Introduction mathématique aux sciences de la vie

Séance d'exercices du 13/10/25

Liens:

- Vers les slides: QR-code

- Vers le pdf (après le scan du QR-code): Ouvrir le PDF

Remédiations

Cette semaine:

Toutes les remédiations porteront sur les vecteurs.

1.2 Produits scalaire et vectoriel

Exercice E)

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ tels que $\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\| = \mathbf{1}$, $\|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\| = \mathbf{3}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = -\mathbf{2}$. Montrez que la norme du vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{w_1}} = \mathbf{2}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \mathbf{3}\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ est égale à $\sqrt{\mathbf{61}}$ et que celle du $\overrightarrow{\boldsymbol{w_2}} = \mathbf{2}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \mathbf{3}\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ est égale à $\sqrt{\mathbf{109}}$.

1.3 Décomposition

Exercice A)

Décomposez graphiquement le vecteur $\overrightarrow{v}$ représenté dans les figures suivantes.

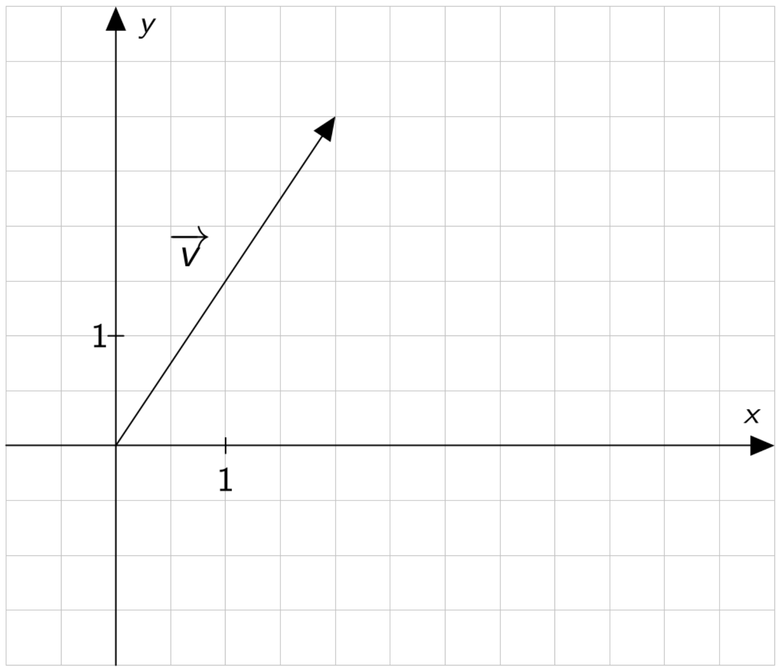


Figure 7

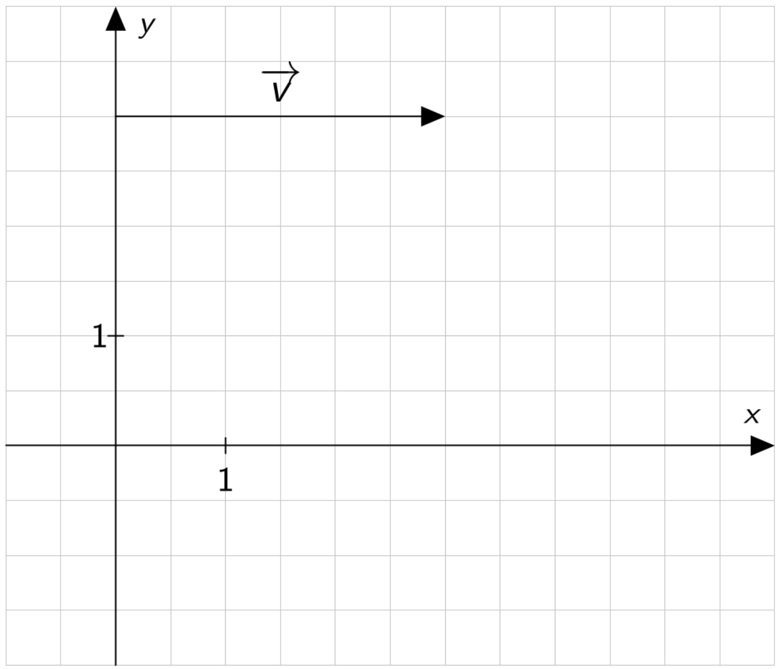


Figure 8

Exercice A)

Décomposez graphiquement le vecteur $\overrightarrow{v}$ représenté dans les figures suivantes.

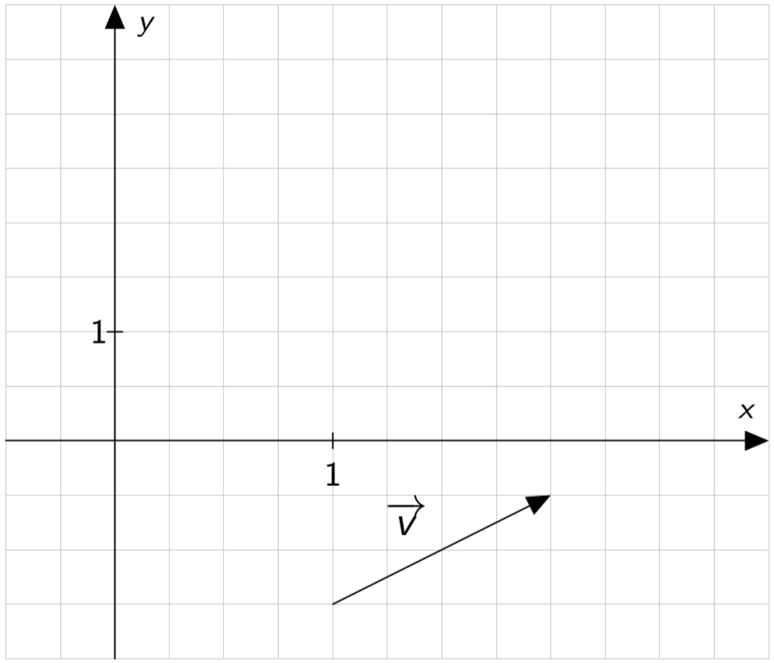


Figure 9

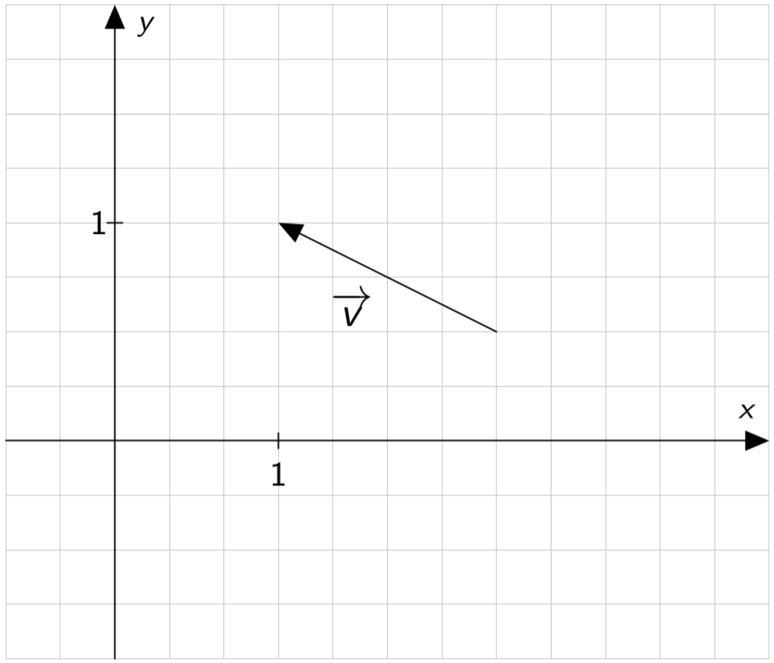


Figure 10

Exercice A)

Décomposez graphiquement le vecteur $\overrightarrow{v}$ représenté dans les figures suivantes.

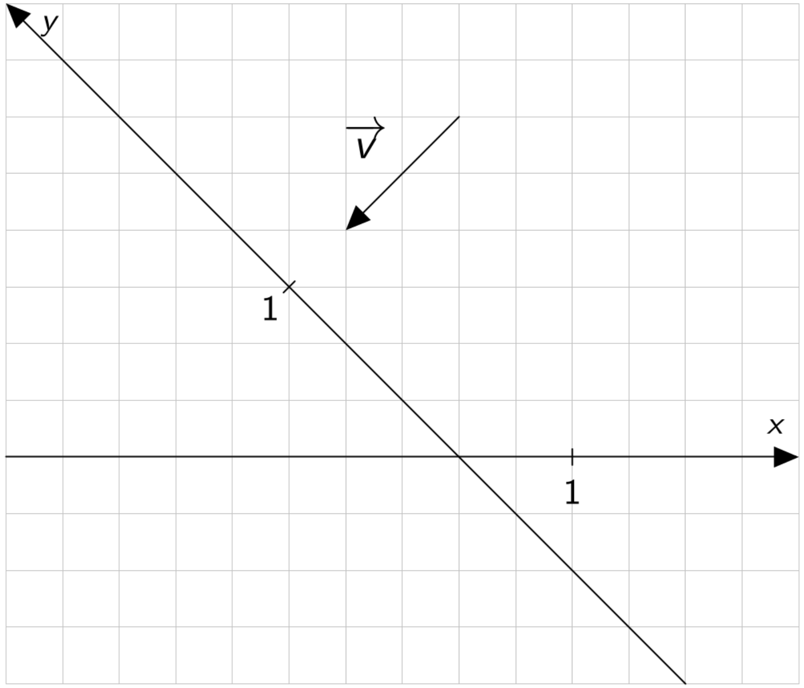


Figure 11

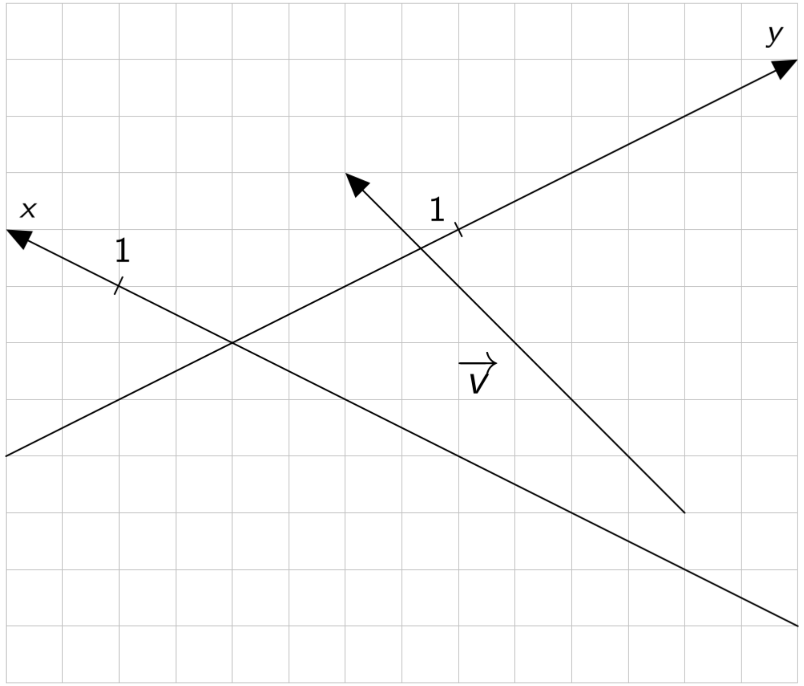


Figure 12

Exercice A)

Décomposez graphiquement le vecteur $\overrightarrow{v}$ représenté dans les figures suivantes.

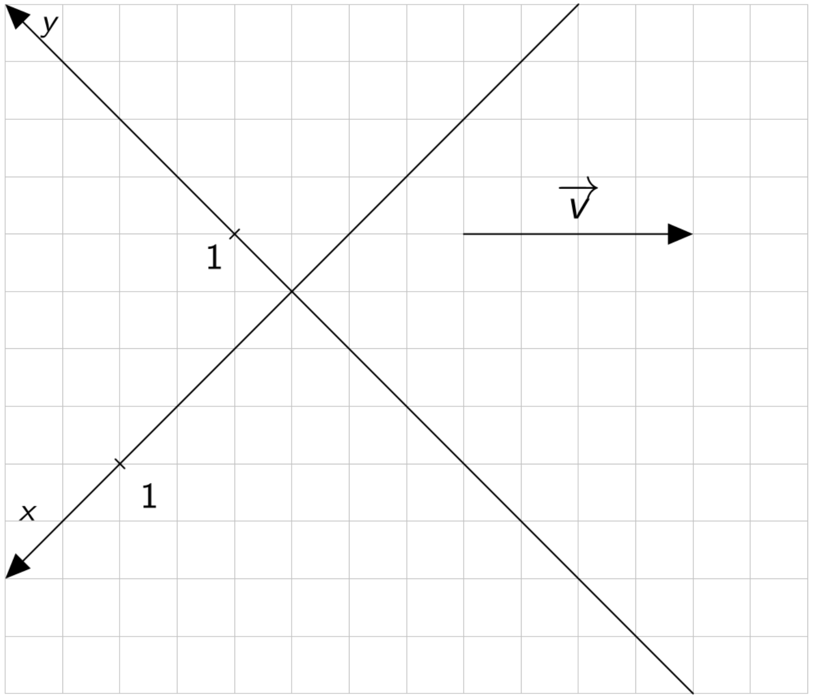


FIGURE 13

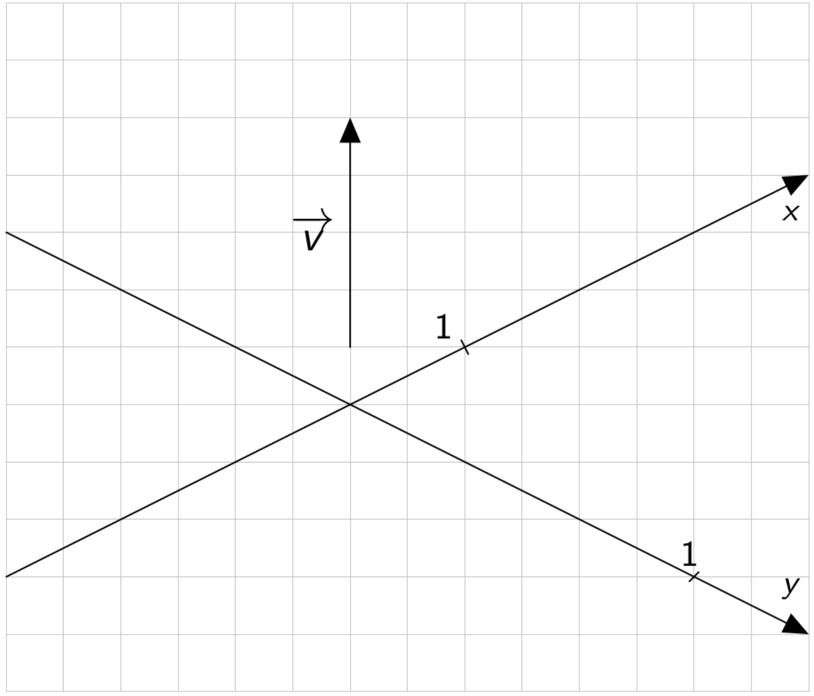


FIGURE 14

Exercice C)

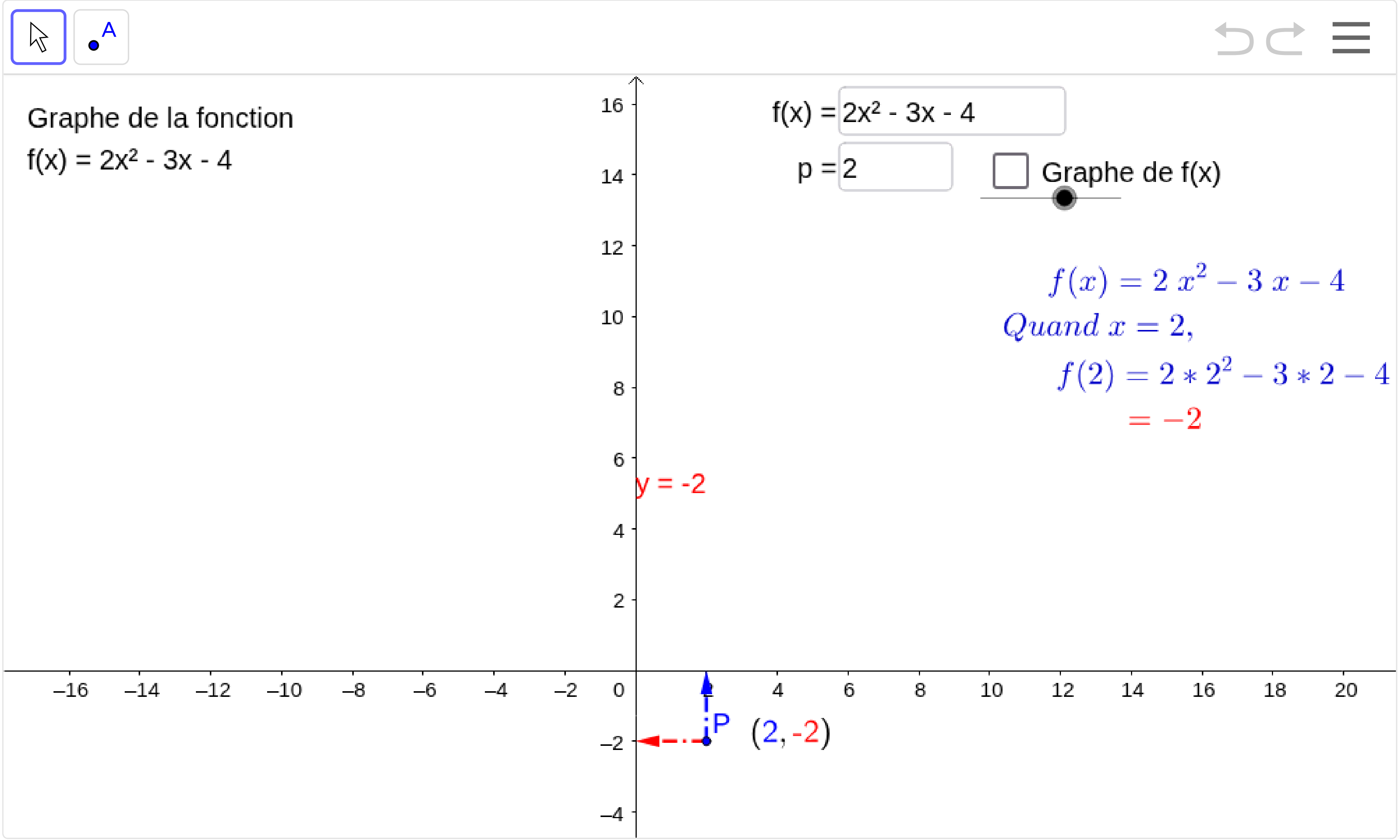
On donne les vecteurs suivants $\overrightarrow{u} = \mathbf{(73\,123\,416; 146\,246\,832)}$ et $\overrightarrow{v} = \mathbf{(-79\,035\,264; 39\,517\,632)}$, deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé. utiliser de calculatrice, démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Les fonctions

Définition

Une *fonction* f est une relation entre deux ensembles A et B telle que tout élément de A correspond à **au plus** un élément de B. Notation: $f : A \to B$. Dans ce cours, on se limitera aux fonctions où $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}$.

- Représentation graphique: une fonction est représentée par son graphe, c'est-à-dire l'ensemble des couples $(a, f(a))$ (pour autant que a soit associé à un élément de B). Le graphe est représenté dans un repère, où l'axe horizontal représente A et l'axe vertival B.
- Expression analytique: il s'agit d'une formule qui permet de calculer $f(x)$ en connaissant x. Par exemple: $f(x) = x^2$ est une expression analytique pour la fonction "carré".


Graphe de la fonction
f(x) = 2x² - 3x - 4
f(x) = 2x² - 3x - 4
p = 2
Graphe de f(x)
$f(x) = 2\,x^2 - 3\,x - 4$
$Quand\ x = 2,$
$f(2) = 2 * 2^2 - 3 * 2 - 4$
$= -2$
y = -2
P
(2, -2)

Caractéristiques d’une fonction

Domaine et ensemble image

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- **Domaine**: le domaine de f est l'ensemble $\mathbf{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \textbf{ existe.}\}$: c'est l'ensemble des réels qui ont une image par f
- **Ensemble image**: l'ensemble image de f est l'ensemble $\mathbf{im}(f) = \{f(x) | x \in \mathbf{dom}(f)\}$: c'est l'ensemble de toutes les valeurs possibles de f

Conditions d’existence

Comment déterminer algébriquement le domaine d’une fonction? A partir des conditions d’existence. Celles-ci se déterminent à partir de l’expression analytique de la fonction:

Racines et ordonnée à l'origine (oào)

- **Racines**: les racines sont les abscisses des points d'intersection entre l'axe x et le graphe de f. Algébriquement, on les trouve en résolvant l'équation $f(x) = 0$.
- **Ordonnée à l'origine**: l'ordonnée à l'origine est l'ordonnée du point d'intersection (s'il existe) entre l'axe y et le graphe de f. Algrébriquement, on trouve l'oao en calculant $f(0)$ (si 0 est dans le domaine de f).

Parité

La parité d'une fonction mesure la symétrie du graphe de f:

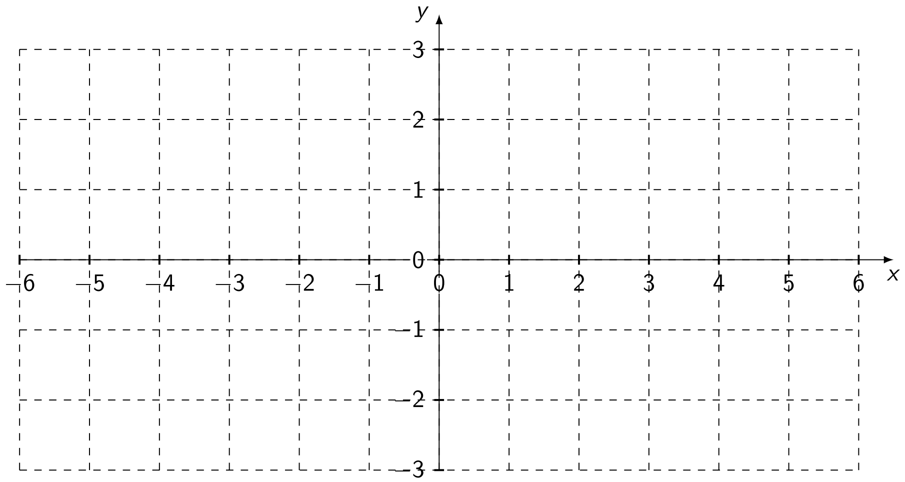
- par rapport à l'axe des y: si le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe y, alors f est dite paire (cela implique que le domaine de f est symétrique par rapport à l'axe y)
- par rapport au centre du repère: si le graphe de f est symétrique par rapport au centre du repère, alors f est dite impaire (cela implique aussi que le domaine est symétrique par rapport à l'axe y).

Parité: point de vue algébrique

- f est paire ssi $\forall x \in \mathbf{dom}(f)(-x \in \mathbf{dom}(f) \textbf{ et } f(-x) = f(x))$
- f est impaire ssi $\forall x \in \mathbf{dom}(f)(-x \in \mathbf{dom}(f) \textbf{ et } f(-x) = -f(x))$

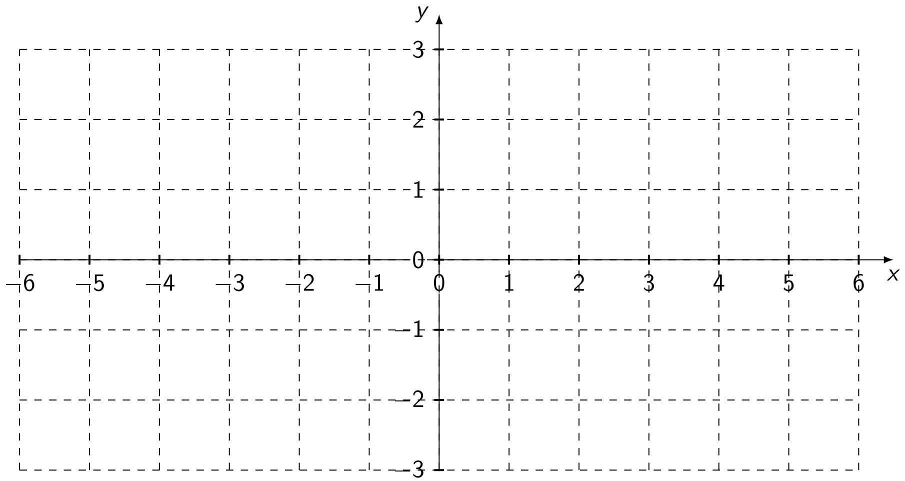
Fonctions de référence

Fonctions constantes



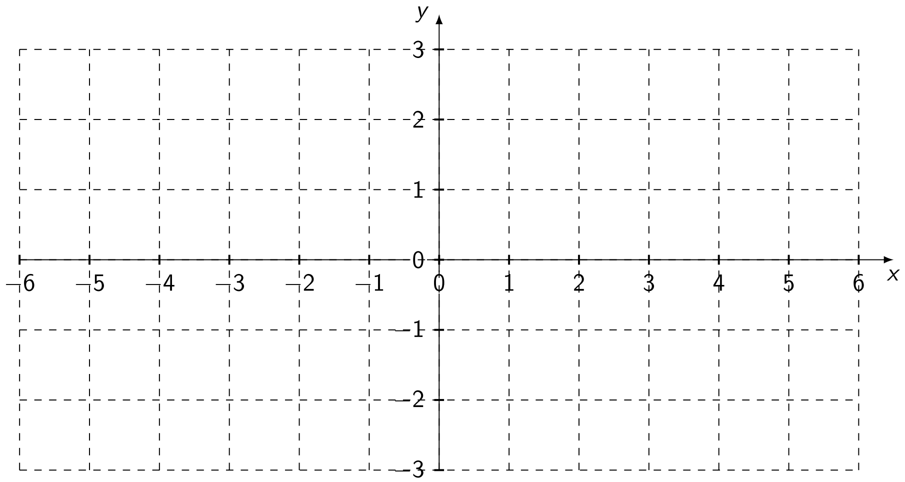
- Expression analytique: $\boldsymbol{f(x) = k}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$
- Domaine:
- Ensemble image:
- Racines:
- Oào:
- Signe:
- Variations:

Fonctions du premier degré



- Expression analytique: $f(x) = mx + p$, $m, p \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$
- Domaine:
- Ensemble image:
- Racines:
- Oào:
- Signe:
- Variations:

Fonctions du second degré

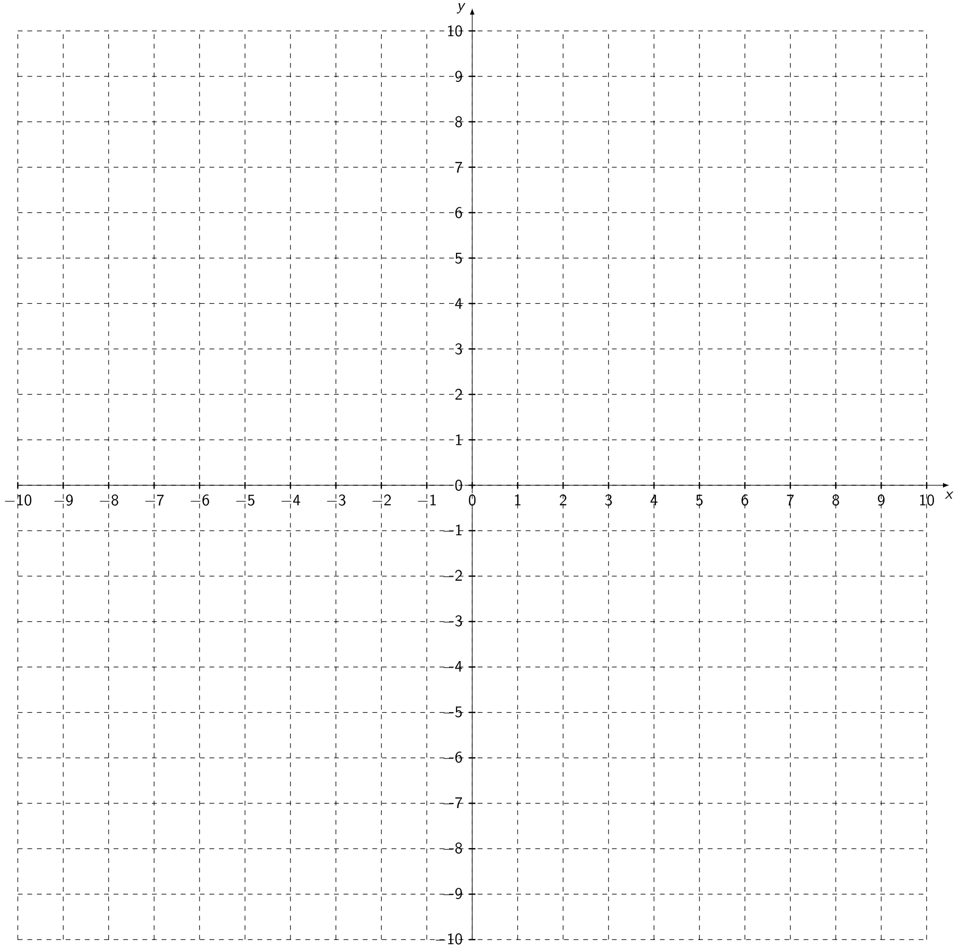


- Expression analytique: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
- Domaine:
- Ensemble image:
- Racines:
- Oào:

- Signe:

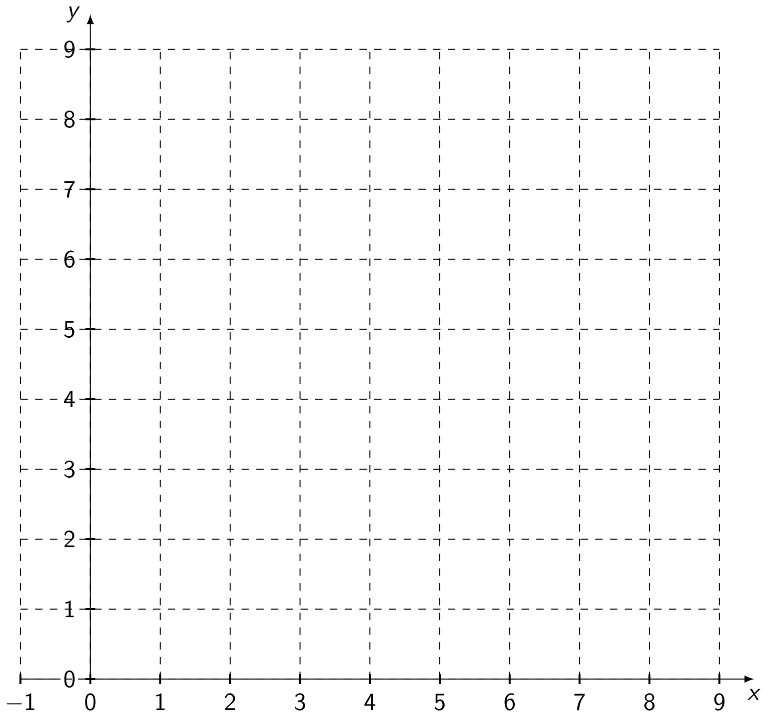
- Variations:

Fonction inverse



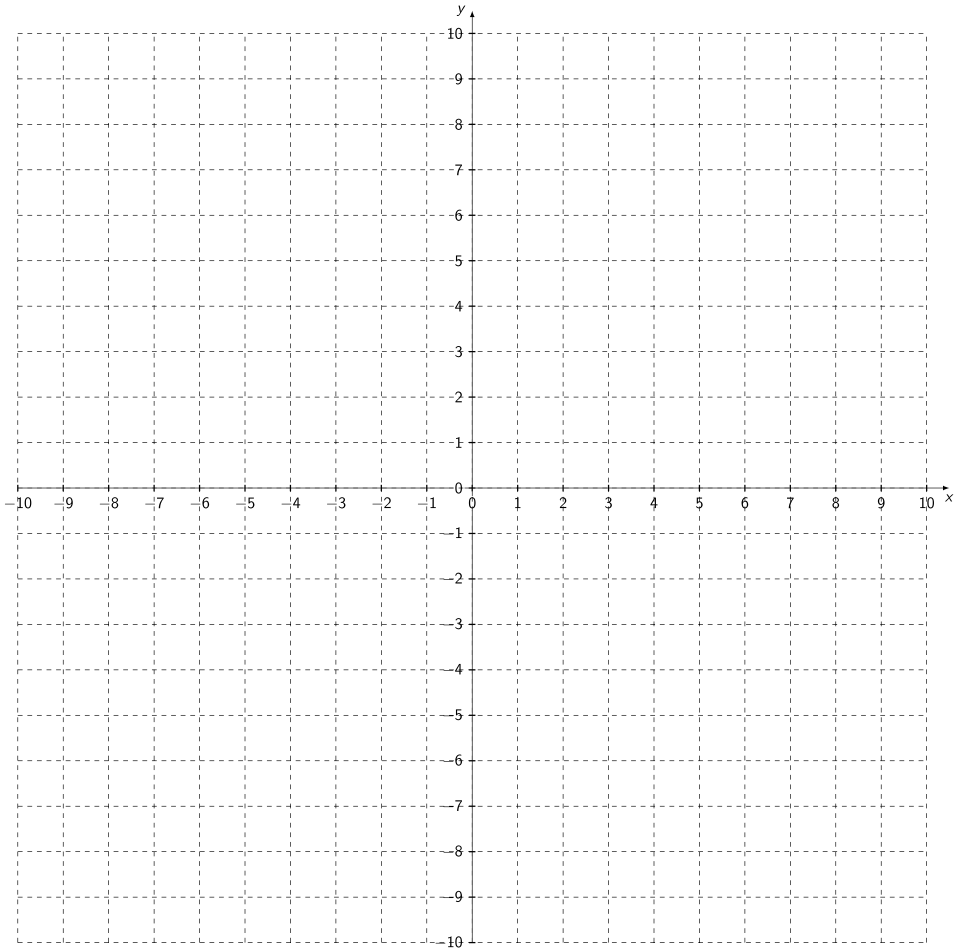
- Expression analytique: $f(x) = 1/x$
- Domaine:
- Ensemble image:
- Racines:
- Oào:
- Signe:
- Variations

Fonction racine carrée



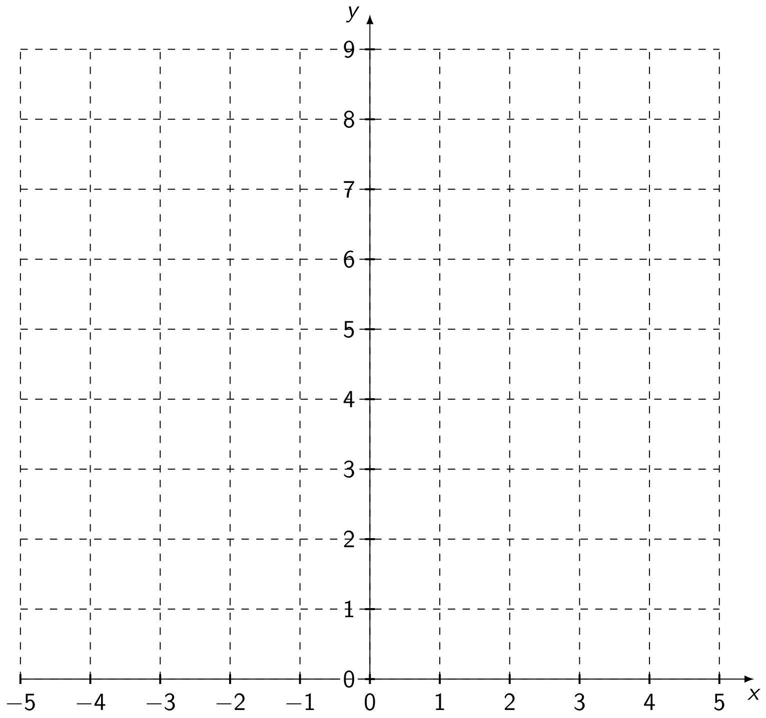
- Expression analytique: $f(x) = \sqrt{x}$
- Domaine:
- Ensemble image:
- Racines:
- Oào:
- Signe:
- Variations:

Fonction racine cubique



- Expression analytique: $f(x) = \sqrt[3]{x}$
- Domaine:
- Ensemble image:
- Racines:
- Oào:
- Signe:
- Variations

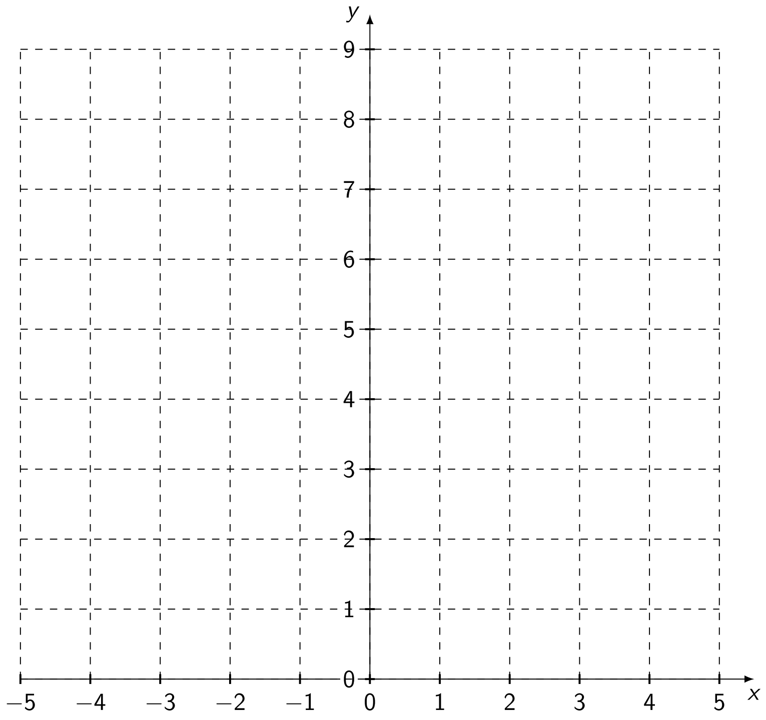
Fonction valeur absolue



- Expression analytique: $f(x) = |x|$
- Domaine:
- Ensemble image:
- Racines:
- Oào:

- Signe:
- Variations:

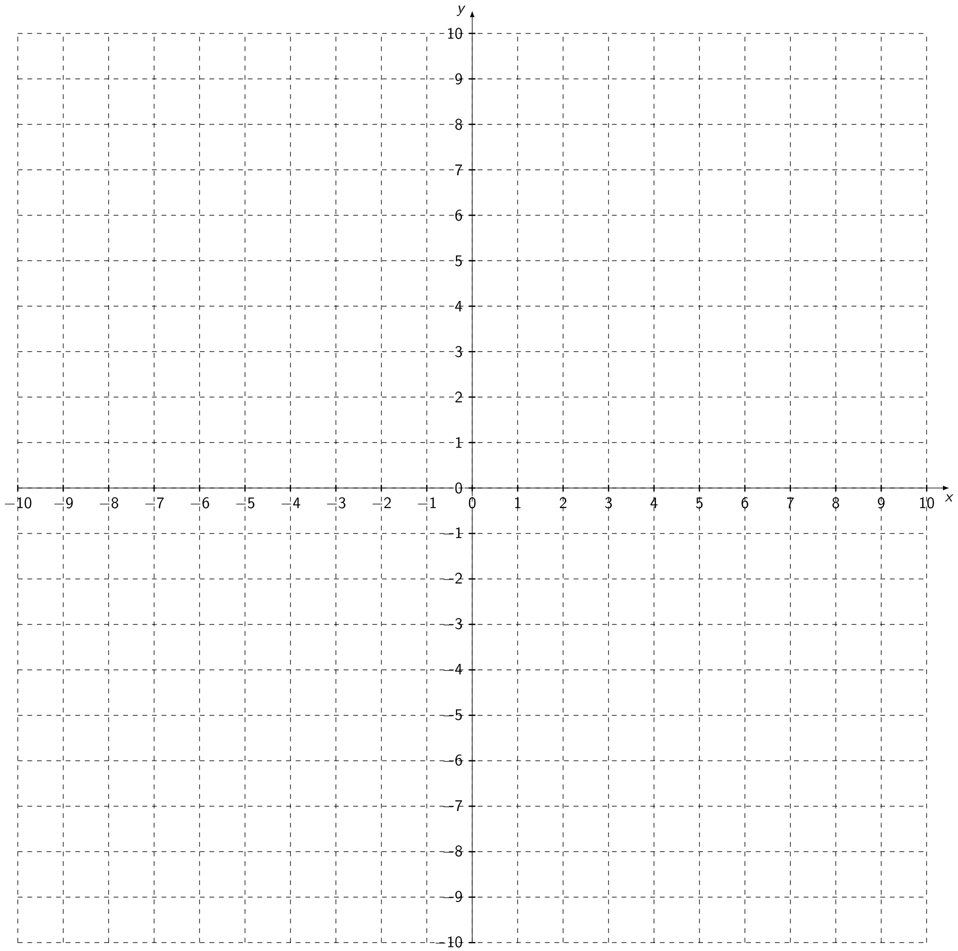
Fonctions exponentielles



- Expression analytique: $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$
- Domaine:
- Ensemble image:
- Racines:
- Oào:

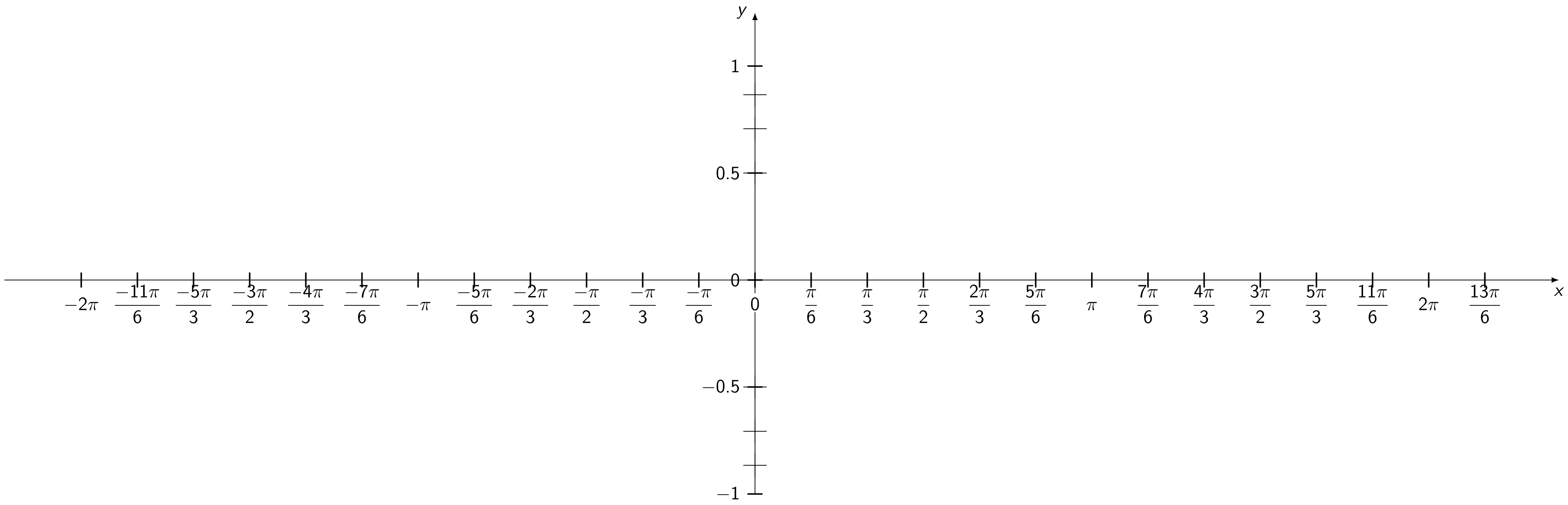
- Signe:
- Variations:

Fonctions logarithmiques



- Expression analytique: $f(x) = \log_a(x), a \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$
- Domaine:
- Ensemble image:
- Racines:
- Oào:
- Signe:
- Variations

Fonction sinus

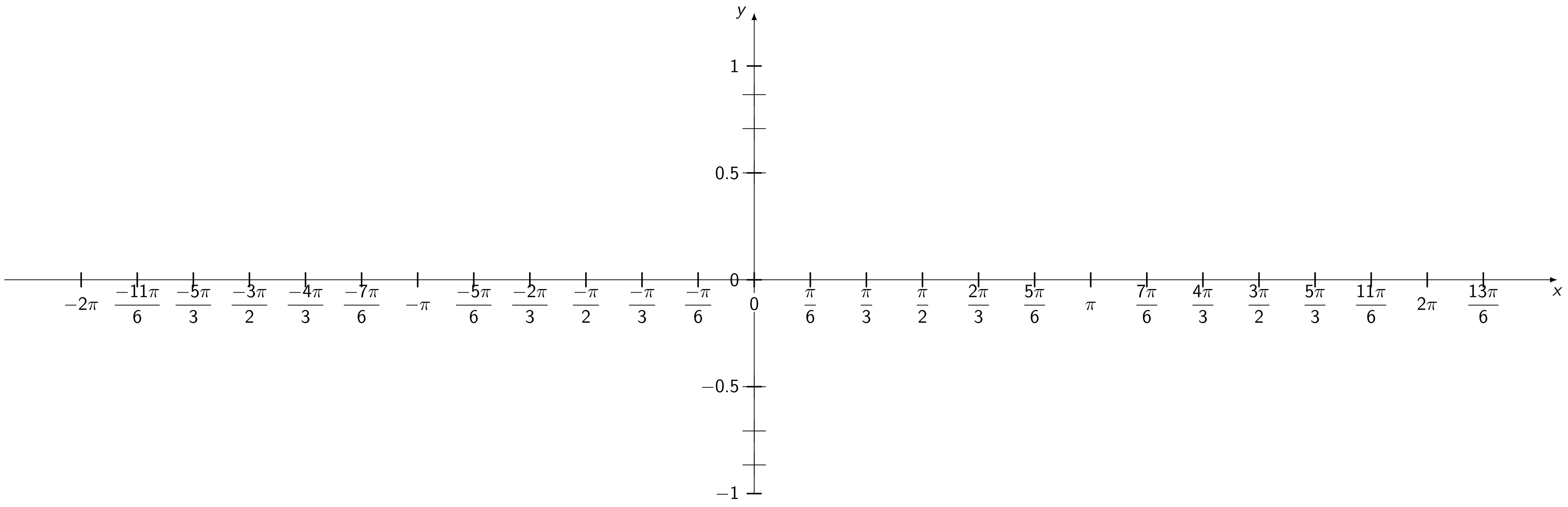


Fonction sinus

- Expression analytique:
  $f(x) = \sin(x)$
- Domaine:
- Ensemble image:
- Racines:
- Oào:
- Signe sur $[0, 2\pi]$:

- Variations sur $[0, 2\pi]$:

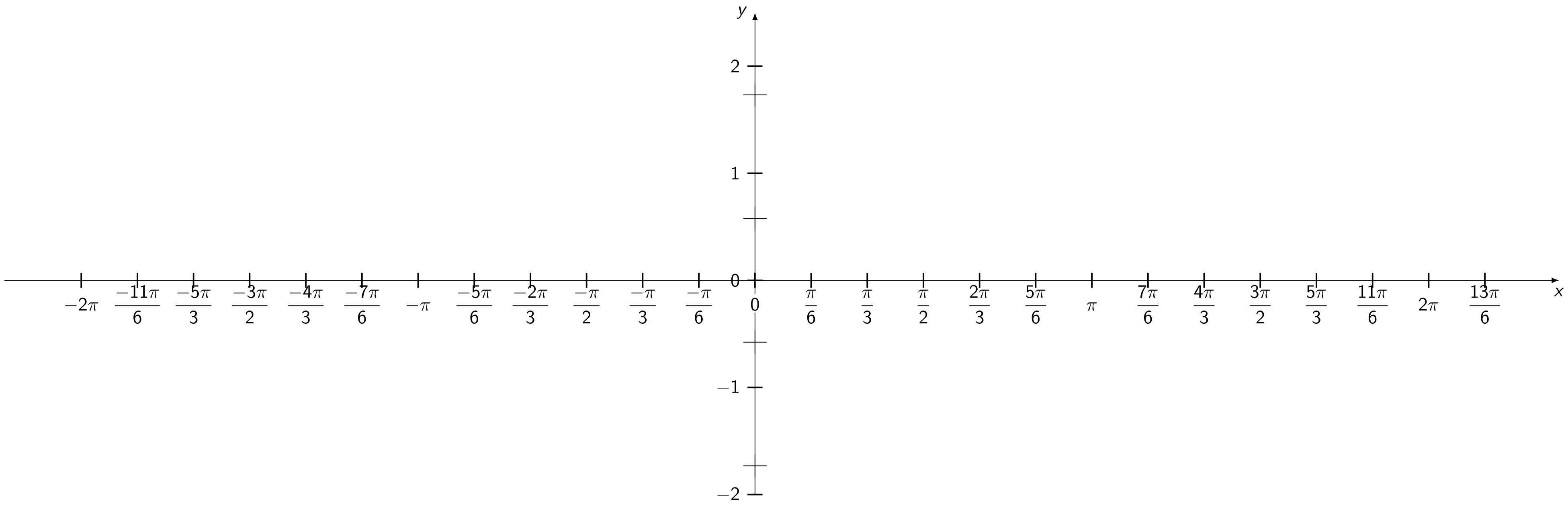
Fonction cosinus



Fonction cosinus

- Expression analytique:
  $f(x) = \cos(x)$
- Domaine:
- Ensemble image:
- Racines:
- Oào:
- Signe sur $[0, 2\pi]$:
- Variations sur $[0, 2\pi]$:

Fonction tangente



Fonction tangente

- Expression analytique:

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

- Domaine:
- Ensemble image:
- Racines:
- Oào:
- Signe sur $]\pi/2, \pi/2[$:
- Variations sur $]-\pi/2, \pi/2[$:

Exemples de calcul de domaine

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2 - 5x + 6}$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 15}$$

$$f(x) = \tan(2x + \pi)$$

A partir du graphe

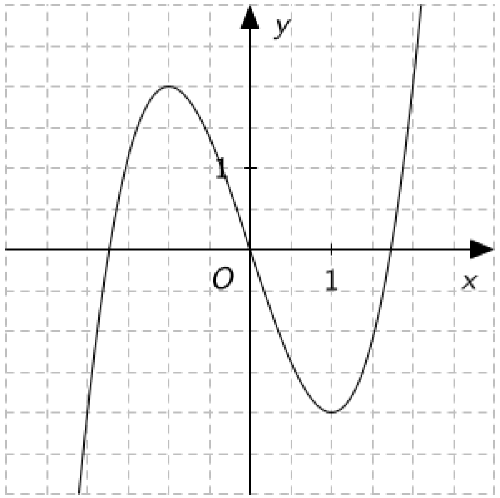


Figure 15

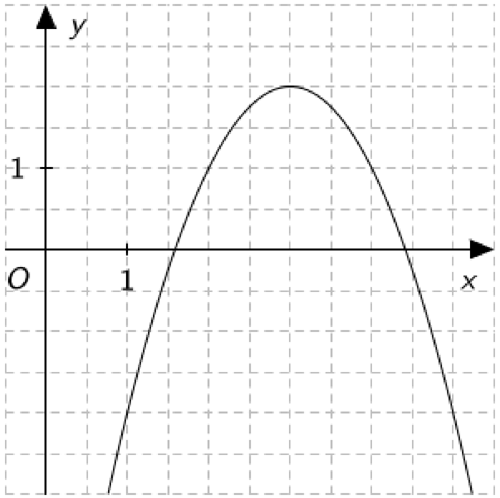


Figure 16

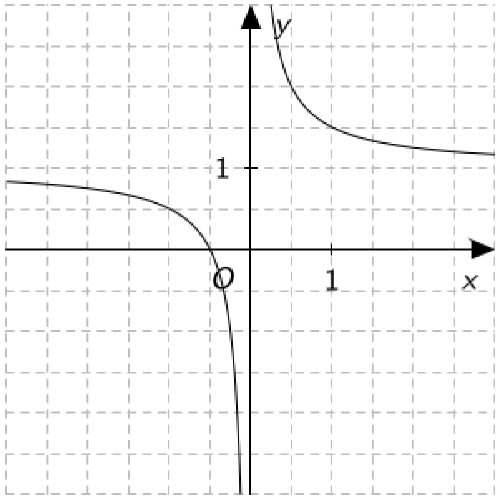


Figure 17

Déterminer la parité d’une fonction

$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f(x) = (x+1)^2$$

Prépa: terminer les exercices A, B et C de la page 7.

Opérations sur les fonctions

Soit f et g deux fonctions. Les opérations sur ces fonctions sont définie à travers leurs expressions analytiques:

Somme et différence

$(f \pm g)$ est la fonction définie par

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$$

De plus, $\mathbf{dom}(f \pm g) = \mathbf{dom}(f) \cap \mathbf{dom}(g)$.

Produit

$(f \cdot g)$ est la fonction définie par

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

De plus, $\mathbf{dom}(f \cdot g) = \mathbf{dom}(f) \cap \mathbf{dom}(g)$.

Quotient

$\dfrac{f}{g}$ est la fonction définie par

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

De plus, $\mathbf{dom}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathbf{dom}(f) \cap \mathbf{dom}(g) \backslash \{x \in \mathbf{dom}(g) | g(x) = 0\}$.

Composition

$f \circ g$ est la fonction définie par

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

De plus, $\mathbf{dom}(f \cdot g) = \{x \in \mathbf{dom}(g) | g(x) \in \mathbf{dom}(f)\}$

Attention!: la composée n'est pas une opération commutative: $f \circ g \neq g \circ g$.

Exercice 2.2.B)

Soient f et g deux fonctions. Déterminer une expression analytique de $f \circ g$ et $g \circ f$.

- $f(x) = x^2$ et $g(x) = \cos(x)$