

Introduction mathématique aux sciences de la vie

Séance d'exercices du 06/10/25

Liens:

- Vers les slides: QR-code



- Vers le pdf (après le scan du QR-code): [Ouvrir le PDF](#)

Remédiations

Cette semaine:

1. Aujourd'hui: séance Q/R pour les BIOMED.
2. Mardi matin: séance Q/R pour les BIOL.
3. Mardi après midi: séance Q/R pour les PHARMA.

1.2 Produits scalaire et vectoriel

Rappels

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs:

- Produit scalaire: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$, où θ est l'angle entre les deux vecteurs. (Définition indépendante du nombre de composantes)
- En 2D: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$, où $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$.
- En 2D: $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Rappels

- En 3D: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, où $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.
- En 3D: $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.
- Ces liens entre composantes, norme et angle permettent de résoudre plein d'exercices.

Exercice A)

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan ou de l'espace muni d'un repère orthonormé où θ est l'angle entre \vec{u} et \vec{v} . Calculez $\vec{u} \cdot \vec{v}$ si

- $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\theta = 60^\circ$

Exercice A)

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan ou de l'espace muni d'un repère orthonormé où θ est l'angle entre \vec{u} et \vec{v} . Calculez $\vec{u} \cdot \vec{v}$ si

- $\|\vec{u}\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} 3 \cos(5\pi/6) = -3/2$$

- $\|\vec{u}\| = \frac{3}{2}$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{3}{2} 4 \cos(\pi/4) = 3\sqrt{2}$$

Exercice A)

- $\|\vec{u}\| = \frac{1}{3}, \|\vec{v}\| = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{3} 2 \cos(\pi/2) = 0$$

- $\|\vec{u}\| = 4, \|\vec{v}\| = 1$ et $\theta = 135^\circ$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cos(3\pi/4) = -2\sqrt{2}$$

Exercice B)

Soient A , B , C et D quatre points du plan ou de l'espace muni d'un repère orthonormé. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ si

- $\overrightarrow{AB} = (-5; 1)$ et $\overrightarrow{CD} = (-3; 2)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 15 + 2 = 17$$

- $A = (3; 4)$, $B = (-2; 1)$, $C = (4; -2)$ et $D = (-1; -3)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-5; -3) \cdot (-5; -1) = 25 + 3 = 28$$

Exercice B)

Soient A , B , C et D quatre points du plan ou de l'espace muni d'un repère orthonormé. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ si

- $\overrightarrow{AB} = (4; 1; -2)$ et $\overrightarrow{CD} = (-3; -1; 2)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -12 - 1 - 4 = -17$$

- $A = (3; 0; 4)$, $B = (-2; 1; 1)$, $C = (4; -2; -3)$ et $D = (-1; -3; 2)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-5; 1; -3) \cdot (-5; -1; 5) = 25 - 1 - 15 = 9$$

Rappel: produit vectoriel

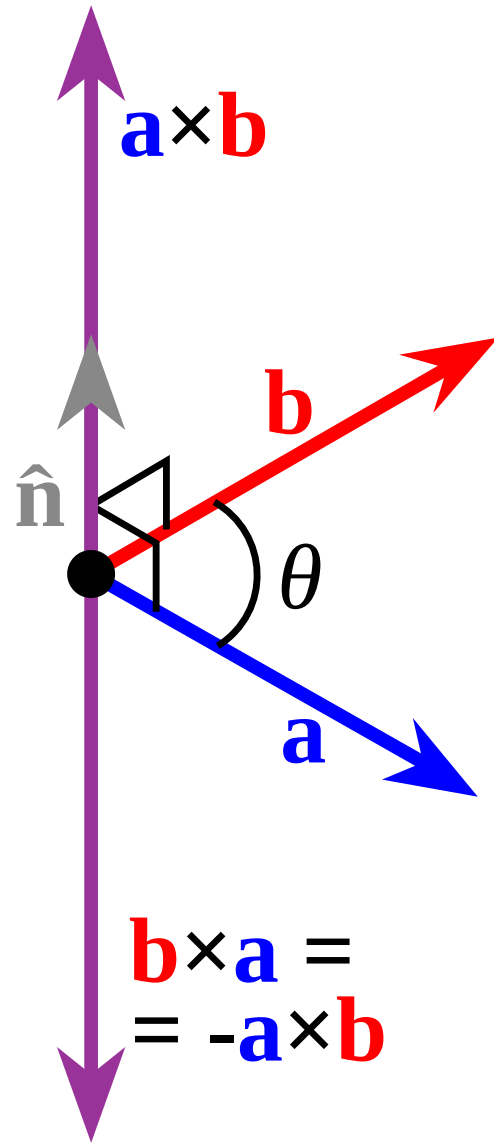
Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a les composantes suivantes:

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}\end{aligned}$$

Ce vecteur est perpendiculaire à \vec{u} et \vec{v} et est de norme

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\theta)$. Son sens est donné par la règle de la main droite.

Rappel: produit vectoriel



Exercice C)

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé où θ est l'angle entre \vec{u} et \vec{v} . Déterminez la norme de \vec{u} et de \vec{v} , leur produit scalaire, leur produit vectoriel et l'amplitude de θ si

- $\vec{u} = (2; 1; 1)$ et $\vec{v} = (1; 2; 1)$

Exercise C)

Exercice C)

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé où θ est l'angle entre \vec{u} et \vec{v} . Déterminez la norme de \vec{u} et de \vec{v} , leur produit scalaire, leur produit vectoriel et l'amplitude de θ si

- $\vec{u} = (1; 0; 2)$ et $\vec{v} = (0; 1; -1)$
 - $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$
 - $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$
 - $\theta = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{10}}\right) \simeq 2,25\text{rad}$
 - $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-2; 1; 1)$

Exercice C)

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé où θ est l'angle entre \vec{u} et \vec{v} . Déterminez la norme de \vec{u} et de \vec{v} , leur produit scalaire, leur produit vectoriel et l'amplitude de θ si

- $\vec{u} = (12; 27; 6)$ et $\vec{v} = (2; 9/2; 1)$

Attention!: $\vec{u} = 6\vec{v}$

- $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{101}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{101}/2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 303/2$
- $\theta = 0\text{rad}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = (0; 0; 0)$

Exercice C)

- $\vec{u} = (2; 1; 1)$ et $\vec{v} = (13; 26; 13)$

Attention!: $\vec{v} = 13(1; 2; 1)$

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{6}$ et $\|\vec{v}\| = 13\sqrt{6}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 13(2 + 2 + 1) = 65$
- $\theta = \arccos\left(\frac{5}{6}\right) \simeq 0.58\text{rad}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = 13(2; 1; 1) \wedge (1; 2; 1) = 13(-1; -1; 3)$

Exercice C)

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé où θ est l'angle entre \vec{u} et \vec{v} . Déterminez la norme de \vec{u} et de \vec{v} , leur produit scalaire, leur produit vectoriel et l'amplitude de θ si

- $\vec{u} = (1; -1; 2)$ et $\vec{v} = (3; 1; -1)$
 - $\|\vec{u}\| = \sqrt{6}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{11}$
 - $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
 - $\theta = \arccos(0) = \pi/2 \text{rad}$
 - $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-1; 7; 4)$

Exercice C)

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé où θ est l'angle entre \vec{u} et \vec{v} . Déterminez la norme de \vec{u} et de \vec{v} , leur produit scalaire, leur produit vectoriel et l'amplitude de θ si

- $\vec{u} = (-1; 2; 1)$ et $\vec{v} = (4; -1; -2)$
 - $\|\vec{u}\| = \sqrt{6}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{21}$
 - $\vec{u} \cdot \vec{v} = -8$
 - $\theta = \arccos\left(\frac{-8}{\sqrt{126}}\right) \simeq 2.36\text{rad}$
 - $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-3; 2; -7)$

Exercice C)

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé où θ est l'angle entre \vec{u} et \vec{v} . Déterminez la norme de \vec{u} et de \vec{v} , leur produit scalaire, leur produit vectoriel et l'amplitude de θ si

- $\vec{u} = (2; -1; 2)$ et $\vec{v} = (-3; 7; 1)$
 - $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{59}$
 - $\vec{u} \cdot \vec{v} = -11$
 - $\theta = \arccos\left(\frac{-11}{3\sqrt{59}}\right) \simeq 2.07\text{rad}$
 - $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-15; -8; 11)$

Exercice C)

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé où θ est l'angle entre \vec{u} et \vec{v} . Déterminez la norme de \vec{u} et de \vec{v} , leur produit scalaire, leur produit vectoriel et l'amplitude de θ si

- $\vec{u} = (1; 0; 0)$ et $\vec{v} = (0; 1; 0)$
 - $\|\vec{u}\| = 1$ et $\|\vec{v}\| = 1$
 - $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
 - $\theta = \arccos(0) = \pi/2\text{rad}$
 - $\vec{u} \wedge \vec{v} = (0; 0; 1)$

Exercice D)

Considérons les vecteurs \vec{u} et \vec{v} tels que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$. Montrez que la norme du vecteur $\vec{w}_1 = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ est égale à 16 et que celle du $\vec{w}_2 = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ est égale à 4

Exercise D)

Exercice E)

Considérons les vecteurs \vec{u} et \vec{v} tels que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$. Montrez que la norme du vecteur $\vec{w}_1 = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ est égale à $\sqrt{61}$ et que celle du $\vec{w}_2 = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ est égale à $\sqrt{109}$.

Exercise E)

Exercice F)

Exercice supplémentaire

Exercice G)

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé. Calculez, via les composantes, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u}$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v}$. Qu'en conclure sur le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ par rapport aux vecteurs \vec{u} et \vec{v} ?

Exercise G)

Exercise G)

1.3 Décomposition

Exercice A)

Décomposez graphiquement le vecteur \vec{v} représenté dans les figures suivantes.

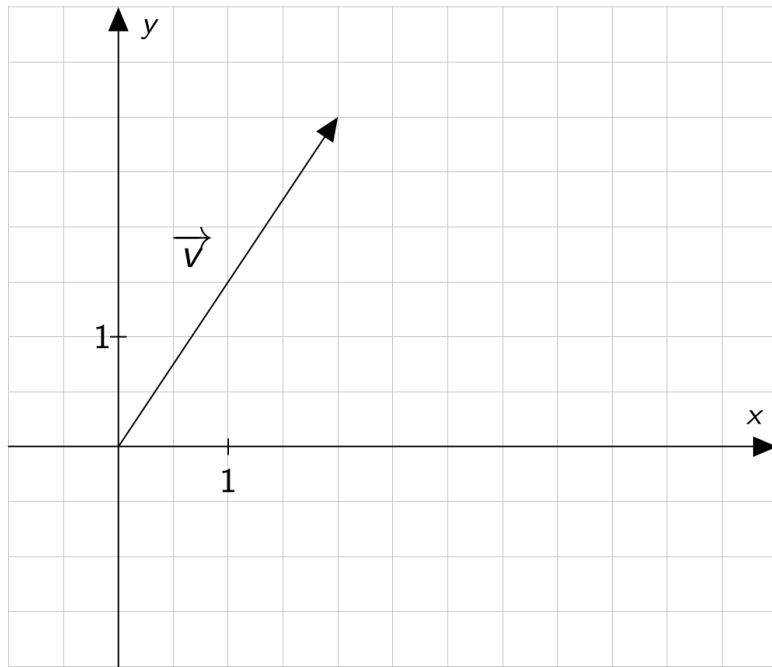


FIGURE 7

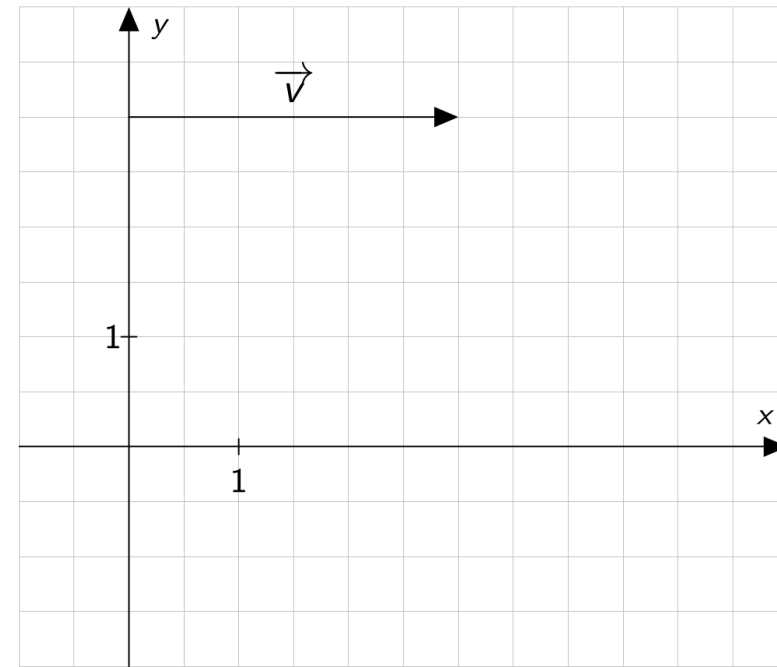


FIGURE 8

Exercice A)

Décomposez graphiquement le vecteur \vec{v} représenté dans les figures suivantes.

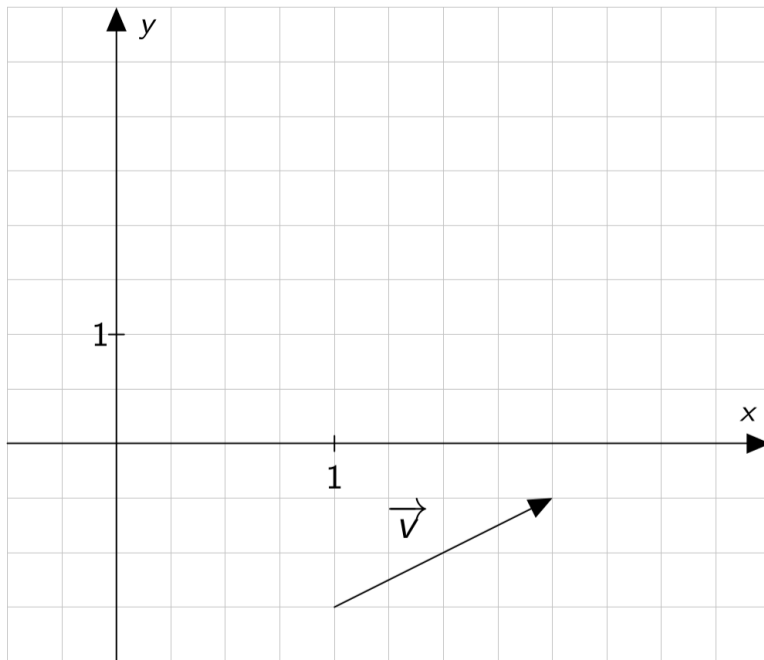


FIGURE 9

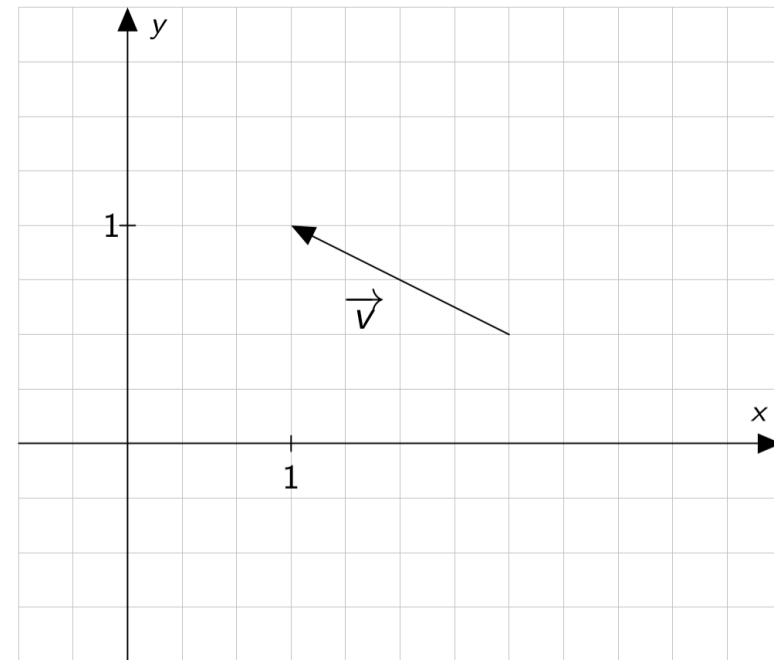


FIGURE 10

Exercice A)

Décomposez graphiquement le vecteur \vec{v} représenté dans les figures suivantes.

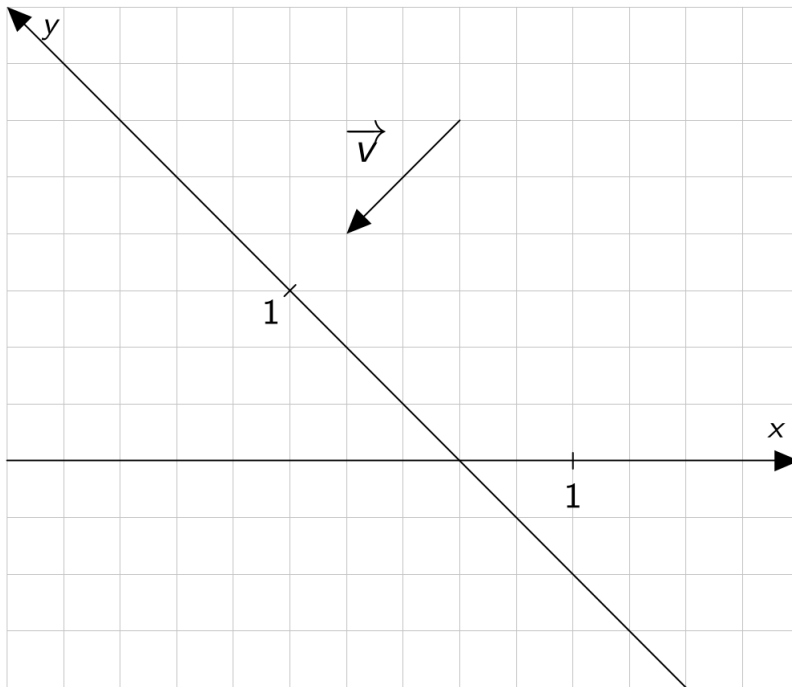


FIGURE 11

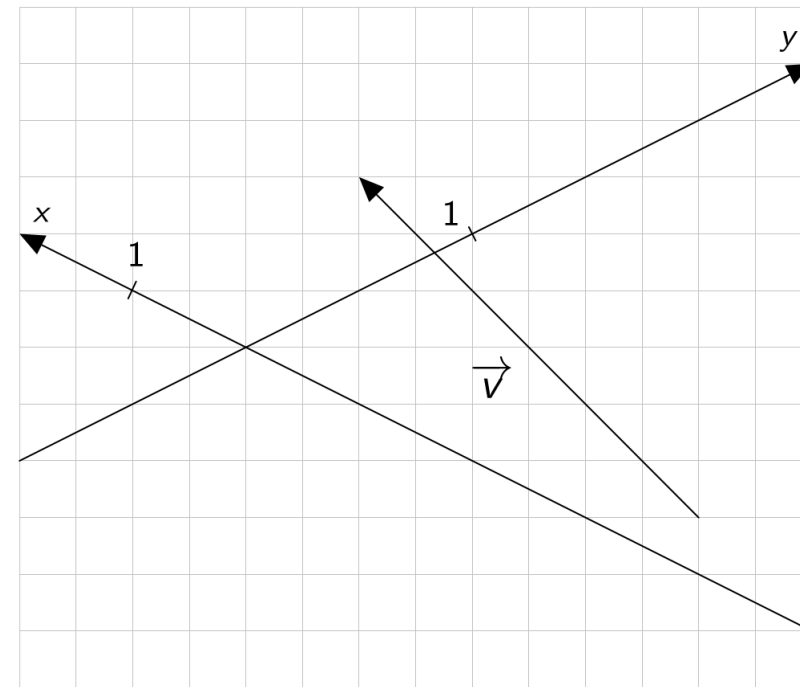


FIGURE 12

Exercice A)

Décomposez graphiquement le vecteur \vec{v} représenté dans les figures suivantes.

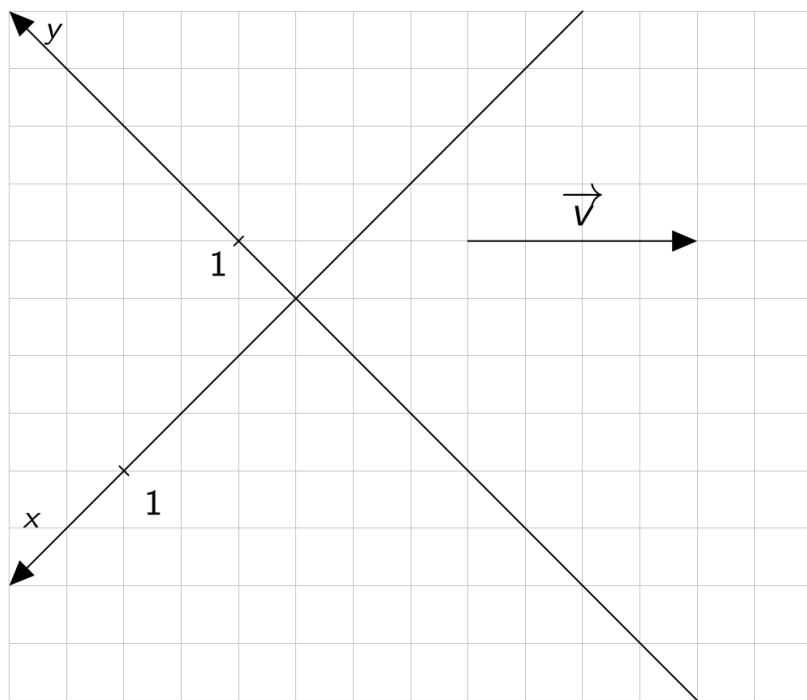


FIGURE 13

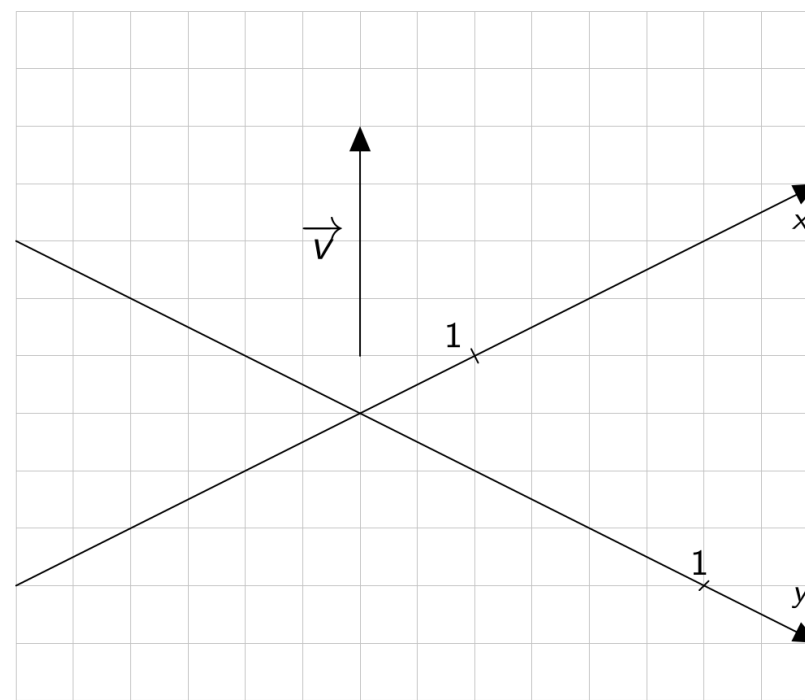


FIGURE 14

Exercice C)

On donne les vecteurs suivants $\vec{u} = (73\ 123\ 416; 146\ 246\ 832)$ et $\vec{v} = (-79\ 035\ 264; 39\ 517\ 632)$, deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé. utiliser de calculatrice, démontrez que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.