

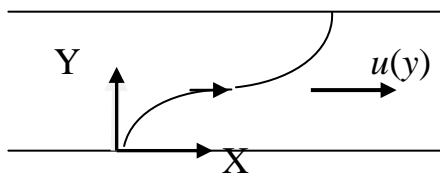
### ДЗ-1. Задачи для самостоятельного решения.

#### Механика. Кинематика: законы движения, уравнения траекторий и кинематических связей

##### Задача 1.

Катер пересекает речку, двигаясь перпендикулярно течению со скоростью  $v_k$ , постоянной относительно воды. Ширина реки  $a$ . Величина скорости течения реки  $u$  нарастает от берега к середине реки в соответствии с параболическим законом, изменяясь от 0 до  $u_{\max}$ . Записать уравнение траектории катера, время его движения  $\tau$  и величину сноса катера  $d$  вниз по течению от места старта до места остановки на противоположном берегу реки.

**Примечание:** выбрать декартову систему координат, жестко связанную с берегом реки и с точкой старта катера с берега (см. Рис). Катер считать материальной точкой, а берега реки параллельными.



##### Ответ:

Получив законы движения в координатной форме  $x(t)$  и  $y(t)$  и исключая из них время, находим уравнение траектории

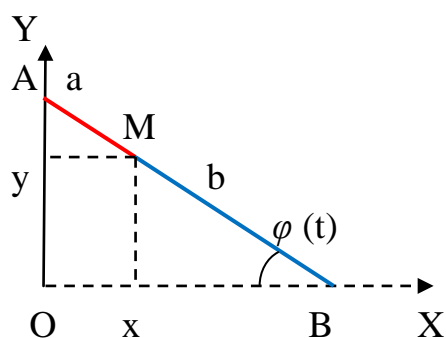
$$x(y) = \frac{4u}{3v_k a^2} \left( -y^3 + \frac{3}{2} y^2 a \right).$$

Время движения  $\tau$  катера равно:  $y(t = \tau) = a$ , следовательно  $\tau = \frac{a}{v_k}$ .

Для сноса катера имеем:  $d = x(\tau) = \frac{2u}{3v_k} a$ .

##### Задача 2.

Рассматривается твёрдый стержень АВ, концы которого могут свободно скользить по сторонам прямого угла АОВ (см. Рис.). Записать уравнение траектории произвольной точки М стержня АВ, которая делит его длину на части  $a$  и  $b$ .



**Ответ:**

Искомое уравнение траектории имеет вид:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Это уравнение эллипса с полуосями, совпадающими по направлению с осями выбранной системы координат и равными  $a$  и  $b$ . В случае, когда  $a = b$ , эллипс, очевидно, вырождается в окружность.

**Задача 3.**

Пусть материальная точка в полярной системе координат движется в соответствии с уравнением траектории вида  $r(\varphi) = 2a(1 + \cos(\varphi))$ , причём полярный угол  $\varphi$  меняется со временем линейно, т.е.  $\varphi(t) = bt$ . Константы  $a$  и  $b$  положительны. Выяснить, как зависят от времени модуль скорости и модуль ускорения материальной точки.

**Ответ:**

Искомые модули скорости и ускорения материальной точки равны:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = 2ab\sqrt{2 + 2\cos(bt)}, \quad a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = 2ab^2\sqrt{5 + 4\cos(bt)}.$$

**Замечание:** материальная точка в момент времени  $t_k = \frac{\pi}{b}(2k + 1)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Находится в начале (полюсе) полярной системы координат, имеет нулевую скорость, а ускорение, по модулю равное  $a(t_k) = 2ab^2$ , направлено противоположно полярной оси.

#### **\*Задача 4.**

Как известно, Марс движется вокруг Солнца по эллиптической орбите в соответствии с законом Кеплера:  $p = r(1 - \varepsilon \cos(\varphi))$ , где параметр эллипса  $p$ , эксцентриситет  $\varepsilon$  и секторальная скорость  $\sigma = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$  считаются постоянными (заданными) величинами. Вычислить проекции ускорения Марса в зависимости от полярных координат  $r$  и  $\varphi$ .

**Примечание:** Марс и Солнце считаются материальными точками. Солнце находится в одном из фокусов эллипса. Полярная система координат вводится в плоскости движения Марса и её полюс совпадает с Солнцем. Полярная ось направлена вдоль одной из осей эллипса (вдоль оси X).

**Ещё:** согласно второму закону Кеплера секторальная скорость  $\sigma$  планеты равна скорости изменения площади, описываемой радиус-вектором материальной точки, представляющей планету. Эта скорость считается величиной постоянной.

При решении данной задачи использовать материал задач, разобранных в классе в полярной системе координат.

**Ответ:**

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -4\sigma^2 \frac{r-p}{r^3 p} - r \frac{4\sigma^2}{r^4} = -4 \frac{\sigma^2}{r^2 p}.$$

Таким образом, ускорение планеты, движущейся по эллиптической траектории, направлено к Солнцу, не зависит от полярного угла  $\varphi$  и обратно пропорционально квадрату расстояния до Солнца. Ещё раз

$$a_r = -4 \frac{\sigma^2}{r^2 p}, \quad a_\varphi = 0.$$

#### **\*Задача 5.**

Автомобиль движется со скоростью  $v_1$  в горизонтальном направлении (вдоль оси X). Затем он начинает тормозить с ускорением  $a$ . Определить траекторию капель дождя на боковом стекле автомобиля, если известно, что капли дождя падают на землю вертикально вниз, скорость их относительно земли постоянна и равна  $v_2$ .

**Примечание:** Рекомендуется выбрать систему координат XY, связанную с Землёй так, чтобы ось X была направлена горизонтально вдоль ускорения трамвая, а ось Y – вертикально вниз. Также необходимо выбрать вторую систему координат X'Y', связанную со стеклом трамвая так, чтобы её оси X' и Y' были сонаправлены с осями X и Y. Время в обеих системах отсчитывается от момента начала торможения трамвая.

**Ответ:**

Как обычно, уравнение траектории находится из закона движения капель в координатной форме путём исключения времени  $t$ :

$$x' = v_1 \frac{y'}{v_2} - a \frac{y'^2}{2v_2^2}.$$

Видно, что траектория в системе координат  $X'Y'$ , связанной со стеклом трамвая, является параболой с вершиной в точке с координатами:

$$x' = \frac{v_1^2}{2a}, \quad y' = \frac{v_1 v_2}{a}.$$