Introduction mathématique aux sciences de la vie

Séance d'exercices du 29/09/25

Remédiations

Cette semaine:

1. Mardi 30: séance Q/R pour les PHARMA et BIOMED, sur les matières scientifiques.
2. Mercredi 1: séance thématique sur les prérequis pour les BIOMED.

Correction de la préparation

1.3) A

Enoncé: Un arc de cercle possède un angle au centre de $\mathbf{80^\circ}$ et un rayon de $\mathbf{4,0}$m. Que vaut la longueur de cet arc?

Réponse: Soit vous appliquez la formule vue à la séance précédente, soit vous appliquez une règle de trois.

$\mathbf{360^\circ}$ correspond à une longuer de $\boldsymbol{8\pi}$m. Donc puisque $\mathbf{80 = \dfrac{2}{9} 360}$, la longueur recherchée est

$$\frac{2}{9} 8\pi = \frac{16}{9} \pi \mathrm{m}$$

1.3) B

Enoncé: Un secteur circulaire ayant un angle au centre de 140° a été découpé dans une tôle d'acier. Le rayon de ce secteur est de $75,0$cm. Quelle est la surface de ce secteur?

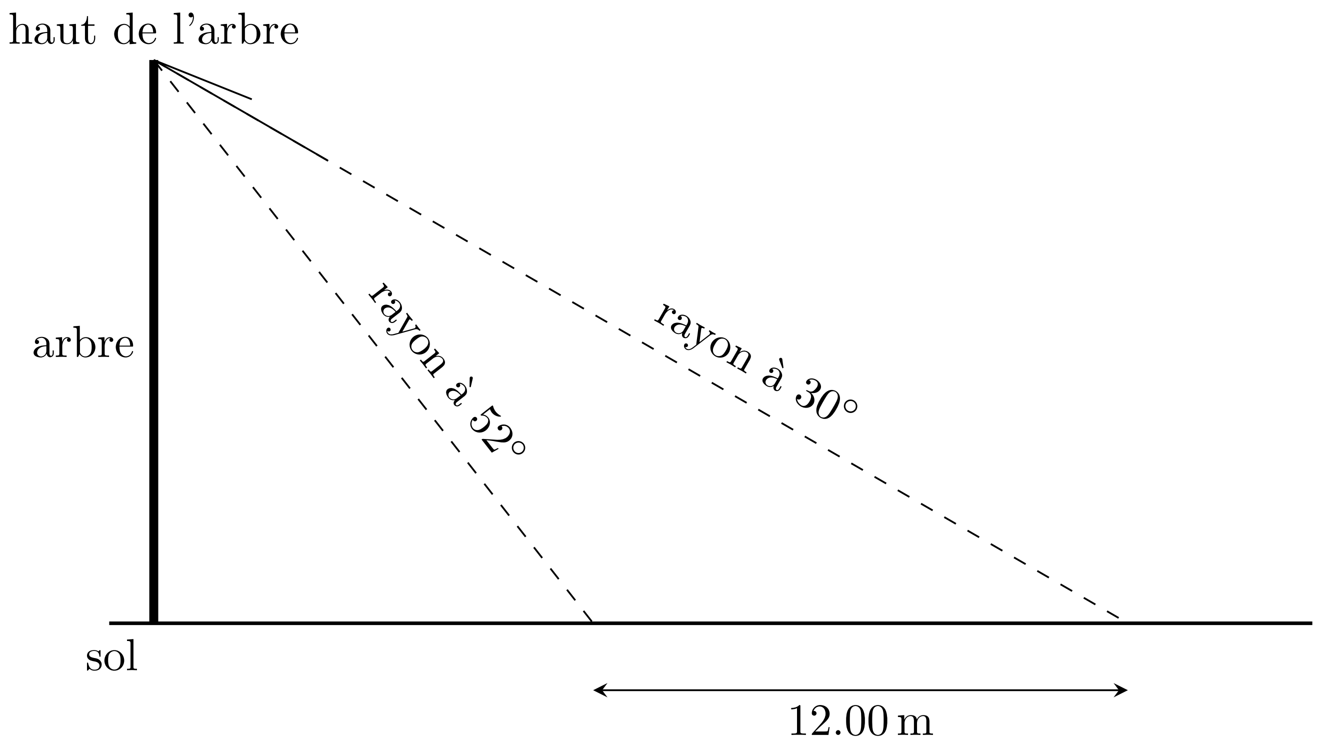
Réponse: Le même raisonnement est d'application ici. La réponse finale est:

$$\frac{7}{18}75^2\pi = \frac{4378}{2}\pi\mathrm{cm}^2$$

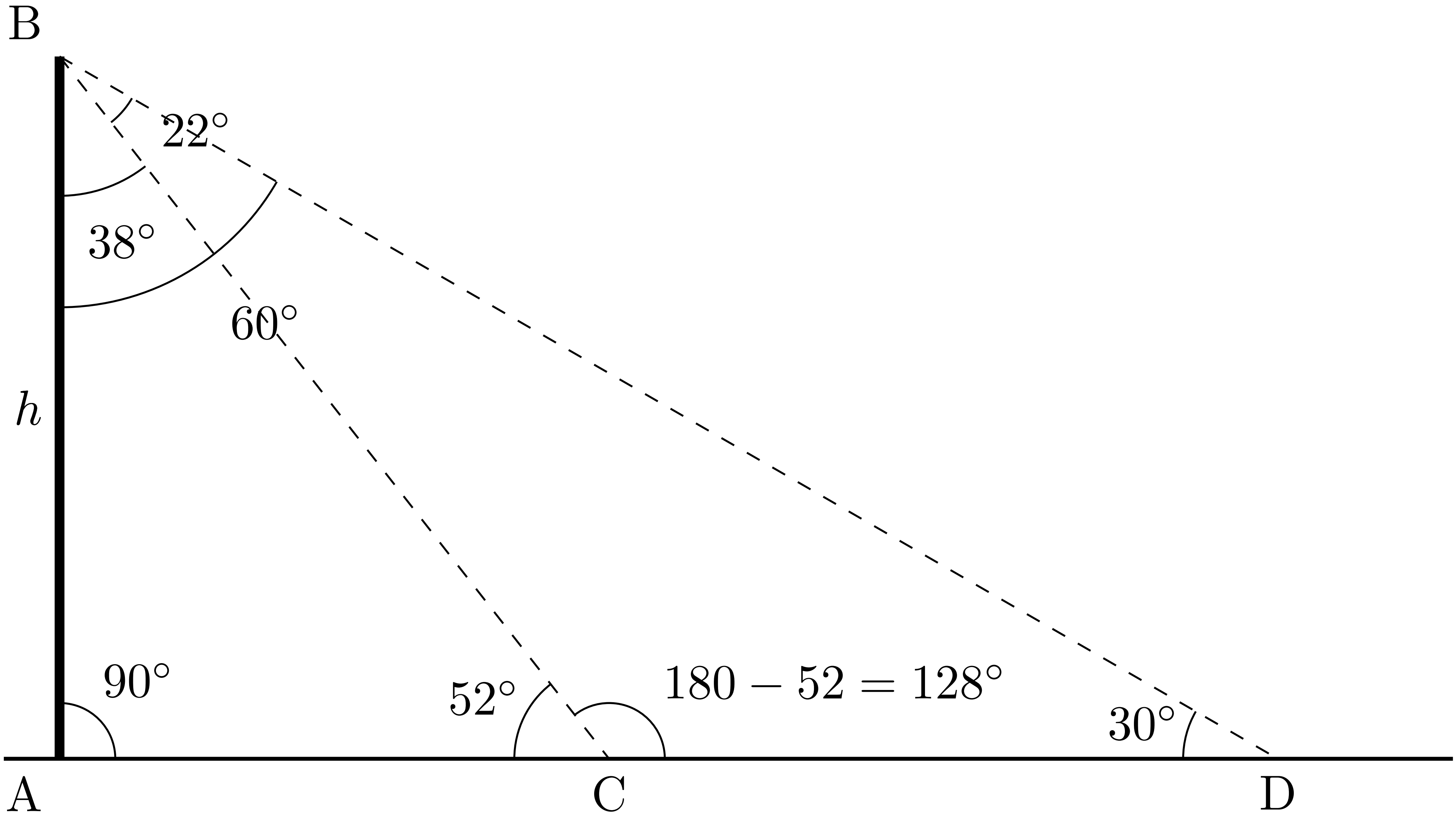
1.4) A

Enoncé: Déterminez la hauteur d'un arbre vertical dont l'ombre sur un sol horizontal s'allonge de $\mathbf{12,00}$m lorsque le soleil passe de $\mathbf{52^\circ}$ à $\mathbf{30^\circ}$ au-dessus de l'horizon.

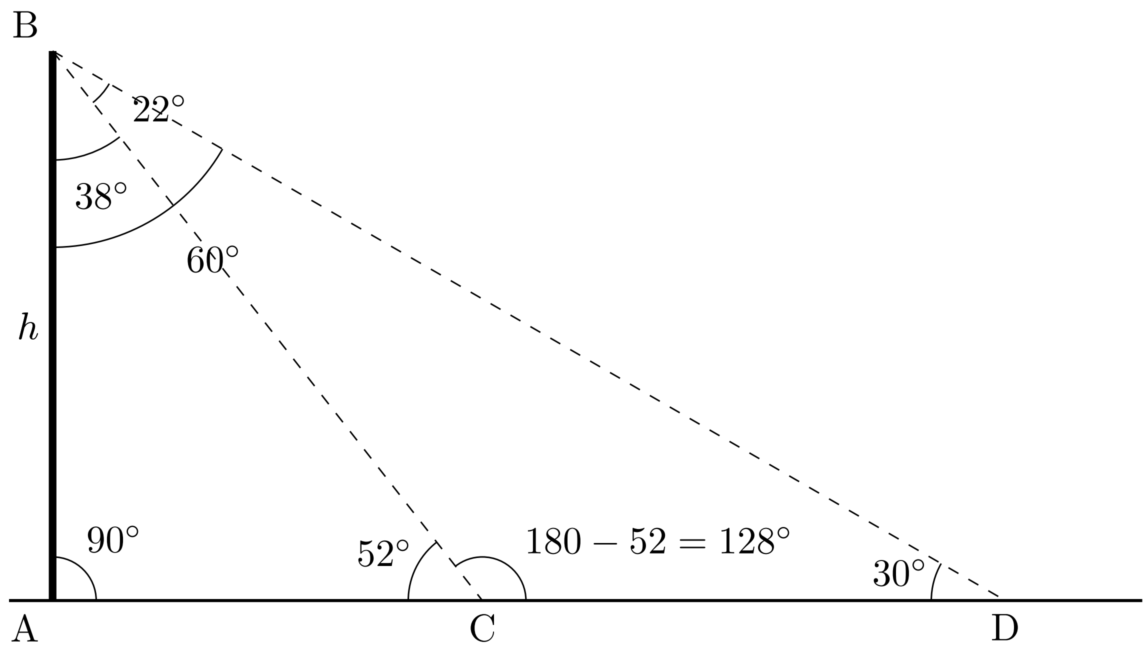
Réponse: On visualise d'abord:



On complète la figure, on nomme



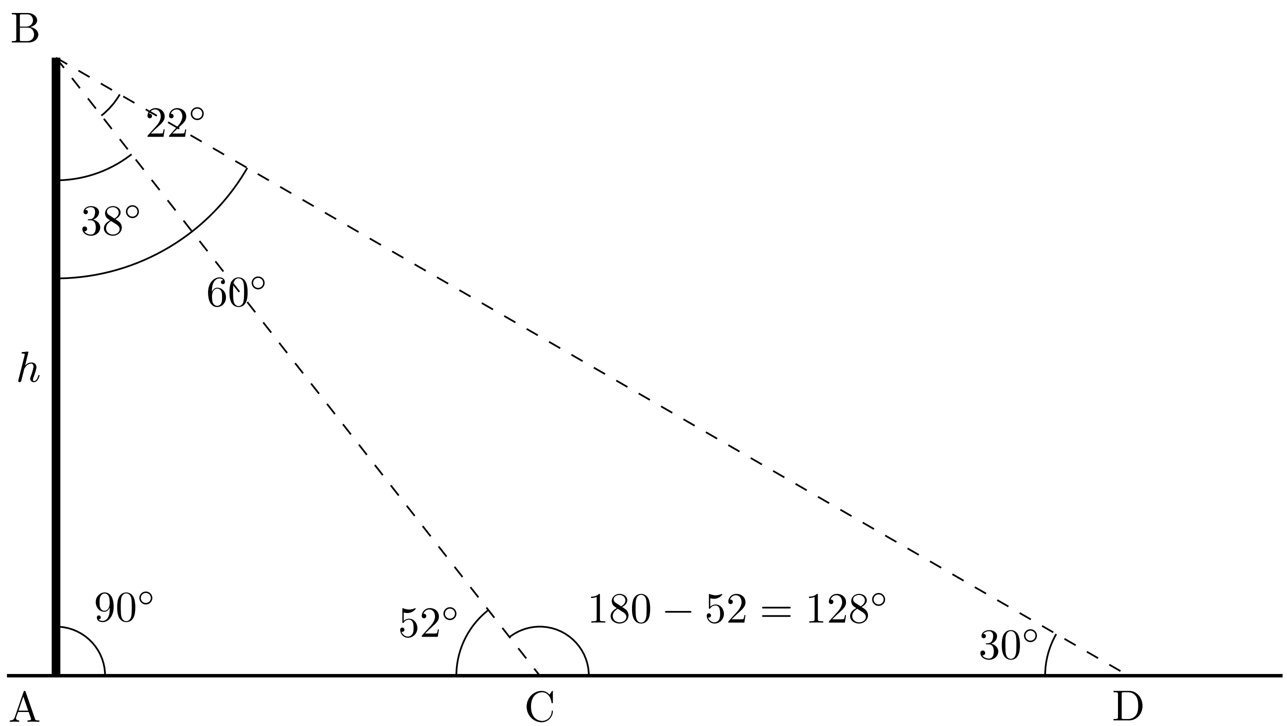
Résolution 1: via la loi des sinus



1. On trouve $[BC]$ avec la loi des sinus:

$$\frac{[BC]}{\sin(30)} = \frac{[CD]}{\sin 22}$$

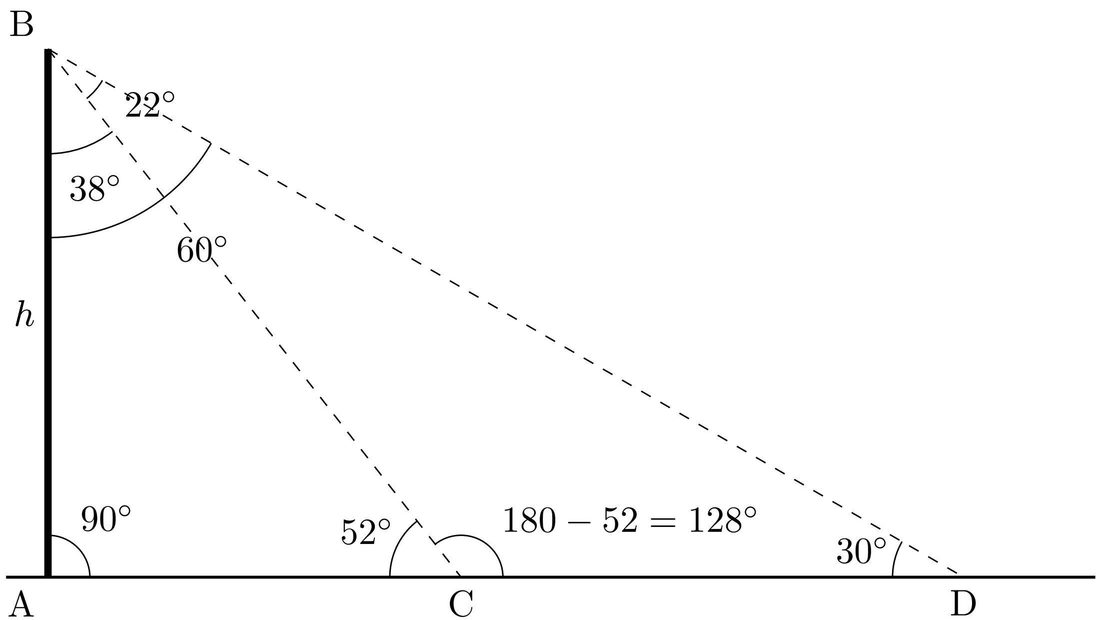
Résolution 1: via la loi des sinus



1. On trouve $\boldsymbol{h}$ avec SOHCAHTOA:

Dans le triangle rectangle $\boldsymbol{ABC}$, $\boldsymbol{\cos(38) = \dfrac{h}{[BC]}}$.

Résolution 2: via SOHCAHTOA



1. Dans ABC, $\tan(38) = \dfrac{[AC]}{h}$. Donc $[AC] = h\tan(38)$
2. Dans ABD, $\tan(60) = \dfrac{[AC]+12}{h}$. Donc $[AC] + 12 = h\tan(60)$

1.5) C 1)

Enoncé: Résous: $2\sin(3x)-\sqrt{2}=0$.

Réponse: $(k\in\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned}
2\sin(3x)-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow & \quad 2\sin(3x)=\sqrt{2}\\
\Leftrightarrow & \quad \sin(3x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow & \quad 3x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } 3x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\\
\Leftrightarrow & \quad x=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3} \text{ ou } 3x=\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}
\end{aligned}$$

Donc $\boldsymbol{S}=\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

2.1 A) 3 Résous: $\frac{3x-5}{2x+1} = 0$.

Réponse:

1. On commence par les conditions d'existence (C.E.): $2x + 1 \neq 0$, ce qui revient à dire $x \neq -1/2$
2. On résout l'équation: une fraction est nulle lorsque son numérateur est nul et son dénominateur non nul. Donc, sous la C.E.:

$$\begin{aligned} \frac{3x-5}{2x+1} = 0 \Leftrightarrow & \qquad 3x - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow & \qquad x = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

2.1 B) 4

Enoncé: Résous: $(4x - 16)(5x + 1) < 0$.

Réponse:

1. On dresse le tableau de signes du membre de gauche:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		4		$+\infty$
$4x - 16$		$-$		$-$	0	$+$	
$5x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Sur base du TDS, on résout l'équation: (on y cherche les —)

2.1 C) 4

Enoncé: Résous: $2x^2 - 7 = 4x$

Réponse:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 7 = 4x \Leftrightarrow \quad & 2x^2 - 7 - 4x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x^2 - 4x - 7 = 0 \end{aligned}$$

On a $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 16 + 56 = 72 = 2 \cdot 36$.

Donc l'équation a deux solutions:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{72}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm 6\sqrt{2}}{4} = 1 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

2.2 A) 2

Enoncé: Résous: $\begin{cases} 3x + 4y = 19 \\ -6x + y = -2 \end{cases}$

Réponse: Ici je propose la résolution par élimination de Gauss (au lieu de la méthode de substitution)

$$\begin{cases} 3x + 4y = 19 \\ -6x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 8y = -38 \\ -6x + y = -2 \end{cases}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 32 = -38 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Donc $S = \{(1, 4)\}$

Les vecteurs

Rappels

Définition Un vecteur est un segment orienté (= une flèche qui relie deux points).

Etant donnés deux points A et B, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur allant de A vers B. Le point A est *l'origine* et le point B est *l'extrémité*

Un vecteur est **nul** s'il est de la forme $\overrightarrow{AA}$.

Caractéristiques d'un vecteur

Un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par:

1. sa direction: celle de la droite AB
2. son sens: de A vers B
3. sa norme: la longueur du segment $[AB]$.

On dira que deux vecteurs non nuls sont **égaux** s'ils ont

1. la même direction: visuellement, ils sont parallèles
2. le même sens: les flèches ont le même sens
3. la même normes: les segments sont de même longueur

Composantes

Etant donnés $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ les composantes de $\overrightarrow{AB}$ sont:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A).$$

1.1 Opérations sur les vecteurs

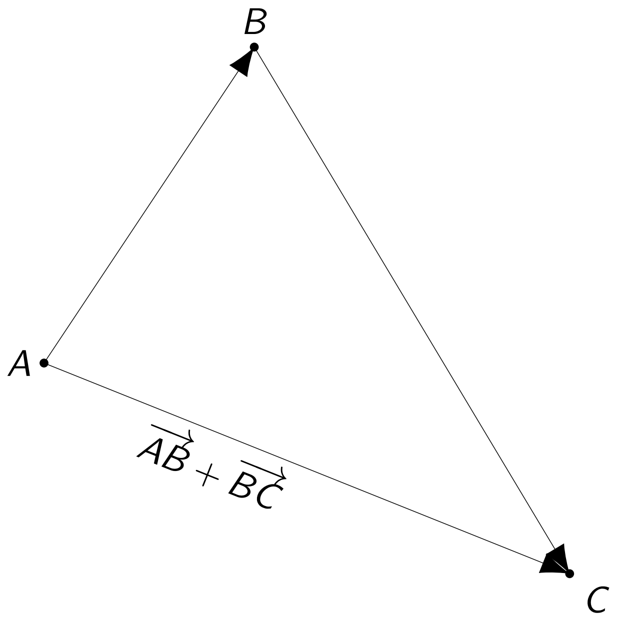
Rappels

La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ et $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ se fait

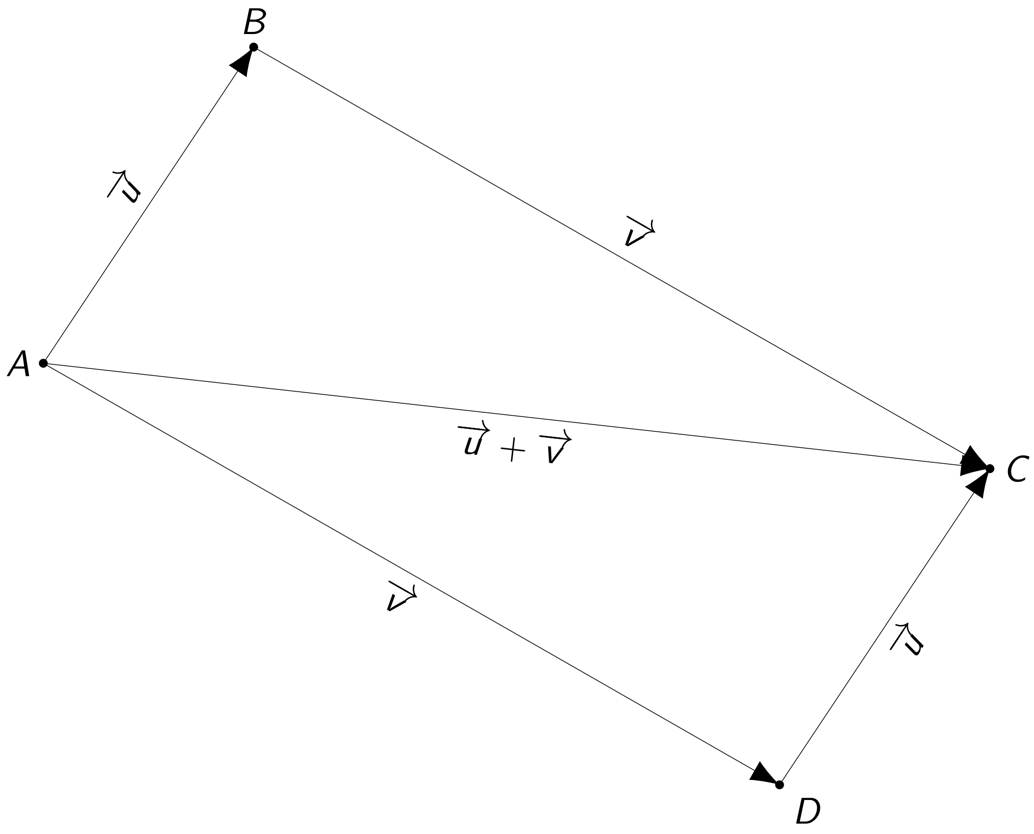
1. analytiquement (avec les composantes): on additionne les composantes entre elles: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

2. géométriquement (visuellement):

Loi de Chasle



Loi du parallélogramme



Multiple

Multiplier un vecteur non nul $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ par un réel non nul a revient à construire un vecteur $a\overrightarrow{u}$ dont les caractéristiques sont les suivantes:

1. direction: la même que $\overrightarrow{u}$
2. sens: le même que $\overrightarrow{u}$ si $a > 0$ et l'opposé si $a < 0$
3. norme: $|a|||\overrightarrow{u}||$.

De plus, $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $a\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Analytiquement $a\overrightarrow{u} = (au_1, au_2)$

Exercice A)

Construisez un représentant de la somme des vecteurs ($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$) dessinés sur les quadrillages donnés.

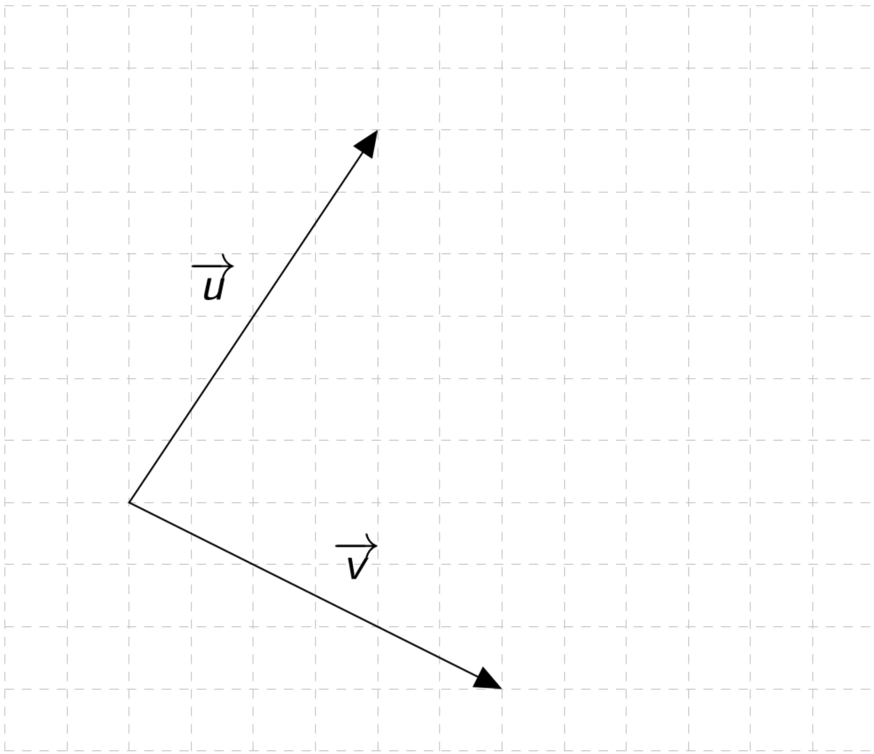


Figure 1

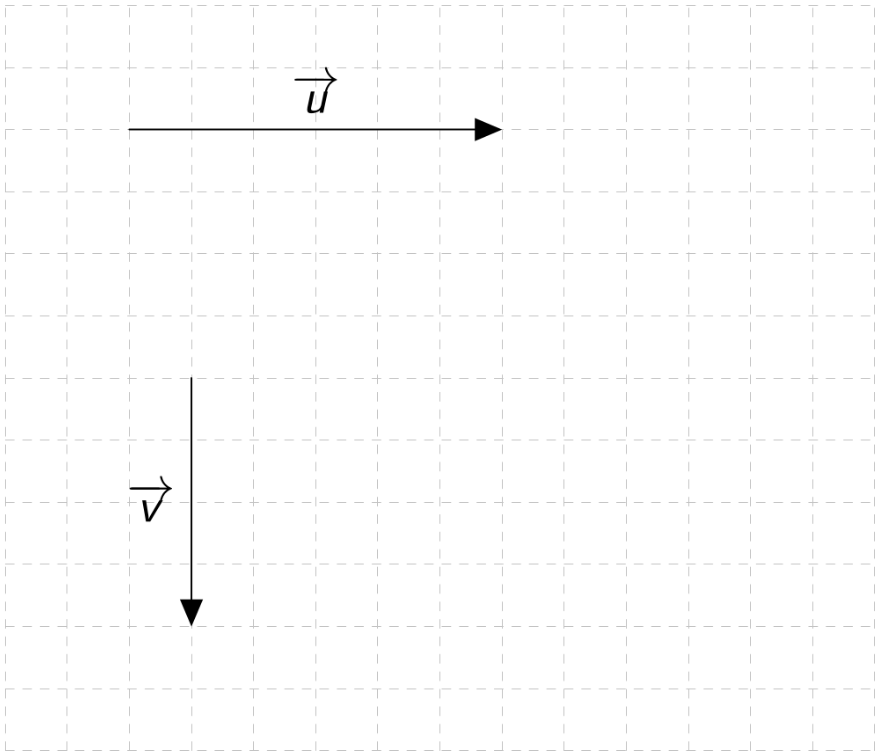


Figure 2

Exercice A)

Construisez un représentant de la somme des vecteurs ($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$) dessinés sur les quadrillages donnés.

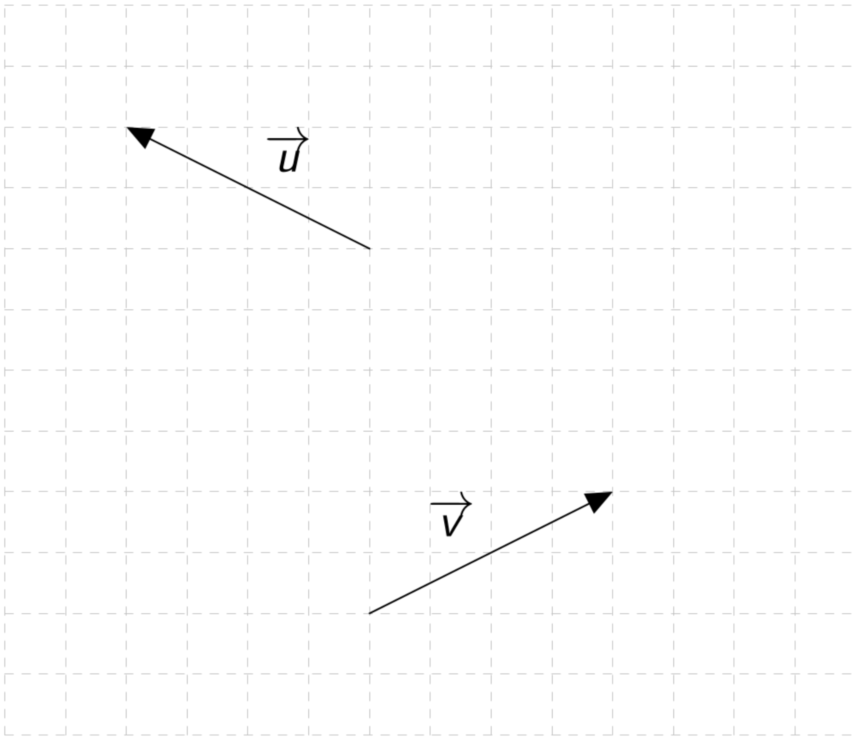


FIGURE 3

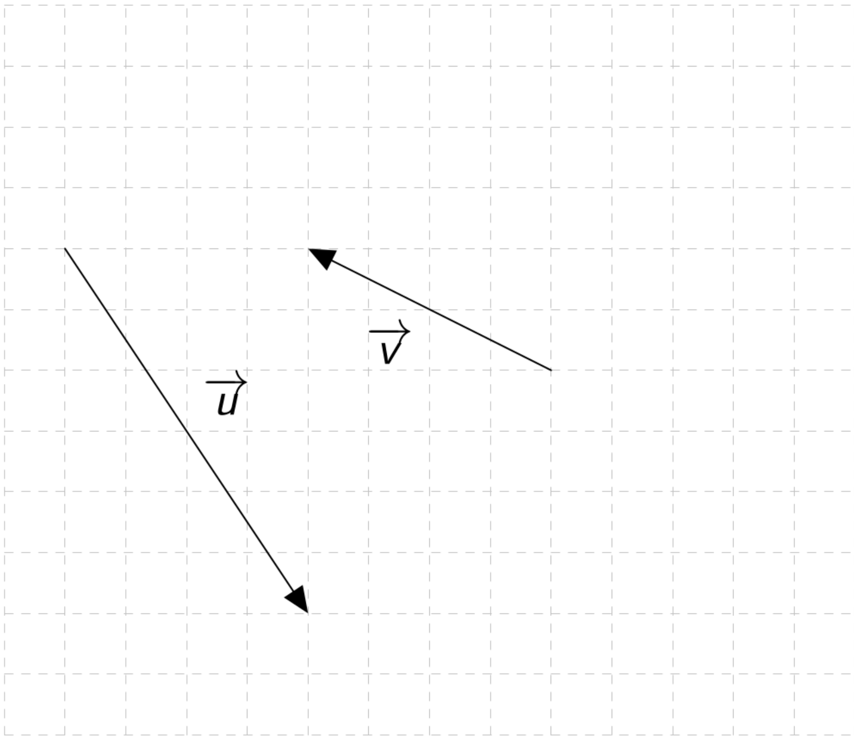


FIGURE 4

Exercice A)

Construisez un représentant de la somme des vecteurs ($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$) dessinés sur les quadrillages donnés.

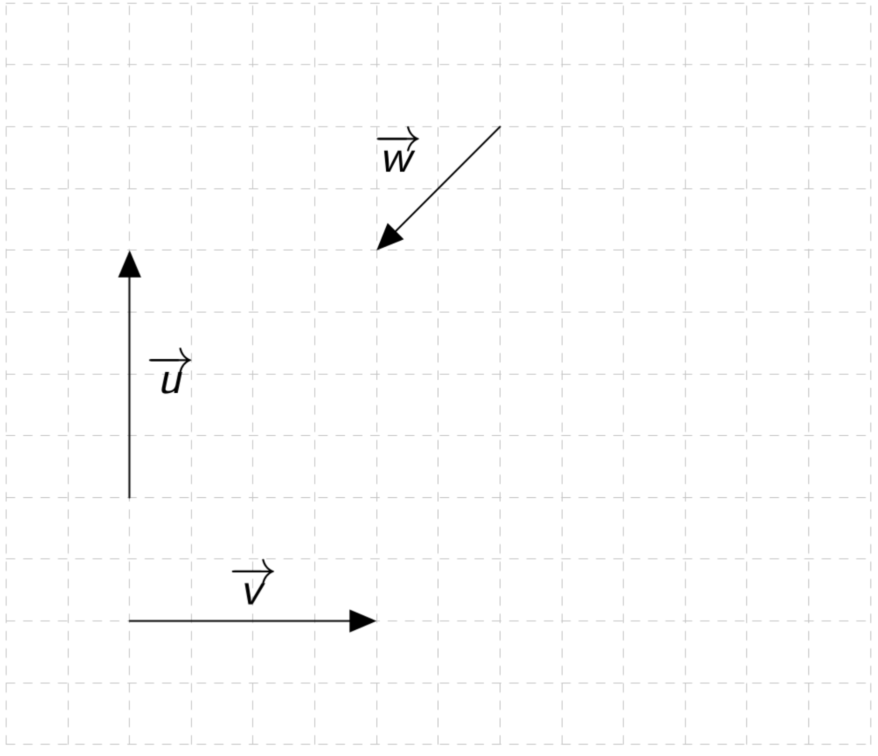


Figure 5

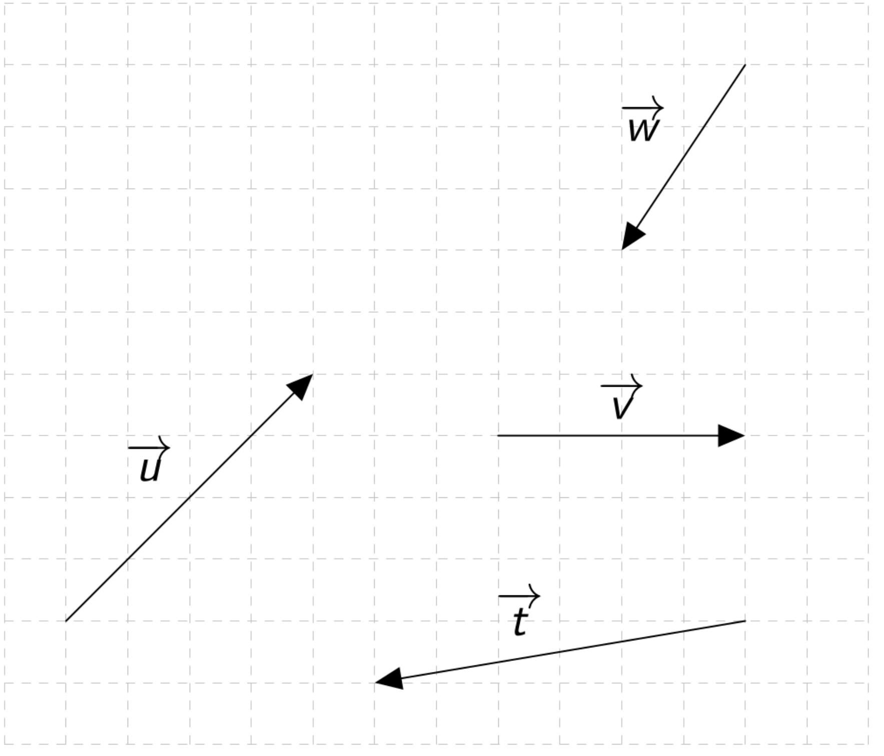


Figure 6

Exercice B)

Soient A, B et C trois points du plan muni d'un repère orthonormé.

Déterminez les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ ainsi que leurs normes si

- $A = (2; 1)$, $B = (5; 3)$ et $C = (1; 4)$

Exercice B)

Soient A, B et C trois points du plan muni d'un repère orthonormé.

Déterminez les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ ainsi que leurs normes si

- $A = (2; 0; 1)$, $B = (-1; 5; 3)$ et $C = (7; 1; 4)$

Exercice C)

Simplifiez les expressions suivantes au maximum (les lettres représentent des points du plan ou de l'espace) :

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

Exercice D)

Considérons $A = (-2; 1)$, $B = (5; 2)$, $C = (4; 2)$, $D = (-3; -1)$ et $E = (0; 2)$. Déterminez les composantes des vecteurs suivants :

- $2\overrightarrow{AB}$
- $2\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{AB}$
- $3\overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Exercice E)

Considérons le plan muni d'un repère. Calculez les composantes de $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ et $\boldsymbol{a}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ lorsque

- $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{3}; \mathbf{0}; \mathbf{2})$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{2}; \mathbf{1}; \mathbf{4})$ et $\boldsymbol{a} = -\mathbf{3}$

Exercice F)

Considérons le plan ou l'espace muni d'un repère. Déterminez le milieu des segments $[AB]$ si

- $A = (-1; 1)$ et $B = (2; 3)$

1.2 Produits scalaire et vectoriel

Rappels

Soit $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ deux vecteurs:

Exercice A)

Soient $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace muni d'un repère orthonormé où $\boldsymbol{\theta}$ est l'angle entre $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Calculez $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ si

- $||\overrightarrow{\boldsymbol{u}}|| = \mathbf{3}$, $||\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|| = \mathbf{5}$ et $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{60}^{\circ}$

Exercice A)

Soient $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace muni d'un repère orthonormé où $\boldsymbol{\theta}$ est l'angle entre $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Calculez $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ si

- $\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\| = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$, $\|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\| = \mathbf{3}$ et $\boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$

Exercice B)

Travail à domicile: calculez les composantes puis appliquez les formules.

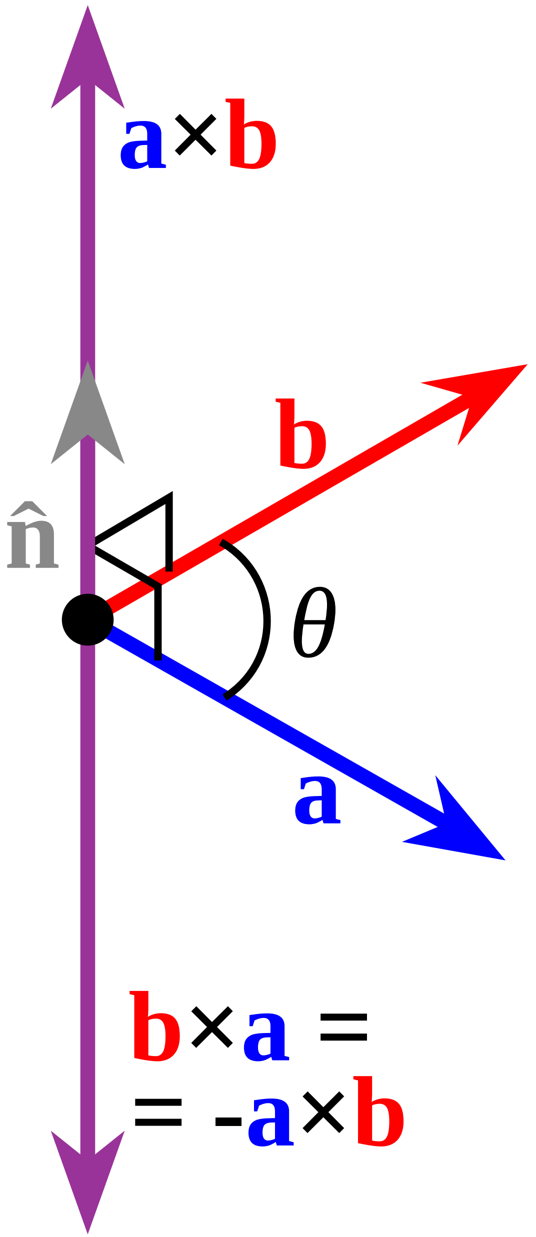
Rappel: produit vectoriel

Soit $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ a les composantes suivantes:

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Ce vecteur est perpendiculaire à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et est de norme $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin(\theta)$. Son sens est donné par la règle de la main droite.

Rappel: produit vectoriel



Exercice C)

Soient $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé où $\boldsymbol{\theta}$ est l'angle entre $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Déterminez la norme de $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et de $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$, leur produit scalaire, leur produit vectoriel et l'amplitude de $\boldsymbol{\theta}$ si

- $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \mathbf{(2;1;1)}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \mathbf{(1;2;1)}$

Exercice C)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé où θ est l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Déterminez la norme de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$, leur produit scalaire, leur produit vectoriel et l'amplitude de θ si

- $\overrightarrow{u} = (2; -1; 2)$ et $\overrightarrow{v} = (-3; 7; 1)$

Exercice D)

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ tels que $\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\| = \mathbf{5}$, $\|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\| = \mathbf{2}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \mathbf{10}$. Montrez que la norme du vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{w_1}} = \mathbf{2}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ est égale à $\mathbf{16}$ et que celle du $\overrightarrow{\boldsymbol{w_2}} = \mathbf{2}\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ est égale à $\mathbf{4}$

Exercice D)

Exercice E)

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ tels que $\|\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\| = \mathbf{1}$, $\|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\| = \mathbf{3}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = -\mathbf{2}$. Montrez que la norme du vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{w_1}} = \mathbf{2}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} + \mathbf{3}\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ est égale à $\sqrt{\mathbf{61}}$ et que celle du $\overrightarrow{\boldsymbol{w_2}} = \mathbf{2}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u}} - \mathbf{3}\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ est égale à $\sqrt{\mathbf{109}}$.

Exercice E)

Exercice F)

Exercice supplémentaire

Exercice G)

Soient $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé. Calculez, via les composantes, $(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$. Qu'en conclure sur le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ par rapport aux vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$?

1.3 Décomposition

Exercice A)

Décomposez graphiquement le vecteur $\overrightarrow{v}$ représenté dans les figures suivantes.

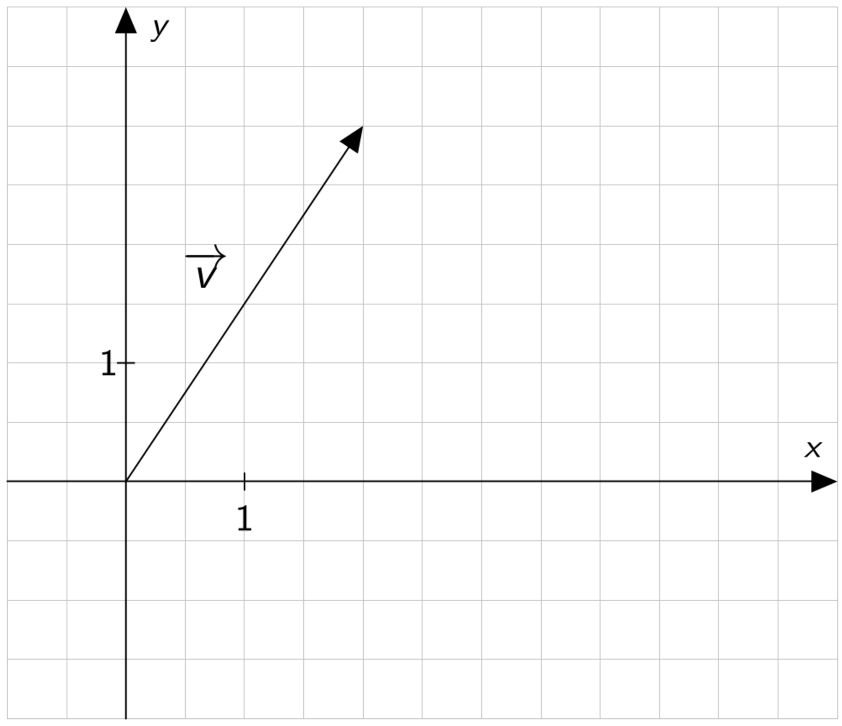


FIGURE 7

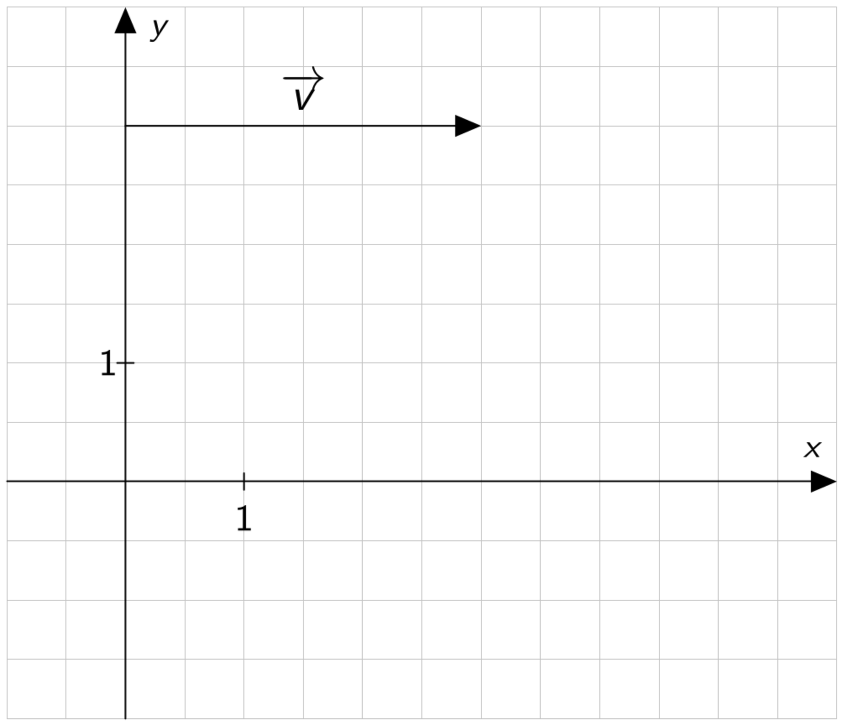


FIGURE 8

Exercice A)

Décomposez graphiquement le vecteur $\overrightarrow{v}$ représenté dans les figures suivantes.

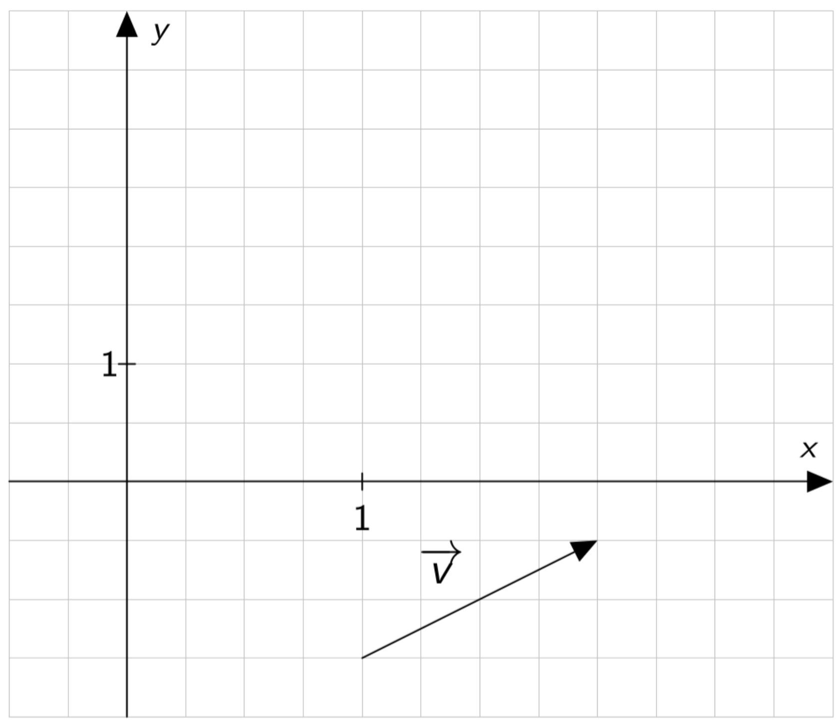


FIGURE 9

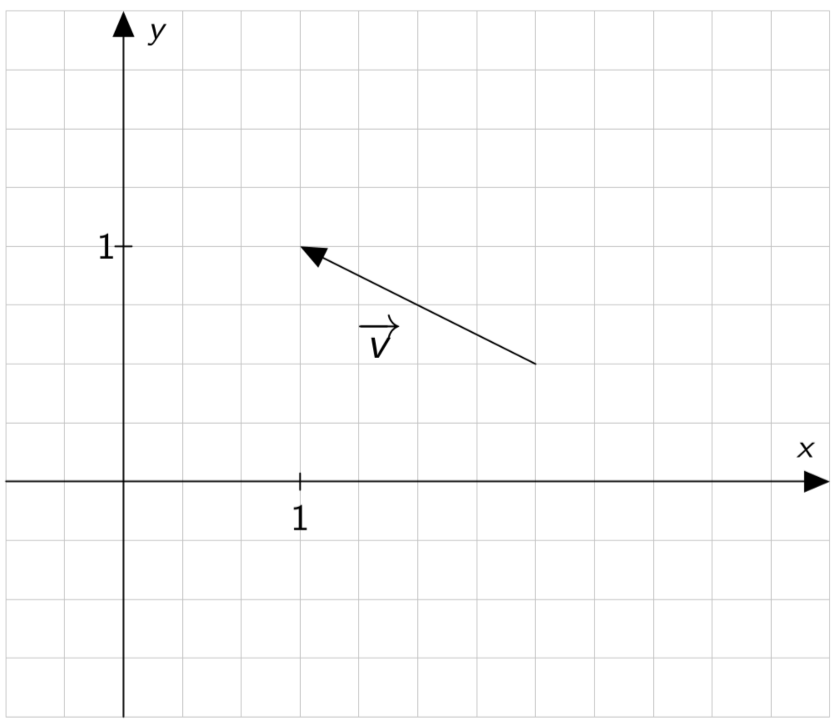


FIGURE 10

Exercice A)

Décomposez graphiquement le vecteur $\overrightarrow{v}$ représenté dans les figures suivantes.

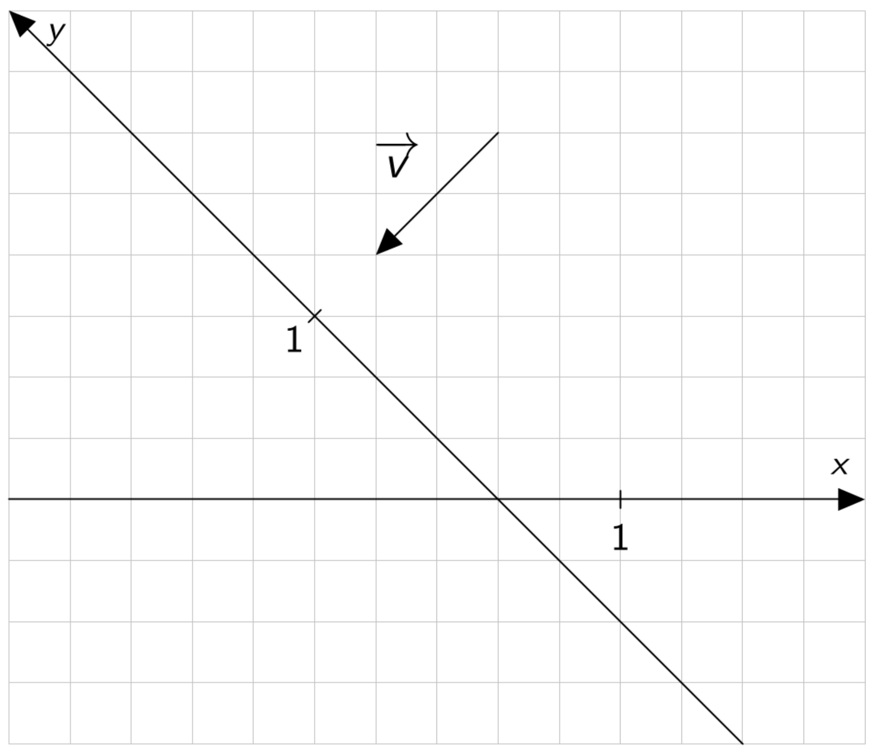


Figure 11

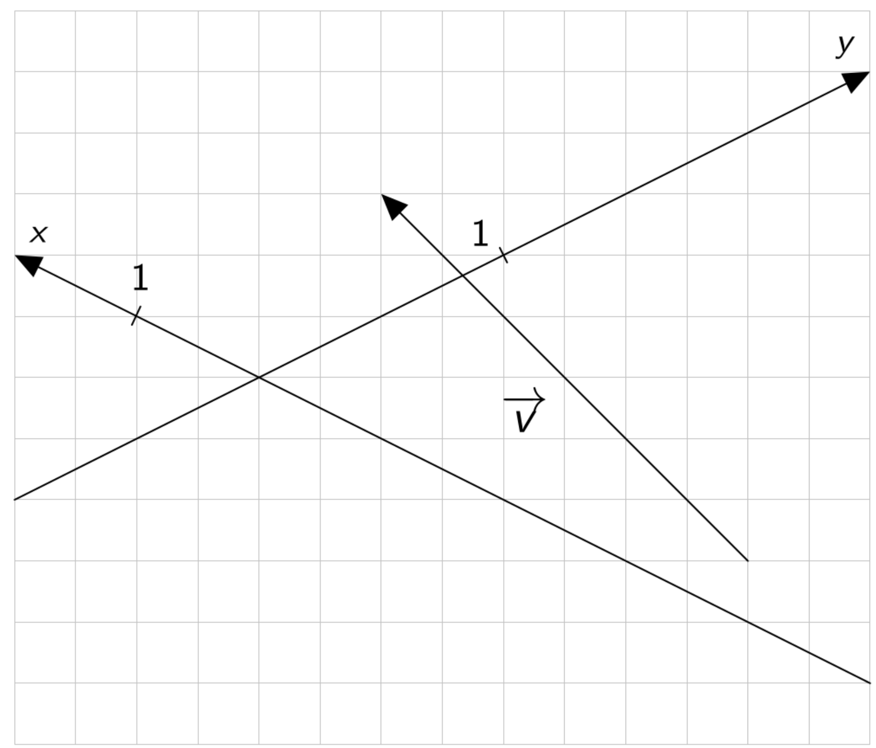


Figure 12

Exercice A)

Décomposez graphiquement le vecteur $\overrightarrow{v}$ représenté dans les figures suivantes.

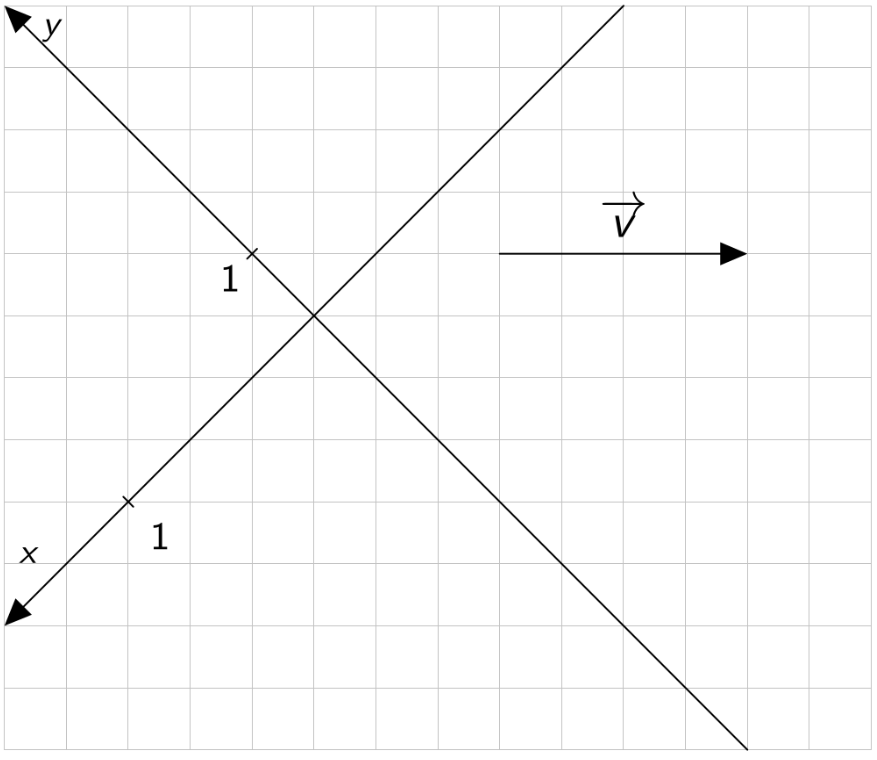


FIGURE 13

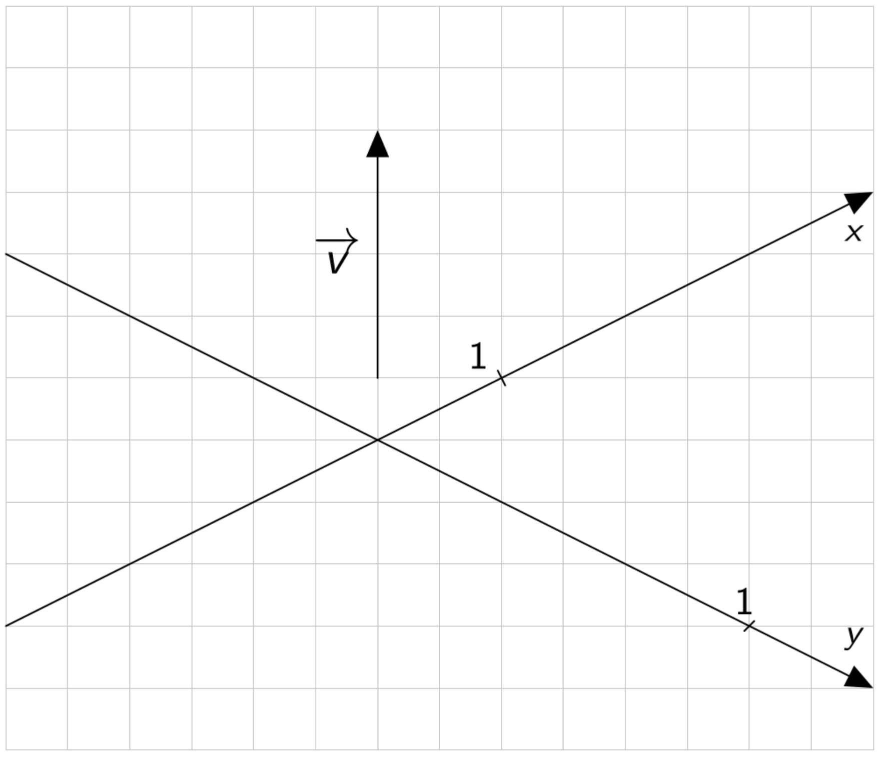


FIGURE 14

Exercice C)

On donne les vecteurs suivants $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{73\ 123\ 416; 146\ 246\ 832})$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{-79\ 035\ 264; 39\ 517\ 632})$, deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé. utiliser de calculatrice, démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ sont orthogonaux.