Introduction mathématique aux sciences de la vie

Séance d’exercices du 06/10/25

Liens:

- Vers les slides: QR-code

- Vers le pdf (après le scan du QR-code): Ouvrir le PDF

Remédiations

Cette semaine:

1. Aujourd’hui: séance Q/R pour les BIOMED.
2. Mardi matin: séance Q/R pour les BIOL.
3. Mardi après midi: séance Q/R pour les PHARMA.

1.2 Produits scalaire et vectoriel

Rappels

Soit $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ deux vecteurs:

- Produit scalaire: $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\|\|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\| \cos(\boldsymbol{\theta})$, où $\boldsymbol{\theta}$ est l'angle entre les deux vecteurs. (Définition indépendante du nombre de composantes)
- En 2D: $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{u_1 v_1 + u_2 v_2}$, où $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u_1, u_2})$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v_1, v_2})$.
- En 2D: $\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{\boldsymbol{u_1^2 + u_2^2}}$.

Rappels

- En 3D: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, où $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$.
- En 3D: $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.
- Ces liens entre composantes, norme et angle permettent de résoudre plein d'exercices.

Exercice A)

Soient $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace muni d'un repère orthonormé où $\boldsymbol{\theta}$ est l'angle entre $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Calculez $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ si

- $\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\| = \mathbf{3}$, $\|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\| = \mathbf{5}$ et $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{60}^\circ$

Exercice A)

Soient $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace muni d'un repère orthonormé où $\boldsymbol{\theta}$ est l'angle entre $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Calculez $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ si

- $\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\| = \mathbf{3}$ et $\boldsymbol{\theta} = \frac{5\pi}{6}$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{\sqrt{3}} 3 \cos(5\pi/6) = -3/2$$

- $\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\| = \frac{3}{2}$, $\|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\| = 4$ et $\boldsymbol{\theta} = \frac{\pi}{4}$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \frac{3}{2} 4 \cos(\pi/4) = 3\sqrt{2}$$

Exercice A)

- $\|\overrightarrow{u}\| = \frac{1}{3}$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{3} 2 \cos(\pi/2) = 0$$

- $\|\overrightarrow{u}\| = 4$, $\|\overrightarrow{v}\| = 1$ et $\theta = 135^\circ$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 4 \cos(3\pi/4) = -2\sqrt{2}$$

Exercice B)

Soient A, B, C et D quatre points du plan ou de l'espace muni d'un repère orthonormé. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ si

- $\overrightarrow{AB} = (-5; 1)$ et $\overrightarrow{CD} = (-3; 2)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 15 + 2 = 17$$

- $A = (3; 4)$, $B = (-2; 1)$, $C = (4; -2)$ et $D = (-1; -3)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-5; -3) \cdot (-5; -1) = 25 + 3 = 28$$

Exercice B)

Soient A, B, C et D quatre points du plan ou de l'espace muni d'un repère orthonormé. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ si

- $\overrightarrow{AB} = (4; 1; -2)$ et $\overrightarrow{CD} = (-3; -1; 2)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -12 - 1 - 4 = -17$$

- $A = (3; 0; 4)$, $B = (-2; 1; 1)$, $C = (4; -2; -3)$ et $D = (-1; -3; 2)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-5; 1; -3) \cdot (-5; -1; 5) = 25 - 1 - 15 = 9$$

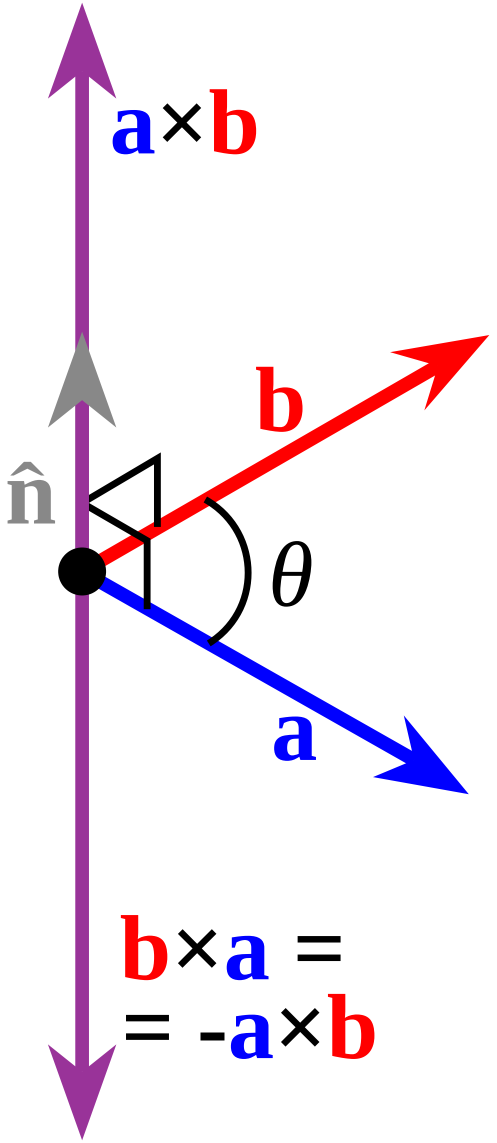
Rappel: produit vectoriel

Soit $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ a les composantes suivantes:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

Ce vecteur est perpendiculaire à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et est de norme $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin(\theta)$. Son sens est donné par la règle de la main droite.

Rappel: produit vectoriel



Exercice C)

Soient $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé où $\boldsymbol{\theta}$ est l'angle entre $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Déterminez la norme de $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et de $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, leur produit scalaire, leur produit vectoriel et l'amplitude de $\boldsymbol{\theta}$ si

- $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{2}; \mathbf{1}; \mathbf{1})$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{1})$

Exercice C)

Exercice C)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé où θ est l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Déterminez la norme de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$, leur produit scalaire, leur produit vectoriel et l'amplitude de θ si

- $\overrightarrow{u} = (1; 0; 2)$ et $\overrightarrow{v} = (0; 1; -1)$
  - → $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{5}$ et $||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{2}$
  - → $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -2$
  - → $\theta = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{10}}\right) \simeq 2,25\text{rad}$
  - → $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (-2; 1; 1)$

Exercice C)

Soient $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé où $\boldsymbol{\theta}$ est l'angle entre $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Déterminez la norme de $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et de $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, leur produit scalaire, leur produit vectoriel et l'amplitude de $\boldsymbol{\theta}$ si

- $\overrightarrow{u} = (12; 27; 6)$ et $\overrightarrow{v} = (2; 9/2; 1)$

Attention!: $\overrightarrow{u} = 6\overrightarrow{v}$

- $\|\overrightarrow{u}\| = 3\sqrt{101}$ et $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{101}/2$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 303/2$
- $\theta = 0\mathrm{rad}$
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (0; 0; 0)$

Exercice C)

- $\overrightarrow{u} = (2; 1; 1)$ et $\overrightarrow{v} = (13; 26; 13)$

Attention!: $\overrightarrow{v} = 13(1; 2; 1)$

- $\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{6}$ et $\| \overrightarrow{v} \| = 13\sqrt{6}$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 13(2 + 2 + 1) = 65$
- $\theta = \arccos\left(\frac{5}{6}\right) \simeq 0.58\text{rad}$
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 13(2; 1; 1) \wedge (1; 2; 1) = 13(-1; -1; 3)$

Exercice C)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Déterminez la norme de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, leur produit scalaire, leur produit vectoriel et l'amplitude de θ si

- $\vec{u} = (1; -1; 2)$ et $\vec{v} = (3; 1; -1)$
  - → $||\vec{u}|| = \sqrt{6}$ et $||\vec{v}|| = \sqrt{11}$
  - → $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
  - → $\theta = \arccos(0) = \pi/2\text{rad}$
  - → $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-1; 7; 4)$

Exercice C)

Soient $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé où $\boldsymbol{\theta}$ est l'angle entre $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Déterminez la norme de $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et de $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, leur produit scalaire, leur produit vectoriel et l'amplitude de $\boldsymbol{\theta}$ si

- $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (-1; 2; 1)$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (4; -1; -2)$
  - → $\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{6}$ et $\|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\| = \sqrt{21}$
  - → $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = -8$
  - → $\theta = \arccos\left(\frac{-8}{\sqrt{126}}\right) \simeq 2.36\mathrm{rad}$
  - → $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (-3; 2; -7)$

Exercice C)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé où θ est l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Déterminez la norme de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$, leur produit scalaire, leur produit vectoriel et l'amplitude de θ si

- $\overrightarrow{u} = (2; -1; 2)$ et $\overrightarrow{v} = (-3; 7; 1)$
  - → $||\overrightarrow{u}|| = 3$ et $||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{59}$
  - → $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -11$
  - → $\theta = \arccos\left(\frac{-11}{3\sqrt{59}}\right) \simeq 2.07\text{rad}$
  - → $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (-15; -8; 11)$

Exercice C)

Soient $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé où $\boldsymbol{\theta}$ est l'angle entre $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Déterminez la norme de $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et de $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, leur produit scalaire, leur produit vectoriel et l'amplitude de $\boldsymbol{\theta}$ si

- $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (1; 0; 0)$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (0; 1; 0)$
  - → $\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\| = 1$ et $\|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\| = 1$
  - → $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = 0$
  - → $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{arccos}(0) = \pi/2\mathbf{rad}$
  - → $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (0; 0; 1)$

Exercice D)

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ tels que $\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\| = \mathbf{5}$, $\|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\| = \mathbf{2}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \mathbf{10}$. Montrez que la norme du vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{w_1}} = \mathbf{2}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ est égale à $\mathbf{16}$ et que celle du $\overrightarrow{\boldsymbol{w_2}} = \mathbf{2}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ est égale à $\mathbf{4}$

Exercice D)

Exercice E)

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ tels que $\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\| = \mathbf{1}$, $\|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\| = \mathbf{3}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = -\mathbf{2}$. Montrez que la norme du vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{w_1}} = \mathbf{2}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \mathbf{3}\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ est égale à $\sqrt{\mathbf{61}}$ et que celle du $\overrightarrow{\boldsymbol{w_2}} = \mathbf{2}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \mathbf{3}\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ est égale à $\sqrt{\mathbf{109}}$.

Exercice E)

Exercice F)

Exercice supplémentaire

Exercice G)

Soient $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé. Calculez, via les composantes, $(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Qu'en conclure sur le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ par rapport aux vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$?

Exercice G)

Exercice G)

1.3 Décomposition

Exercice A)

Décomposez graphiquement le vecteur $\vec{v}$ représenté dans les figures suivantes.

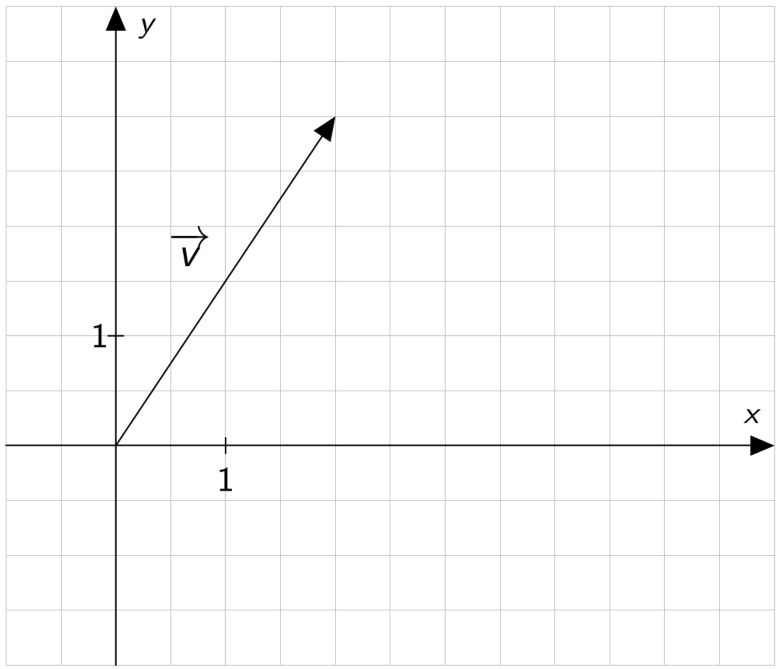


Figure 7

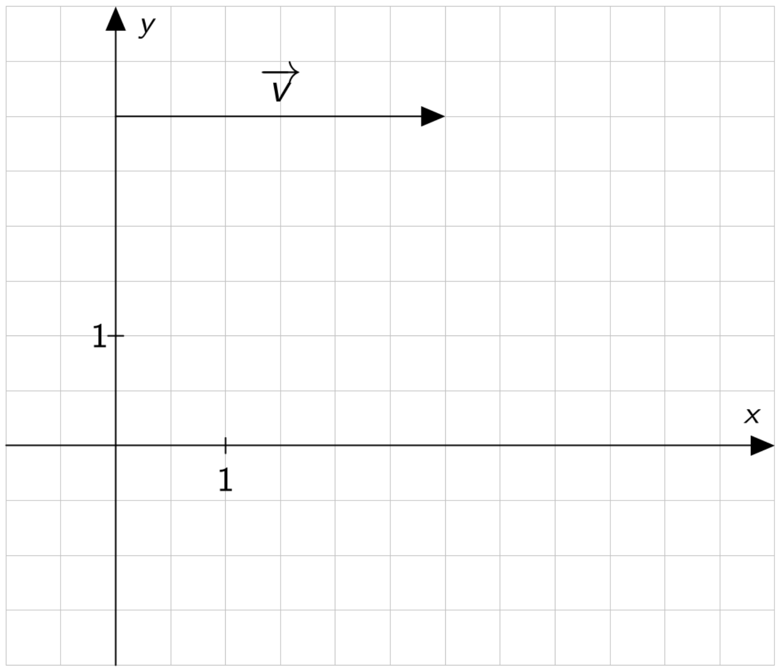


Figure 8

Exercice A)

Décomposez graphiquement le vecteur $\vec{v}$ représenté dans les figures suivantes.

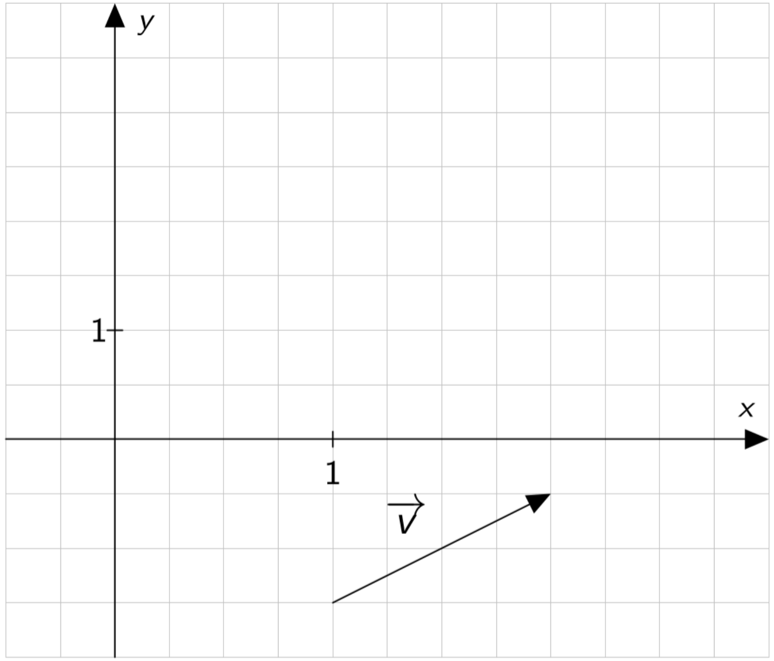


Figure 9

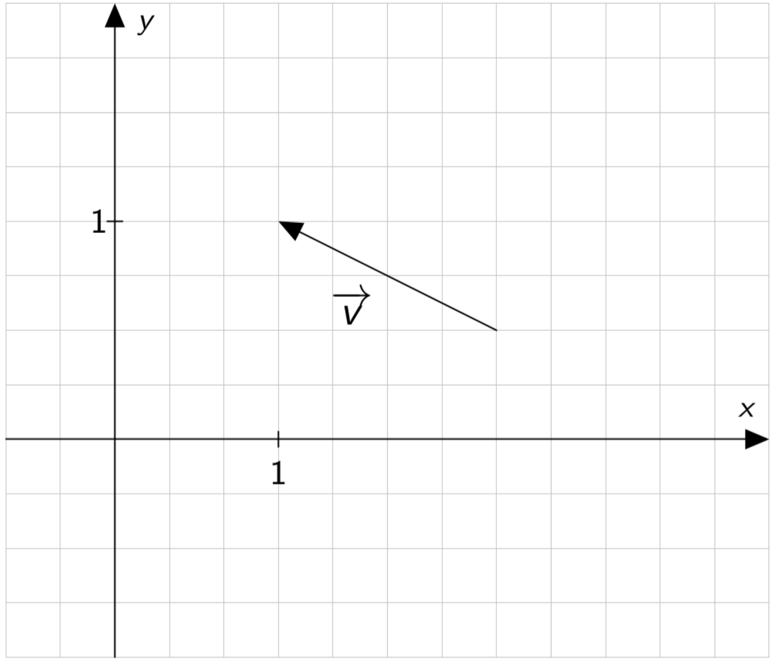


Figure 10

Exercice A)

Décomposez graphiquement le vecteur $\overrightarrow{v}$ représenté dans les figures suivantes.

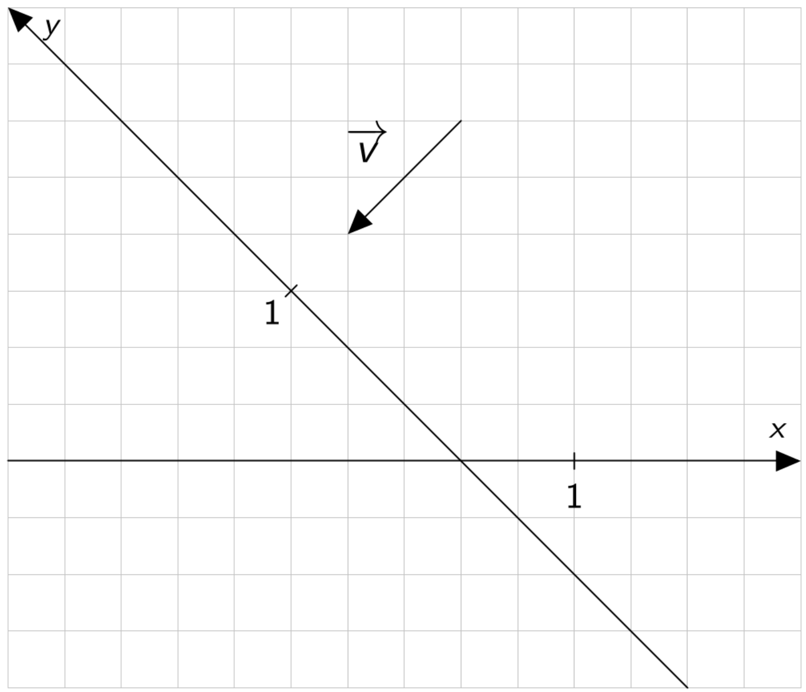


FIGURE 11

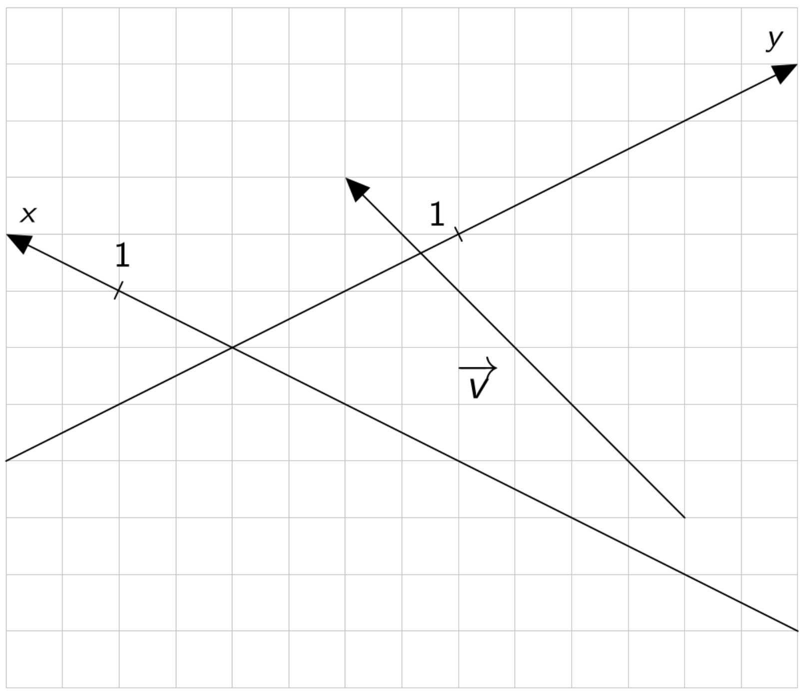


FIGURE 12

Exercice A)

Décomposez graphiquement le vecteur $\overrightarrow{v}$ représenté dans les figures suivantes.

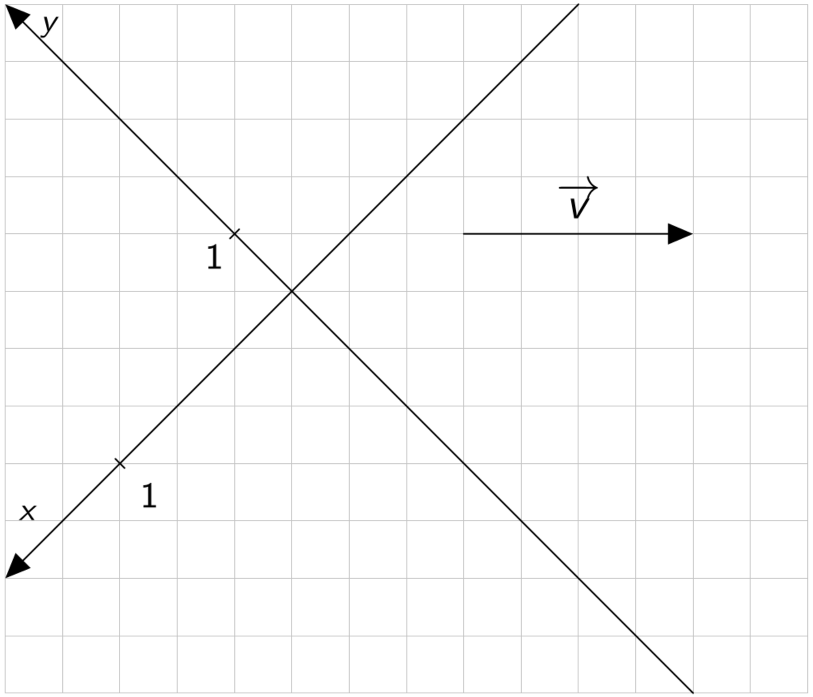


Figure 13

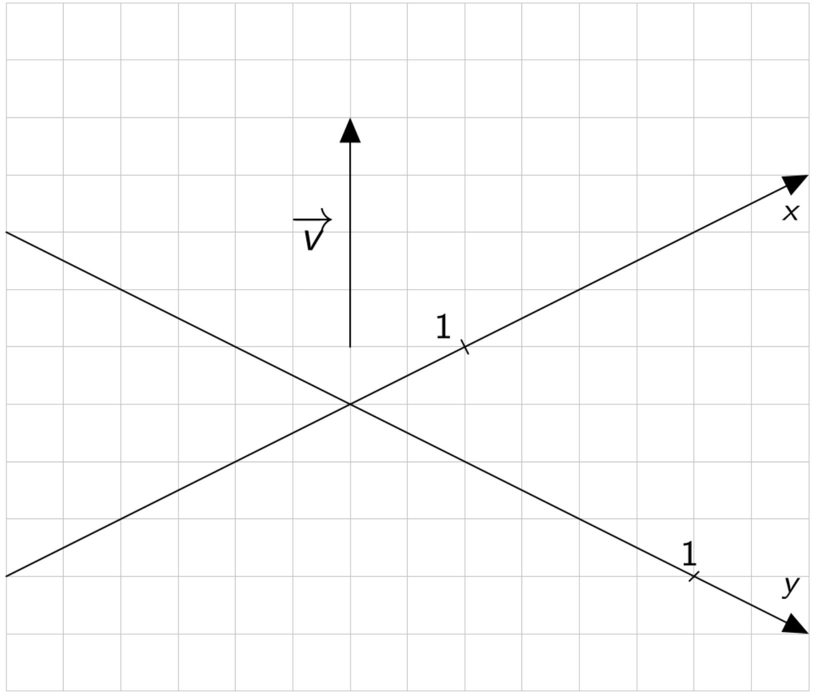


Figure 14

Exercice C)

On donne les vecteurs suivants $\overrightarrow{u} = \mathbf{(73\,123\,416; 146\,246\,832)}$ et $\overrightarrow{v} = \mathbf{(-79\,035\,264; 39\,517\,632)}$, deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé. utiliser de calculatrice, démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.