

# Introduction mathématique aux sciences de la vie

*Séance d'exercices du 01/12/25*



[Télécharger le PDF](#)

# Remédiations

- Lundi (Biologie+Pharma): Q/R (Attention: début de la remédiation à 16h15)

**Pour les Q/R:** → Préparez des questions !!!

# Optimisation

### 3.4.E)

Décomposez le nombre 150 en la somme de deux nombres tels que le produit de l'un par le carré de l'autre soit maximum.

3.4.E)

# QCM sur les dérivées

-> correction dans le PDF

# Intégration

# Primitives

**Définition:** Soit  $f$  une fonction et  $I \subset \text{dom}(f)$ . On dit qu'une fonction  $F$  définie sur  $I$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  si:  $F'(x) = f(x)$  pour tout  $x \in I$ .

Par exemple  $x^3$  est une primitive de  $3x^2$  sur  $I = \mathbb{R}$  car  $(x^3)' = 3x^2$ .

De même,  $\sin(x)$  est une primitive de  $\cos(x)$  sur  $I = \mathbb{R}$  car  $(\sin(x))' = \cos(x)$ .

# Primitives

Étant donnée une fonction  $f$  primitivable sur  $I$ , disons  $F' = f$ , alors  $f$  a une infinité de primitives, toutes de la forme  $F + c$ , où  $c \in \mathbb{R}$ .

On notera:  $\int f(x)dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ .

# Formulaire:

Dans ce formulaire, on travaille toujours sur un intervalle  $I$  dans le domaine de l'intégrand. La constante  $c$  est un nombre réel.

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}.$

- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c,$

- $\int e^x dx = e^x + c$

- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + x$

## Formulaire:

- $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$
- $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \int 1 + \tan^2(x)dx = \tan(x) + c$

# Techniques de calcul

# Linéarité

$$\int a f(x) + b g(x) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

**Exemple:**

$$\begin{aligned} \int 3x - \sin(x) dx &= 3 \int x dx - \int \sin(x) dx \\ &= 3 \frac{x^2}{2} - (-\cos(x)) + c \\ &= 3 \frac{x^2}{2} + \cos(x) + c \end{aligned}$$

# Intégration par parties

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

**Exemple:**

$$\int xe^x$$

Ici: l'idée est de tuer  $x$  en le dérivant.

# Intégration par parties

On choisit:  $f'(x) = e^x$  et  $g(x) = x$ . Dans ce cas:  $f(x) = e^x$  et  $g'(x) = 1$ .  
Donc,

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + c \\ &= (x - 1) e^x + c.\end{aligned}$$

# Intégration par parties

A utiliser si l'intégrand est de la forme

$$\text{polynôme} \cdot \begin{cases} \text{cosinus} \\ \text{sinus} \\ \text{exponentielle} \\ \text{logarithme} \end{cases}$$

Dans le cas du logarithme, on prendra  $g(x) = \text{logarithme}$ , ce qui permettra de tuer le logarithme. Dans les autres cas, on prendra  $g(x) = \text{polynôme}$  de sorte à diminuer le degré pas à pas (on devra intégrer par parties autant de fois que le degré du polynôme).

Changement de variable:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

**Exemple** (4.1.A) 1):  $\int 2x(1 + x^2)^5 dx$

Ici, on remarque que  $2x = (1 + x^2)'$ . Donc on choisit  $u = 1 + x^2$ . Ainsi,  $du = (1 + x^2)'dx = 2x dx$ . Donc

$$\begin{aligned} \int 2x(1 + x^2)^5 dx &= \int u^5 du \\ &= \frac{u^6}{6} + c = \frac{(1 + x^2)^6}{6} + c \end{aligned}$$

Changement de variable:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

**Exemple** (4.1.A) 5):  $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

Ici on remarque que  $x$  est presque la dérivée de  $x^2 + 1$ :  $(x^2 + 1)' = 2x$ . Il manque donc un facteur 2:

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

Donc on choisit  $u = x^2 + 1$ . Donc  $du = 2x dx$ . Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{2} \ln(|u|) + c \\ &= \frac{\ln(|x^2 + 1|)}{2} + c \\ &= \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} + c\end{aligned}$$

# Méthodologie:

1. Analyser la nature algébrique de l'intégrand:

a. Est-ce une somme-différence? Si oui: appliquer la linéarité

b. Un produit/quotient? Si oui

- Puis-je simplifier/développer pour appliquer la linéarité?
- Est-ce que j'observe qu'un facteur est presque la dérivée d'un autre?
- Y a-t-il une exponentielle?
- Y a-t-il un logarithme? Si oui, le tuer par parties.

# Méthodologie:

2. Bien identifier les ingrédients de la formule:

a. Par parties: qui est  $f'(x)$ , qui est  $g(x)$ ?

b. Changement de variables: quel changement de variable  $u$ ? Que vaut  $du$ ?

3. Dériver votre réponse finale pour **vérifier** que vos calculs sont corrects!!!

Si vous êtes perdu.e: tentez une des méthodes de calculs (il n'y en a que 3...)

# Exercices de calculs de primitives

**Attention:** certains exercices sont difficiles: concentrez vous sur la sélection.  
Le reste est du dépassement

**Correctif:** le correctif de la sélection est sur moodle.

# Sélection

- 4.1.A) À savoir faire pour l'examen: 1, 2, 6, 7, 8, 9.
- 4.1.B) À savoir faire pour l'examen: 1, 3, 5, 6, 7, 8.
- 4.1.C) À savoir faire pour l'examen: tout sauf le 7, 9 et 15.
- 4.1.D) À savoir faire pour l'examen: tout sauf 9, 11, 12, 13, 17, 18, 21, 22, 24.