
- b. Un produit/quotient? Si oui

- Puis-je simplifier/développer pour appliquer la linéarité?
- Est-ce que j'observe qu'un facteur est presque la dérivée d'un autre?
- Y a-t-il une exponentielle?
- Y a-t-il un logarithme? Si oui, le tuer par parties.

Méthodologie:

2. Bien identifier les ingrédients de la formule:
 - a. Par parties: qui est $f'(x)$, qui est $g(x)$?
 - b. Changement de variables: quel changement de variable u ? Que vaut du ?
3. Dériver votre réponse finale pour **vérifier** que vos calculs sont corrects!!!

Si vous êtes perdu.e: tentez une des méthodes de calculs (il n'y en a que 3...)

Exercices de calculs de primitives

Attention: certains exercices sont difficiles: concentrez vous sur la sélection.
Le reste est du dépassemement

Correctif: le correctif de la sélection est sur moodle.

Sélection

- 4.1.A) À savoir faire pour l'examen: 1, 2, 6, 7, 8, 9.
- 4.1.B) À savoir faire pour l'examen: 1, 3, 5, 6, 7, 8.
- 4.1.C) À savoir faire pour l'examen: tout sauf le 7, 9 et 15.
- 4.1.D) À savoir faire pour l'examen: tout sauf 9, 11, 12, 13, 17, 18, 21, 22, 24.