

---

## Rapport du Projet

*Mécanique quantique et topologie : modèle SSH*

---

Qimeng SUN

08 Janvier, 2023

# Contents

1	Introduction	1
2	Modèle SSH et la bande d'énergie	1
3	Le nombre d'enroulement	7
4	La relation entre l'énergie des états dans le gap et la taille du système	12
5	Conclusion	14

# 1 Introduction

La topologie est une branche des mathématiques qui se concentre sur les propriétés des figures géométriques ou des espaces qui restent inchangés après des changements successifs de forme. La topologie décrit les propriétés qui restent inchangées lorsqu'un objet est étiré, tordu ou déformé dans des conditions qui ne sont pas déchirées. Le prix Nobel 2016 a été attribué aux physiciens D. Haldane, D. Thouless et M. Kosterlitz pour leurs travaux pionniers sur la phase topologique de la matière. On s'est rendu compte que la topologie joue un rôle important dans de nombreux problèmes de physique. Un nombre croissant de physiciens appliquent le concept de topologie à la physique. Pour illustrer les concepts introduits par ces chercheurs, le modèle SSH (pour Su-Schrieffer-Heeger) est probablement l'un des modèles quantiques les plus simples pour présenter des effets topologiques. Et c'est le but de ce projet

En physique de la matière condensée, le modèle de Su-Schrieffer-Heeger (SSH) est un modèle de réseau unidimensionnel qui présente des caractéristiques topologiques. Elle a été conçue par Wu-Pei Su, John Robert Schrieffer et Alan J. Heeger en 1979 et se base sur la présence de défauts de soliton pour décrire l'augmentation de la conductivité des chaînes de polymères polyacétyléniques après dopage. Il s'agit d'une méthode de mécanique quantique à liaison forte qui décrit le saut d'électrons sans spin dans des chaînes comportant deux liaisons alternées. Les électrons d'un site donné ne peuvent que sauter vers les sites voisins. C'est la forme de chaîne unidimensionnelle d'un atome  $2L$  avec des liaisons simples et doubles alternées.

Dans ce projet, nous allons tracer les spectres du modèle SSH en chaînes ouvertes et fermées et étudier les phases de ces spectres. Nous allons nous concentrer sur l'un des états en particulier et analyser les raisons de cet état particulier. Par la suite, nous continuerons à étudier le nombre d'enroulements dans cet état, ainsi que la protection topologique. Enfin, nous étudierons la relation entre l'énergie des états dans le gap et la taille du système. Cela implique beaucoup de calculs et de tracés, que nous ferons en écrivant du programme python.

## 2 Modèle SSH et la bande d'énergie

Le modèle SSH a initialement été introduit afin de décrire le transport de charge dans un polymère, le polyacétylène. Mais il peut maintenant être considéré comme une manifestation concrète de l'effet topologique. Celui-ci se présente sous la forme d'une chaîne unidimensionnelle de  $2L$  atomes avec une alternance de simples et doubles liaisons entre atomes de carbone adjacents. Il s'agit d'une approche de liaison forte en mécanique quantique.

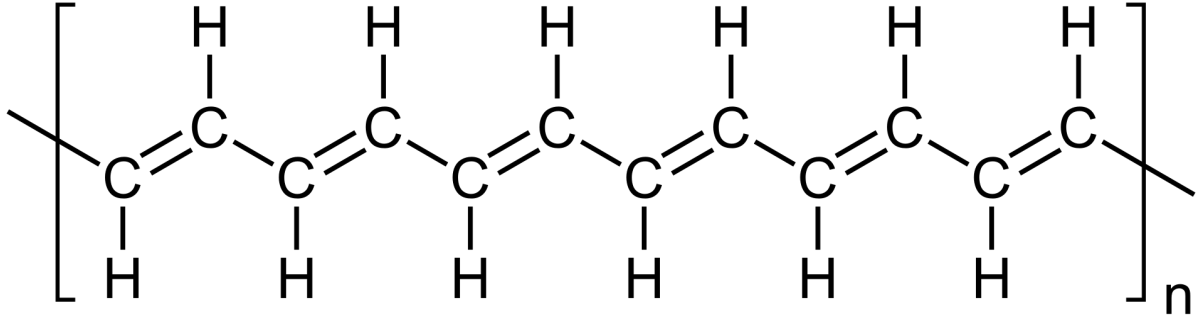


Figure 1: Structure du polyacétylène

L'état quantique d'un électron est décrit par un vecteur

$$\Psi = \begin{cases} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \\ \psi_{2L-1} \\ \psi_{2L} \end{cases}$$

aussi appelé fonction d'onde, où  $|\Psi_j|^2$  désigne la probabilité pour l'électron d'être situé sur l'atome (le site) indice par  $j$ , d'où la normalisation  $\sum_{j=1}^{2L} |\Psi_j|^2 = 1$ .

Les différents états quantiques du système sont les vecteurs propres de l'équation de Schrödinger

$$H_\psi = \epsilon \psi \quad (1)$$

caractérisées par les énergies propres  $\epsilon$ . On la modélise en décrivant le mouvement d'un électron sur cette chaîne, avec une ligne de sites A et B alternés, la particule pouvant sauter d'un site aux deux sites voisins avec des coefficients tunnel  $t_1$  et  $t_2$  (Figure 2).

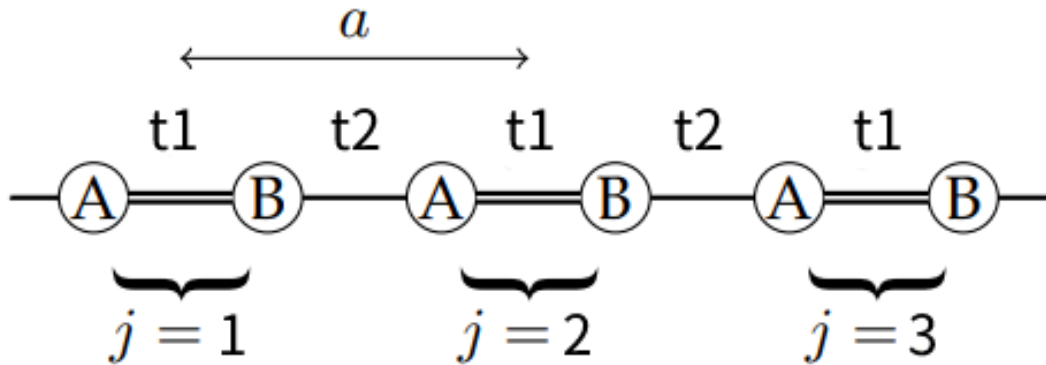


Figure 2: Modélisation dans le cadre d'un modèle de liaisons fortes.

Nous étudions la dynamique autour de l'état fondamental du modèle SSH à température nulle et potentiel chimique nul. Donc on suppose que les deux sites A et B ont la même énergie nulle. L'hamiltonien d'un électron sur la chaîne s'écrit donc :

$$\hat{H} = t1 \sum_L^{j=1} (|j, B\rangle \langle j, A| + h.c.) + t2 \sum_{L-1}^{j=1} (|j+1, A\rangle \langle j, B| + h.c.) \quad (2)$$

où h.c. désigne l'opérateur adjoint. La matrice hermitienne H, de taille  $2L \times 2L$ , a pour éléments non-nuls

$$H_{2j+1,2j+2} = H_{2j+2,2j+1} = t1 \quad j = 0, \dots, L-1 \quad (3)$$

$$H_{2j,2j+1} = H_{2j+1,2j} = t2 \quad j = 1, \dots, L-1. \quad (4)$$

Pour une chaîne composée de  $L = 4$  cellules unitaires, la matrice de l'hamiltonien s'écrit

$$H = \begin{pmatrix} 0 & t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_1 & 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 \end{pmatrix}$$

avec  $t1$  (resp.  $t2$ ) désigne l'amplitude quantique de saut de l'électron le long d'une liaison double (resp. simple).

Nous pouvons tout d'abord considérer le cas d'une chaîne fermée sur elle-même, c'est-à-dire qu'il est en forme de cercle (figure 3). Dans ce cas, on ajoute dans la matrice hermitienne H les termes non-nuls  $H_{2L,1} = H_{1,2L} = t_2$ , et calcule son spectre en méthode informatique. Le programme de calcul du spectre de la chaîne fermée s'appelle *chaîne-ferme.py*.

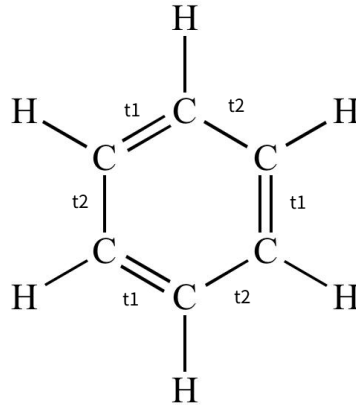


Figure 3: Une chaîne fermée avec 6 sites, dont 3 cellules élémentaires

Pour une chaîne composée de  $L = 4$  cellules unitaires, la matrice de l'hamiltonien s'écrit

$$H = \begin{pmatrix} 0 & t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ t_1 & 0 & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_1 & 0 & t_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & 0 & t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & 0 & t_1 \\ t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 \end{pmatrix}$$

Afin de simplifier l'initialisation de la matrice de l'hamiltonien, nous divisons tous les éléments de la matrice par  $t_2$ . De cette façon, nous pouvons affecter un seul paramètre — le rapport  $t_1/t_2$ . Et pour calculer les valeurs propres de la matrice de l'hamiltonien, nous pouvons utiliser la fonction *linalg.eigvals* de librairie *numpy*. Cette fonction va nous donner les valeurs propres en forme tableaux, donc on peut sauvegarder toutes les valeurs propres correspondant au rapport  $t_1/t_2$  de 0 à 5 dans une matrice. Puis nous traçons le spectre de la chaîne fermée en utilisant la fonction *scatter* de librairie *matplotlib.pyplot*. Cette fonction est utilisée pour dessiner un graphique en nuage de points. Il convient donc pour dessiner le spectre comme le nôtre, où une coordonnée horizontale correspond à plusieurs coordonnées verticales. Il est intéressant de noter que le spectre obtenu est l'énergie propre par rapport  $t_2$  en fonction du rapport  $t_1/t_2$ .

Nous traçons également le spectre de la chaîne ouvert, c'est-à-dire avec  $H_{2L,1} = H_{1,2L} = 0$ . Le programme de calcul du spectre de la chaîne ouverte s'appelle *chaine-ouverte.py*.

Les spectres obtenus sont ci-dessous (figure 4 et figure 5).

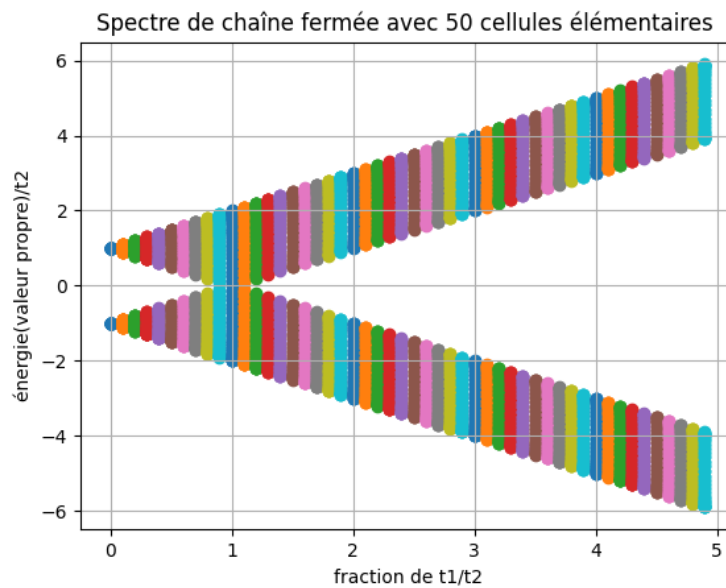


Figure 4: Spectre de chaîne fermée avec 50 cellules élémentaires

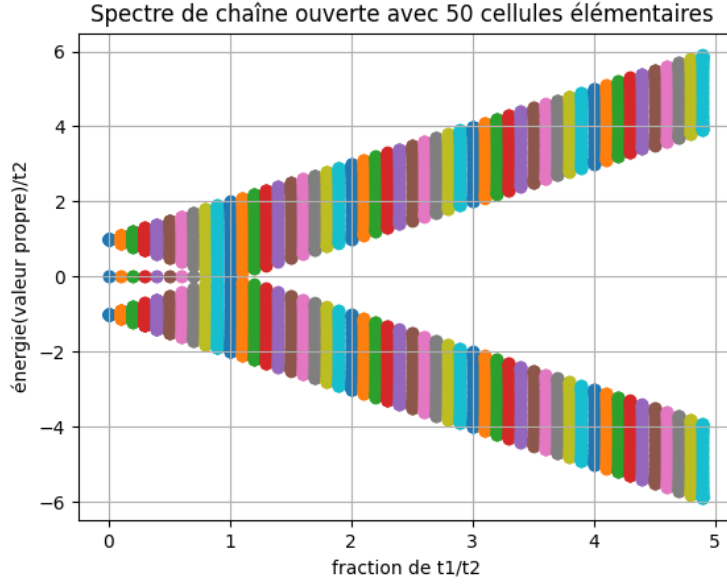


Figure 5: Spectre de chaîne ouverte avec 50 cellules élémentaires

D'après les deux figures, nous observons qu'il existe deux bandes avec une symétrie autour de l'énergie nulle dans le spectre de la chaîne fermée. Les deux bandes disjointes sauf pour  $t_1 = t_2$ . La bande ayant la gamme la plus élevée d'énergies électroniques est appelée bande de valence. La bande ayant la plage la plus basse d'états électroniques vacants est appelée bande de conduction. L'écart entre la bande de valence et la bande de conduction est appelé gap d'énergies.

En physique du solide, la bande de valence et la bande de conduction sont les bandes les plus proches du niveau de Fermi et déterminent ainsi la conductivité électrique du solide [1]. Ainsi, la quantité de l'énergie du gap distingue les solides en tant que métaux, semi-conducteurs et isolants électriques. Les métaux n'ont pas de gap énergétique, les isolants ont un large gap énergétique qui contient le niveau de Fermi, et les semi-conducteurs se situent entre les deux. A partir de ces définitions, nous pouvons diviser ce spectre en deux régions : lorsque le rapport de  $t_1/t_2$  est de 1, le système est en phase métallique et peut conduire l'électricité, le reste est en phase isolante et ne peut pas conduire l'électricité.

Et pour le spectre de la chaîne ouverte, nous observons qu'il est similaire que le spectre de la chaîne fermée sauf qu'il y a énergie nulle dans le gap avec le rapport de  $t_1/t_2$  est inférieur à 1. Nous pouvons observer l'existence de deux états d'énergie quasi-nulle dans le gap d'énergie selon la figure suivante.

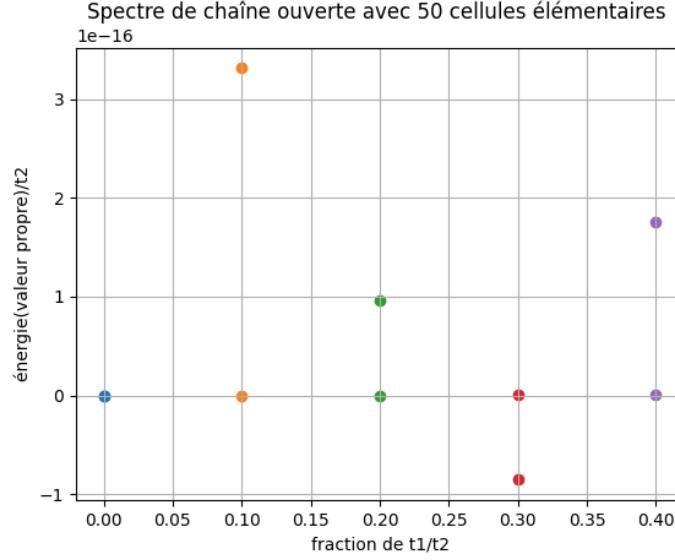


Figure 6: Zoom du spectre de chaîne ouverte sur l'énergie dans le gap

En comparant la forme de la chaîne dans les deux cas, nous pouvons dire que ces états d'énergie quasi-nulle sont fortement localisés sur les bords de la chaîne ouverte. La figure ci-dessous est la chaîne ouverte avec le rapport de  $t_1/t_2$  null, c'est-à-dire que  $t_1$  égal à 0.

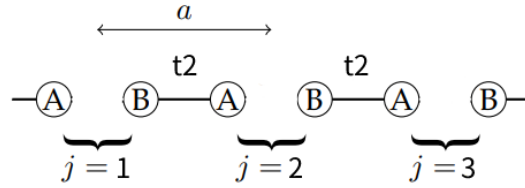


Figure 7: Modélisation avec  $t_1 = 0$

Dans ce cas, la chaîne est évidemment un isolant car elle est divisée en dimères. Cependant, nous pouvons trouver deux sites non appariés au bord de la chaîne dans la figure. Comme il n'y a pas d'énergie sur site, si l'électron se trouve dans l'une ou l'autre des deux positions du bord, son énergie sera nulle. [2] Cela explique pourquoi ces états d'énergie quasi-nulle apparaissent sur le spectre. En revanche, ce n'est pas un problème pour le rapport de  $t_1/t_2$  supérieur à 1. La figure ci-dessous est la chaîne ouverte avec le rapport de  $t_1/t_2$  proche infinie, c'est-à-dire que  $t_2$  égal à 0.

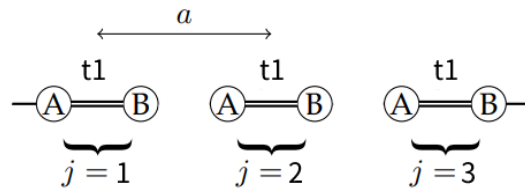


Figure 8: Modélisation avec  $t_2 = 0$



Sur la figure, nous pouvons voir que lorsque le rapport de  $t_1/t_2$  est beaucoup plus grand que 1, la chaîne est également divisée en dimères, mais il n'y a pas de sites non appariés. Ainsi, le spectre de la chaîne ouverte est divisé en deux régions isolantes par l'intersection de métaux dont le rapport de  $t_1/t_2$  est égal à 1, soit le cas  $t_1/t_2 < 1$  aurait nécessairement deux états propres à énergie quasi-nulle, tandis que l'autre cas n'aurait pas d'états propres à énergie nulle.

### 3 Le nombre d'enroulement

D'après la partie précédente, nous avons appris qu'il existe les états spéciaux d'énergie quasi-nulle dans le spectre de la chaîne ouverte. Ces états sont en fait protégés topologiquement. Pour étudier la protection topologique dans ces états de bord dans le modèle SSH, nous pouvons le voir en calculant le nombre d'enroulement suivant

$$N \equiv \frac{-1}{\pi} \phi_b \quad (5)$$

d'où

$$\phi_b = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \langle u_k^\pm | \frac{i\partial}{\partial k} | u_k^\pm \rangle dk \quad (6)$$

Tout d'abord, le calcul peut se faire analytiquement à l'aide du théorème de Bloch. La chaîne ouverte constitue un système spatialement périodique que l'on peut traiter avec le formalisme des ondes de Bloch. Nous cherchons les états propres de l'hamiltonien sous la forme

$$|\psi_k\rangle = \sum_j e^{ijk_a} (\alpha_k |A_j\rangle + \beta_k |B_j\rangle) \quad (7)$$

où  $k$  est le vecteur d'onde dont la valeur est restreinte à la zone de Brillouin  $-\pi/a \leq k < \pi/a$  avec identification des deux extrémités  $k = \pm\pi/a$ . Les coefficients  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont déterminés en écrivant que  $|\psi_k\rangle$  est état propre de l'hamiltonien de la chaîne, ce qui donne :

$$\hat{H}_k = \begin{pmatrix} \alpha_q \\ \beta_q \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} \alpha_q \\ \beta_q \end{pmatrix} \quad (8)$$

où l'hamiltonien périodique  $\hat{H}_k$  est la matrice  $2 \times 2$  :

$$\hat{H}_k = \begin{pmatrix} 0 & t1 + t2e^{-ika} \\ t1 + t2e^{ika} & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Les deux états propres obtenus s'écrivent

$$|u_k^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\phi_k} \end{pmatrix}, |u_k^{(+)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\phi_k} \end{pmatrix} \quad (10)$$

où l'on a introduit le nombre de module 1

$$e^{i\phi_k} = \frac{t1 + t2e^{ika}}{|t1 + t2e^{ika}|} \quad (11)$$

définition qui est valable tant que le dénominateur ne s'annule pas, donc tant que  $t_1 \neq t_2$  [3].

Afin de calculer le nombre d'enroulements, nous pouvons appliquer la formule de l'état propre moins  $|u_k^{(-)}\rangle$  ou l'état propre plus  $|u_k^{(+)}\rangle$ . Dans ce cas, pour simplifier le calcul, nous supposons que  $a$  est égal à 1. Puis nous calculons le nombre d'enroulement en méthode informatique. Le programme de calcul du nombre d'enroulement s'appelle *nombre-enroulement.py*.

Dans le formule du nombre d'enroulement, nous devons calculer la dérivée de état propre de l'hamiltonien par rapport le vecteur d'onde  $k$ . Tout d'abord, nous définissons l'état propre en utilisant l'instruction *def*. Nous utilisons ensuite la même instruction pour définir une fonction qui peut calculer la dérivée de l'état propre par rapport le vecteur d'onde  $k$ . Ici, nous devons utiliser la définition de la dérivée suivante [4] :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (12)$$

Dans le programme, nous prenons une valeur d'écart *epsilon* appropriée et calculons la dérivée lorsque la variable indépendante est égale à  $k$  par  $\frac{|u_{k+\epsilon}^{(\pm)}\rangle - |u_{k-\epsilon}^{(\pm)}\rangle}{2\epsilon}$ .

De même, nous devons calculer l'intégrale de la fonction par rapport au vecteur d'onde  $k$  en utilisant la définition de l'intégration. La représentation graphique de l'intégration est ci-dessous.

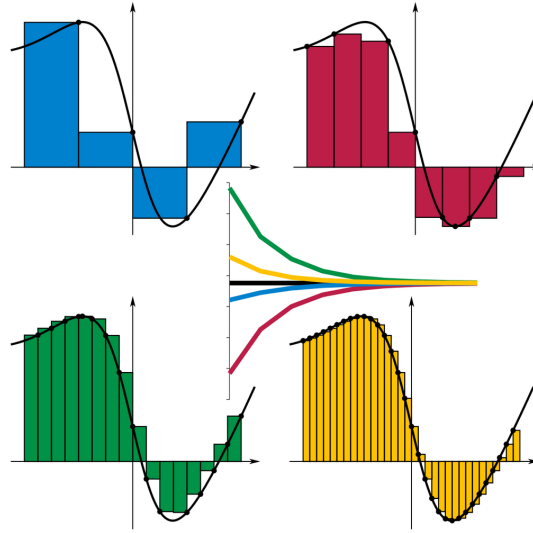


Figure 9: Représentation graphique de l'intégration

Après avoir vu le schéma ci-dessus, nous apprenons que le domaine d'intégration peut être divisé en  $n$  sous-intervalles. Chaque sous-intervalle correspondra à un rectangle dont la longueur est la valeur de la fonction et dont la largeur est la longueur du sous-intervalle. La somme des aires des  $n$  rectangles est l'intégrale de la fonction dans le domaine intégral. Plus la valeur de  $n$  est élevée, plus le résultat est précis.

Dans le programme, nous utilisons la fonction *linspace* de la librairie *numpy* pour diviser le domaine d'intégration en  $N_p$  parties de manière uniforme et calculons la surface de chaque rectangle en utilisant les fonctions de l'états propre et de la dérivée de état propre par rapport au vecteur d'onde  $k$  qui ont été définies précédemment. Enfin, le nombre d'enroulement est calculé à l'aide d'une *boucle for*. Les résultats du calcul contiennent une partie réelle et une partie imaginaire. Nous utilisons la fonction de la librairie *matplotlib.pyplot* pour tracer le nombre d'enroulement correspondant au rapport de  $t_1/t_2$  de 0 à 5. N'oubliez pas que le nombre d'enroulement pour le rapport de  $t_1/t_2$  égal à 1 n'a pas de sens, nous l'enlevons alors. Les figures obtenues sont ci-dessous.

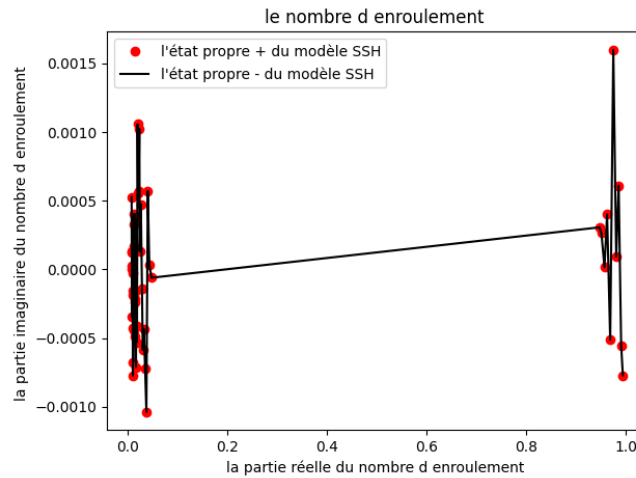


Figure 10: le nombre d'enroulement avec le rapport de  $t_1/t_2$  de 0 à 5

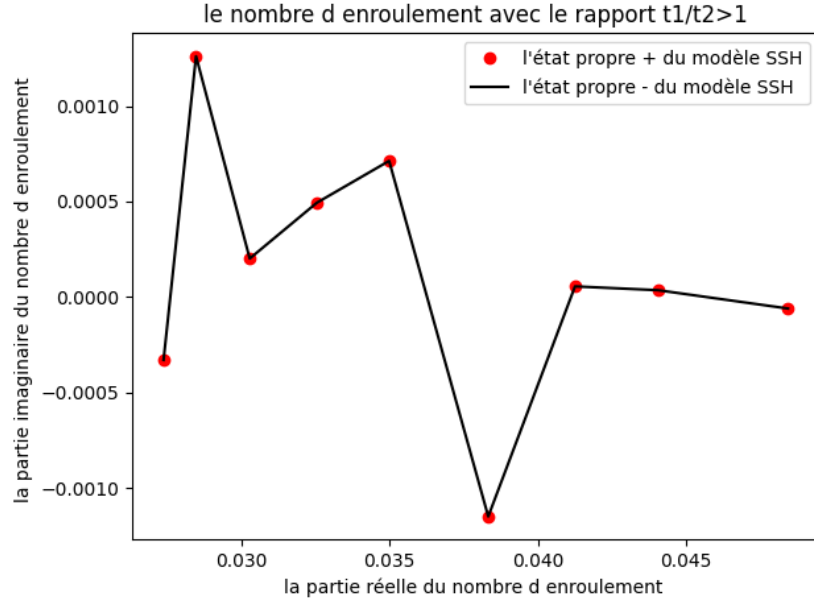


Figure 11: le nombre d'enroulement avec le rapport de  $t_1/t_2 > 1$

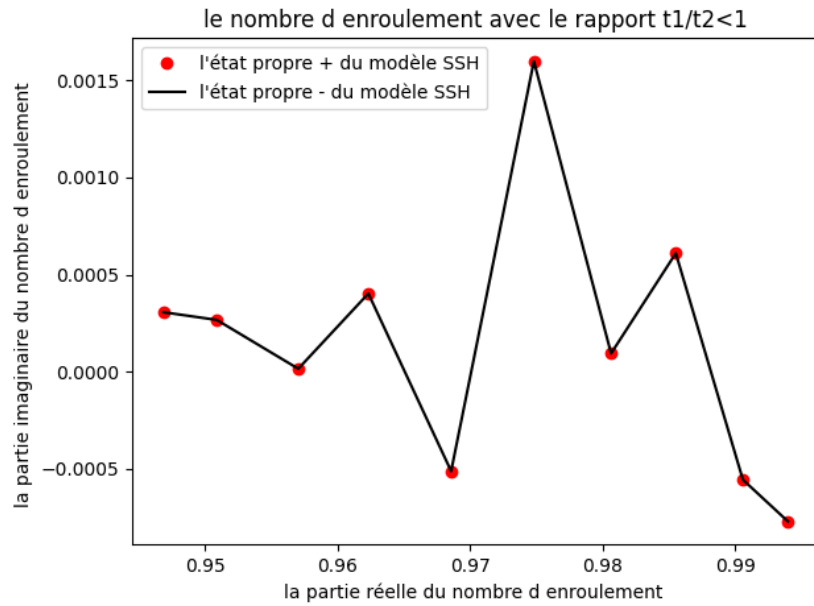


Figure 12: le nombre d'enroulement avec le rapport de  $t_1/t_2 < 1$

D'après les figures, nous trouvons que lorsque le rapport de  $t_1/t_2$  est inférieur à 1, le nombre de l'enroulement est égale à 1, et que lorsque le rapport de  $t_1/t_2$  est supérieur à 1, le nombre de l'enroulement est égale à 0.

Pour comprendre ce que signifient ces deux nombres, nous pouvons commencer par la définition du nombre d'enroulement. En mathématiques, le nombre d'enroulements ou l'indice d'enroulement d'une courbe fermée dans le plan autour d'un point donné est un nombre entier représentant le nombre total de fois que cette courbe se déplace dans le

sens inverse des aiguilles d'une montre autour du point, c'est-à-dire le nombre de tours de la courbe. La figure suivante montre la courbe en fonction du point donné lorsque le nombre d'enroulement est égal à 1 et égal à 0 [5].



Figure 13: Courbes pour le nombre d'enroulement 0 et 1

Dans ce qui va suivre, nous utiliserons la représentation de l'état quantique —ui d'un système à deux niveaux sur la sphère de Bloch. Représentation des deux états propres  $|u_k^{(\pm)}\rangle$  sur la sphère de Bloch de rayon 1. Pour le modèle SSH, ces deux états propres sont toujours localisés sur l'équateur comme la figure ci-dessous [3].

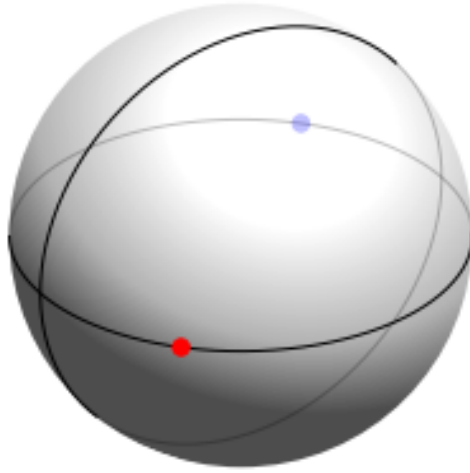


Figure 14: Représentation de Bloch

En combinant les deux définitions, nous pouvons tracer la trajectoire suivie par  $|u_k^{(-)}\rangle$  dans le modèle SSH. La figure est ci-dessous.

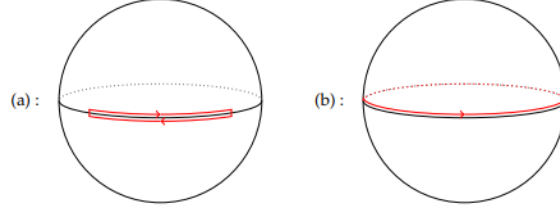


Figure 15: Trajectoire suivie par  $|u_k^{(-)}\rangle$ . Les cas (a) et (b) correspondent respectivement  $t_1 > t_2$  (non topologique) et  $t_1 < t_2$  (topologique).

D'après la figure, nous trouvons les états  $|u_k^{(-)}\rangle$  avec le rapport de  $t_1/t_2$  est inférieur à 1 sont contraints de rester sur l'équateur, nous ne pouvons pas déformer continûment un type de trajectoire en l'autre. C'est l'origine de la protection topologique du nombre d'enroulement. Nous appelons le cas où le rapport de  $t_1/t_2$  est supérieur à 1 et où le nombre d'enroulement est égal à 0 une configuration normale ou non topologique. Et nous appelons le cas où le rapport de  $t_1/t_2$  est inférieur à 1 et le nombre d'enroulement est égal à 1 une configuration topologique [3].

## 4 La relation entre l'énergie des états dans le gap et la taille du système

Nous pouvons aussi étudier la relation entre l'énergie des états dans le gap et la taille du système. Pour le rapport de  $t_1/t_2$  donné, nous faisons varier la valeur de  $L$  de 1 à 200. Pour chacune des matrices correspondant à  $L$ , calculez les énergies propres. Afin de pouvoir identifier l'énergie correspondant aux états bords, c'est-à-dire l'énergie dans le gap énergétique, nous utilisons la fonction *argsort* de la librairie *numpy*. Cette fonction nous donne les valeurs d'index de tous les nombres du tableau dans l'ordre du plus petit au plus grand. Selon cette valeur d'indice, nous réorganisons le tableau contenant toutes les énergies propres. Comme indiqué dans la partie 2, toutes les énergies sont symétriques par rapport à l'énergie égale à 0. Ainsi, les énergies situées dans le gap énergétique sont les deux valeurs les plus centrales du tableau.

Enfin, nous convertissons les deux énergies situées dans le gap énergétique correspondant à des  $L$  différents sous forme logarithmique. Nous traçons la courbe d'énergie dans la gap en fonction de la taille du système avec différents rapports de  $t_1/t_2$  en utilisant les fonctions de la librairie *matplotlib.pyplot*. Le programme de tracer les énergies dans le gap sous forme logarithmique en fonction de la taille du système s'appelle *tracer-energie-taille.py*. Les figures obtenues sont ci-dessous.

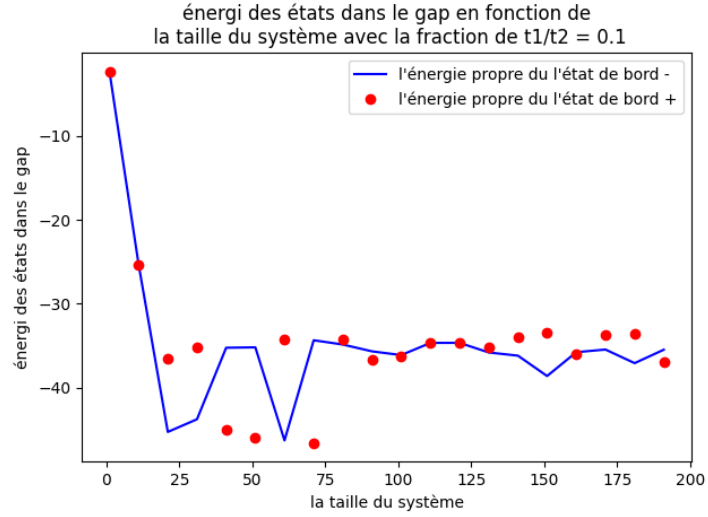


Figure 16: les énergies dans le gap sous forme logarithmique en fonction de la taille du système avec le rapport de  $t_1/t_2 = 0.1$

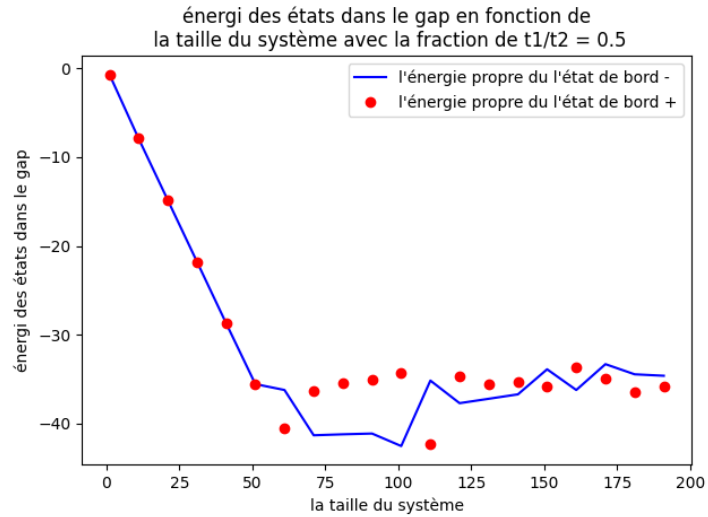


Figure 17: les énergies dans le gap sous forme logarithmique en fonction de la taille du système avec le rapport de  $t_1/t_2 = 0.5$

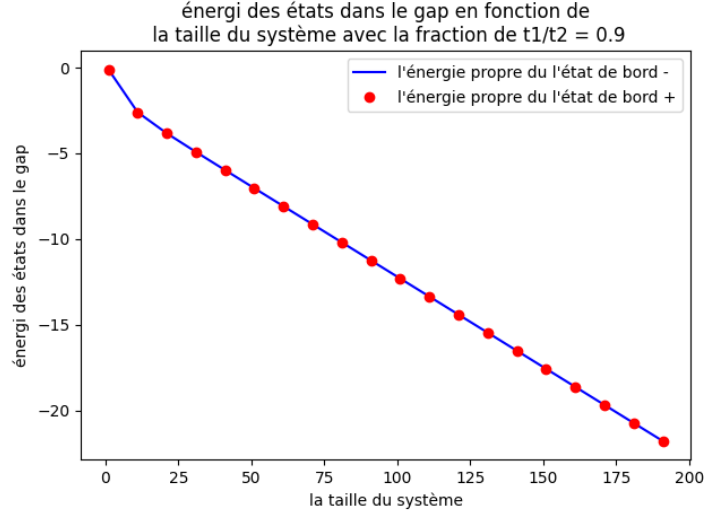


Figure 18: les énergies dans le gap sous forme logarithmique en fonction de la taille du système avec le rapport de  $t_1/t_2 = 0.9$

À partir des trois courbes ci-dessus avec différents rapports de  $t_1/t_2$ , nous observons que la taille de la partie linéaire augmente avec le rapport de  $t_1/t_2$ . Et les parties désordonnées qui apparaissent dans les graphiques à plus petite échelle sont, je pense, dues au fait que les valeurs d'énergie sont plus petites que la précision que python peut calculer. Mais d'après la section ordonnée, nous pouvons encore trouver que l'énergie diminue linéairement avec la taille du système. Mais ici, l'énergie est sous forme logarithmique. Nous pouvons donc conclure que l'énergie des états dans le gap varie exponentiellement avec la taille du système.

## 5 Conclusion

Dans ce projet, nous avons étudié le modèle de Su-Schrieffer-Heeger (SSH). Ce modèle de réseau unidimensionnel présente différents spectres sous forme de chaînes fermées et ouvertes. Le spectre de la chaîne fermée montre que dans la plupart des cas, le système est en phase d'isolation. Ce n'est que dans le cas de coefficients d'effet tunnel égaux de l'A site vers le B site et du B site vers l'A site qu'il existe un point de interaction métallique, lorsque le système est en phase métallique.

Le spectre d'une chaîne ouverte est similaire à celui d'une chaîne fermée, sauf qu'il existe deux états spéciaux à énergie quasi-nulle dans le gap énergétique lorsque l'amplitude quantique  $t_1$  de l'électron sautant le long de la double liaison est inférieure à l'amplitude quantique  $t_2$  de l'électron sautant le long de la simple liaison. En comparant les deux cas extrêmes de chaînes ouvertes, c'est-à-dire  $t_1$  égal à 0 et  $t_2$  égal à 0, nous pouvons dire que ces deux états spéciaux sont fortement localisés aux bords des chaînes ouvertes.

Ces états de bord sont en fait protégés topologiquement. A l'aide du théorème de Bloch et la formule du nombre d'enroulement, nous obtenons que lorsque le rapport de



$t_1/t_2$  est inférieur à 1, le nombre de l'enroulement est égale à 1, et que lorsque le rapport de  $t_1/t_2$  est supérieur à 1, le nombre de l'enroulement est égale à 0. En combinant la définition de nombre de l'enroulement et la représentation de Bloch, nous constatons que les états de bord avec le rapport de  $t_1/t_2$  est inférieur à 1 sont contraints de rester sur l'équateur, nous ne pouvons pas déformer continûment un type de trajectoire en l'autre. Nous appelons ce cas la protection topologique.

Nous étudions aussi la relation entre l'énergie des états dans le gap et la taille du système. En traçant la courbe de l'énergie des états dans le gap et la taille du système, nous concluons que l'énergie des états dans le gap varie exponentiellement avec la taille du système.

En plus d'étudier la physique, nous avons également appris beaucoup de choses sur les ordinateurs au cours de ce projet.

Par exemple, je suis devenu plus compétent dans l'utilisation des fonctions de la librairie *matplotlib.pyplot*, j'ai appris à calculer les dérivées et les intégrales en python et j'ai appris plus de fonctions liées aux tableaux de la librairie *numpy*. Et bien sûr, un approfondissement de l'utilisation de *LaTeX* pour la rédaction de rapports.

## References

- [1] "Qu'est-ce que la bande de conduction et de valence dans les semi-conducteurs." <https://www.radiation-dosimetry.org/fr/quest-ce-que-la-bande-de-conduction-et-de-valence-dans-les-semi-conducteurs-definition/>.
- [2] "Su-schrieffer-heeger model." [https://en.wikipedia.org/wiki/Su%E2%80%93Schrieffer%E2%80%93Heeger\\_model/](https://en.wikipedia.org/wiki/Su%E2%80%93Schrieffer%E2%80%93Heeger_model/).
- [3] "Topologie à une dimension :du modèle ssh aux modes de majorana." [https://pro.college-de-france.fr/jean.dalibard/CdF/2018/notes\\_cours\\_2.pdf/](https://pro.college-de-france.fr/jean.dalibard/CdF/2018/notes_cours_2.pdf/).
- [4] "Dérivée." <https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9riv%C3%A9e/>.
- [5] "Winding number." [https://en.wikipedia.org/wiki/Winding\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Winding_number).