Introduction mathématique aux sciences de la vie

Séance d'exercices du 22/10/25

Télécharger le PDF

Sondage

- Merci d'y avoir répondu
- Tout n'a pas été anlysé (77 pages de rapport)
- Ce que je peux déjà dire:
  → Correctif disponible àpd d'aujourd'hui
  → Je n'interrogerai oralement que les volontaires et ceux qui bavardent pendant que je parle
  → Ceux qui trouvent le rythme trop lent, les exercices trop rapides: avancez dans le cours en autonomie! ;-)

Parité

$$f(x) = \sqrt{x + 7}$$

Opérations sur les fonctions

Soit f et g deux fonctions. Les opérations sur ces fonctions sont définie à travers leurs expressions analytiques:

Somme et différence

$(f \pm g)$ est la fonction définie par

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$$

De plus, $\mathbf{dom}(f \pm g) = \mathbf{dom}(f) \cap \mathbf{dom}(g)$.

Produit

$(f \cdot g)$ est la fonction définie par

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

De plus, $\mathbf{dom}(f \cdot g) = \mathbf{dom}(f) \cap \mathbf{dom}(g)$.

Quotient

$\dfrac{f}{g}$ est la fonction définie par

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

De plus, $\mathbf{dom}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathbf{dom}(f) \cap \mathbf{dom}(g) \backslash \{x \in \mathbf{dom}(g) | g(x) = 0\}$.

Composition

$f \circ g$ est la fonction définie par

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

De plus, $\mathbf{dom}(f \cdot g) = \{x \in \mathbf{dom}(g) | g(x) \in \mathbf{dom}(f)\}$

Attention!: la composée n'est pas une opération commutative:
$f \circ g \neq g \circ g$.

Exercice 2.2.B) (p. 9)

Soient f et g deux fonctions. Déterminer une expression analytique de $f \circ g$ et $g \circ f$.

- $f(x) = x^2$ et $g(x) = \cos(x)$

Exercice 2.2.B)

Soient f et g deux fonctions. Déterminer une expression analytique de $f \circ g$ et $g \circ f$.

- $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \ln(x)$

Exercice 2.2.B)

Soient f et g deux fonctions. Déterminer une expression analytique de $f \circ g$ et $g \circ f$.

- $f(x) = \dfrac{x-1}{1+x}$ et $g(x) = x^3$

Exercice 2.2.B)

Soient f et g deux fonctions. Déterminer une expression analytique de $f \circ g$ et $g \circ f$.

Prépa:

- $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = 42 \ln(x)$
- $f(x) = \sin(2x)$ et $g(x) = 4 - 7x$
- $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = |1 - x|$

Réciproque d'une fonction

Définition: Soit f une fonction. La réciproque de f est une fonction (si elle existe) g telle que $f \circ g = g \circ f = \mathbf{Id}$.

Graphiquement, la réciproque de f est s'obtient par symétrique d'axe $x = y$.

Réciproque d'une fonction

Exemple: x^3 a pour réciproque $\sqrt[3]{x}$.

Réciproque d’une fonction

Exemple: x^2 n’a pas de réciproque. Mais restreinte à $\mathbb{R}^{\geq 0}$, alors x^2 a une réciproque, la fonction $\sqrt{x}$.

Déterminer algébriquement une réciproque (2.2.C)

$f(x) = 2x + 3$

$$f(x) = |x| + 2$$

$$f(x) = \frac{1 - x}{x}$$

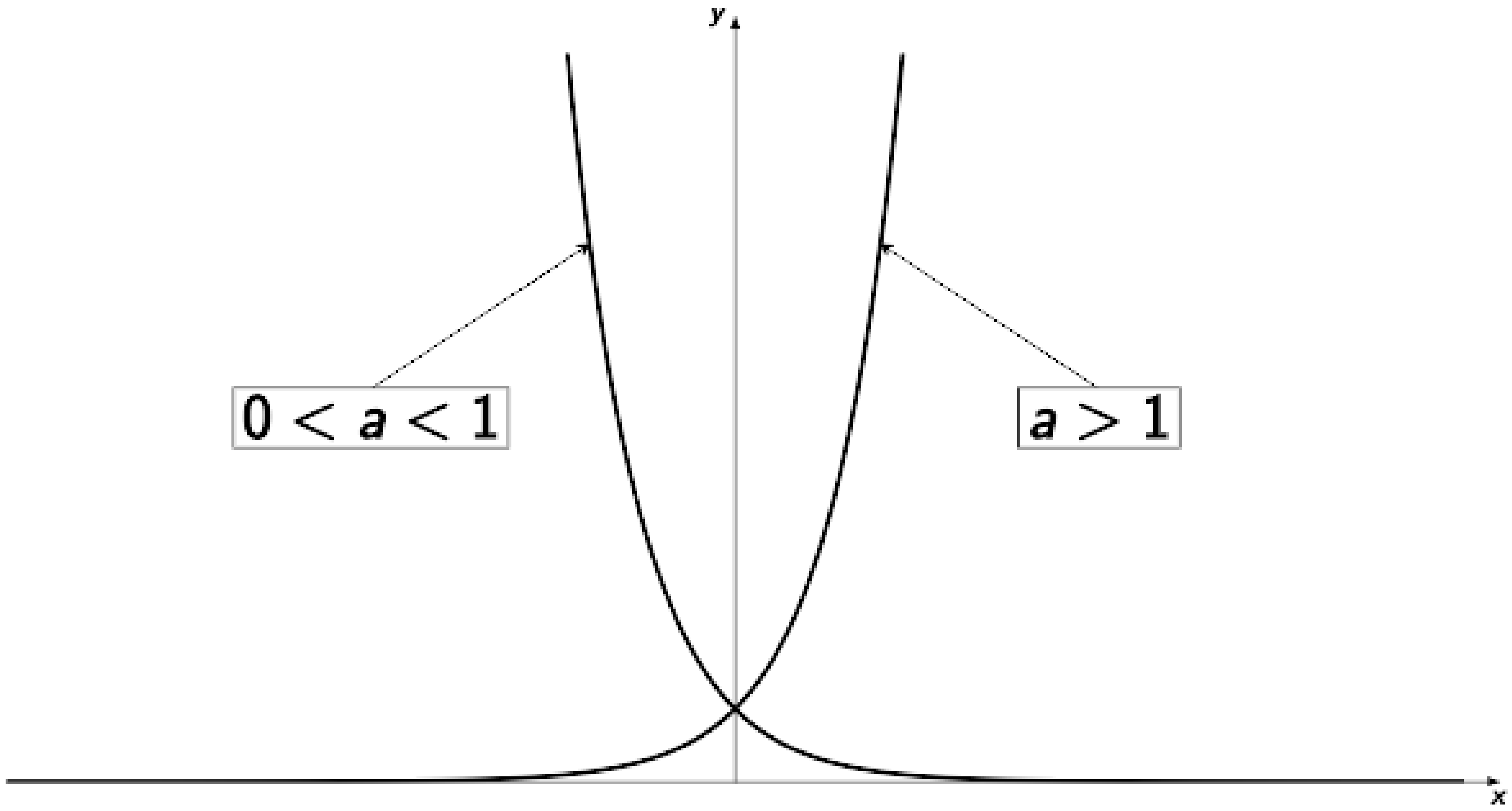
Reste: prépa

- $f(x) = x^2 - 6x + 9$
- $\dfrac{2x+1}{x+3}$
- $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

Exponentielles et logarithmes

Exponentielles

Soit $a \in \mathbb{R}^{>0} \backslash \{1\}$ une base. L'exponentielle de base a, notée a^x, est une fonction dérivable qui prolonge les exposants de base a.



Exponentielles

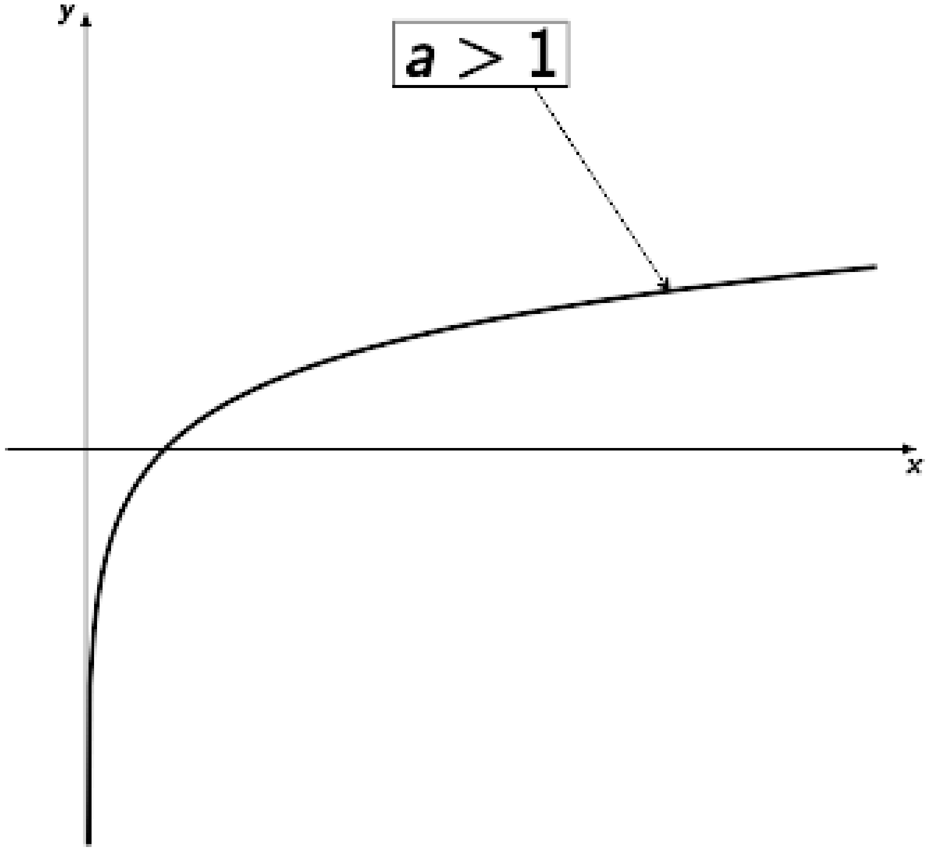
Soit $a \in \mathbb{R}^{>0} \backslash \{1\}$ une base. Les propriétés algébriques de a^x sont: pour $m, n \in \mathbb{R}$

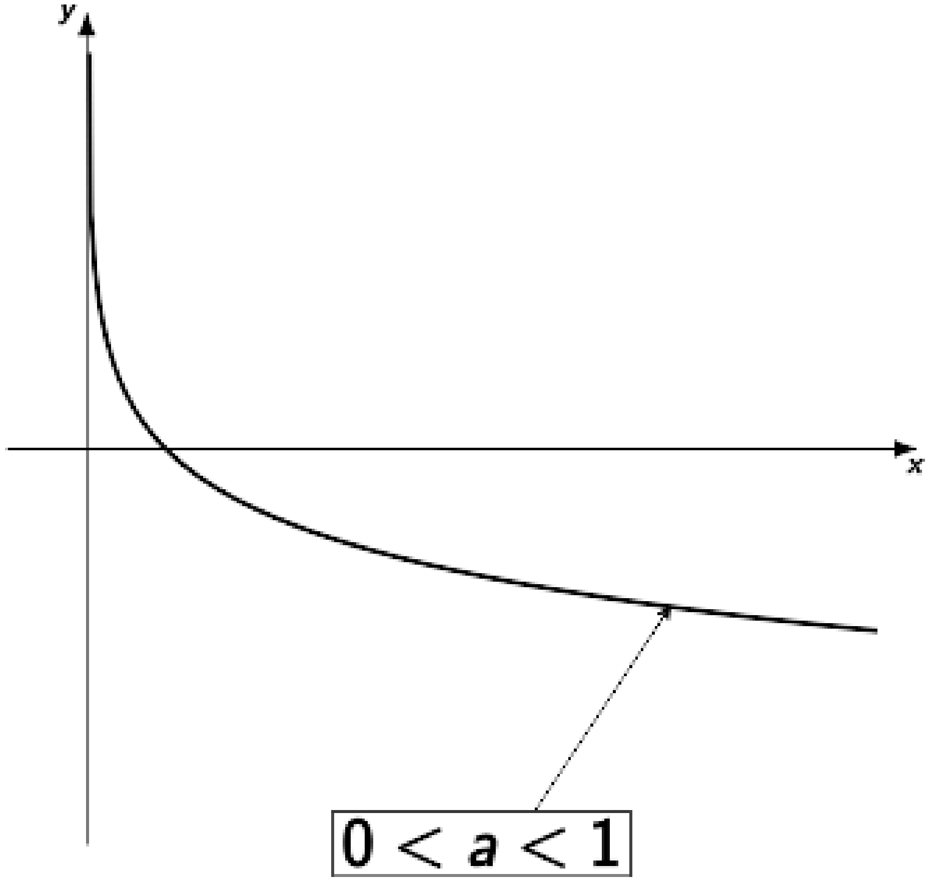
- $a^0 = 1$
- $a^{m+n} = a^m a^n$
- $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$
- $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$

La deuxième propriété dit: l'exponentielle transforme une somme ne un produit. En conséquence, une exponentielle croît ou décroît très vite.

Logarithmes

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$ une base. Le logarithme de base $\boldsymbol{a}$, noté $\mathbf{log}_{a}(\boldsymbol{x})$, est la réciproque de $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$.





Logarithmes

Soit $a \in \mathbb{R}^{>0} \backslash \{1\}$ une base. Les propriétés algébriques de $\log_a(x)$ sont obtenue par traduction de celles de a^x: pour $m, n \in \mathbb{R}$

- $\log_a(a^x) = x$ et $a^{\log_a(x)} = x$
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(mn) = \log_a(m) + \log_a(n)$
- $\log_a(m/n) = \log_a(m) - \log_a(n)$
- $\log_a(x^m) = m \log_a(x)$
- si b est une autre base: $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

Exponentielle et logarithme népérien

Une base est particulière: la base $\mathbf{e} \simeq \mathbf{2,718281828459045}$. Pour cette base on note l'exponentielle $\mathbf{e}^{\boldsymbol{x}}$ et le logarithme $\mathbf{ln}(\boldsymbol{x})$.

2.3.A) (page 9)

Soient a, b et c trois réels strictement positifs et différents de 1. Prouvez que $\log_a(b) \times \log_b(c) \times \log_c(a) = 1$.

2.3.B) (page 9)

Exprimez les logarithmes suivants en fonction de multiples de $\ln(2)$, $\ln(3)$ ou $\ln(5)$:

- $\ln(4)$

2.3.B) (page 9)

Exprimez les logarithmes suivants en fonction de multiples de $\ln(2)$, $\ln(3)$ ou $\ln(5)$:

- $\ln(6)$

2.3.B) (page 9)

Exprimez les logarithmes suivants en fonction de multiples de $\ln(2)$, $\ln(3)$ ou $\ln(5)$:

- $\ln(8)$

2.3.B) (page 9)

Exprimez les logarithmes suivants en fonction de multiples de $\mathbf{ln(2)}$, $\mathbf{ln(3)}$ ou $\mathbf{ln(5)}$:

- $\mathbf{ln(9)}$

2.3.B) (page 9)

Exprimez les logarithmes suivants en fonction de multiples de $\mathbf{ln(2)}$, $\mathbf{ln(3)}$ ou $\mathbf{ln(5)}$:

- $\mathbf{ln(10)}$

2.3.B) (page 9)

Exprimez les logarithmes suivants en fonction de multiples de $\ln(2)$, $\ln(3)$ ou $\ln(5)$:

- $\ln(0,5)$

2.3.B) (page 9)

Le reste est à faire à la maison.

2.3.C) (page 9)

En sachant que $\log(2) \simeq 0,301$, déterminez ce que vaut approximativement :

- $\log(4)$

2.3.C) (page 9)

En sachant que $\mathbf{log(2) \simeq 0,301}$, déterminez ce que vaut approximativement :

- $\mathbf{log(0,2)}$

2.3.C) (page 9)

En sachant que $\mathbf{log(2) \simeq 0,301}$, déterminez ce que vaut approximativement :

- $\mathbf{log\left(\frac{1}{16}\right)}$

2.3.C) (page 9)

En sachant que $\mathbf{\log(2) \simeq 0,301}$, déterminez ce que vaut approximativement :

- $\mathbf{\log(0,00064)}$

2.3.C) (page 9)

Le reste est à faire à la maison.

2.3.D) (page 9)

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- $\mathbf{ln}(x) = 8$

2.3.D) (page 9)

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- $\ln(x+1) = 4$

2.3.D) (page 9)

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- $\mathbf{\log\left(\frac{5}{x}\right) = 2}$

2.3.D) (page 9)

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- $\log(x-5)=0$

2.3.D) (page 9)

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- $\ln(2x - 3) - \ln(x - 4) = 2\ln(5)$

2.3.D) (page 9)

Le reste est à faire à la maison.

2.3.E) (page 9)

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- $\mathrm{e}^{4x-1} = 0$

2.3.E) (page 9)

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- $\mathbf{10^{2x} = 20}$

2.3.E) (page 9)

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- $\mathbf{e^{2x} - e^{2x+1} + 1 = \mathit{e}}$

2.3.E) (page 9)

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- $\mathbf{e^{2x} + e^{x} - 2 = 0}$

2.3.E) (page 9)

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- $\mathbf{9 \times 2^{x} = 4 \times 3^{x}}$

2.3.E) (page 9)

Le reste est à faire à la maison.