CNF modelljeinek kiszámítása értékadáshalmazok segítségével

Pécsi Dávid Csaba

2022 02. 08.

1 Cél

Arra építünk, hogy egy A értékadás pontosan akkor modellje egy Σ CNF-nek, ha minden C ∈ Σ klózra igaz, hogy A(C) = 1. Vagyis van az összes lehetséges értékadásnak egy részhalmaza, amiben minden értékadás modellje $C_1 \in \Sigma$-nak, van szintén egy értékadás részhalmaz, ami a $C_2 \in \Sigma$ modelljeinek a halmaza, stb... Magának a Σ-nak akkor lesz egy értékadás modellje, ha az adott értékadás minden klózának modellje, minden klózát igazra állítja. Ha készítünk egy algoritmust, ami kiszámolja az összes olyan értékadást, ami az összes klóz modelljeinek a halmazában szerepel, akkor pontosan megkapjuk a Σ összes modelljét.

2 Jelölés

Ha közvetlenül fölírnánk az összes lehetséges értékadást és elkezdenénk rajtuk dolgozni, akkor az borzalmasan rossz lenne, mivel exponenciálisan sok értékadással kellene egyszerre dolgoznunk. Ehelyett jelölje az értékadások egy halmazát egy L nyelv-beli szó. Legyen L = $(1 + 0 + \mathrm{X})^n$, ahol az n jelöli, hogy hány változós a Σ. Tehát egy egyesekből, nullásokból és X-ekből álló szó fog jelölni egy adott értékadáshalmazt, ami n darab szimbólumból áll. Minden szimbólumnak megfeleltetünk pontosan egy változót (1:1 kapcsolat). A változók közt fel kell állítani valamilyen sorrendiséget, hogy minden változó "valahanyadik" változó legyen. Például ha az ábécé betűivel jelöljük a változókat, akkor az ábécé szerinti sorrend lesz a sorrend (pl.: p az 1. változó, q a 2., stb...), vagy ha a .cnf fájl-os jelölésben gondolkozunk, akkor a változókat jelölő természetes számok növekvő sorrendje lesz a sorrend. Ezt kihasználva meg tudjuk adni, hogy az adott szóban lévő m-edik szimbólum hogyan hat az m-edik változóra. Három eset van:

- Ha a szóban az m-edik szimbólum 1, akkor az általa jelölt értékadáshalmazban minden értékadásban az m-edik változót 1-re állítunk.
- Ha a szóban az m-edik szimbólum 0, akkor az általa jelölt értékadáshalmazban minden értékadásban az m-edik változót 0-ra állítunk.

- Ha a szóban az m-edik szimbólum X, akkor az általa jelölt értékadáshalmazban minden értékadásban az m-edik változót 1-re és 0-ra is állíthatjuk.

Példa: Legyen 4 változó: p, q, r, s; valamint a szó 1X0X. Ekkor ez az alábbi 4 értékadást jelöli:

- $p \to 1$, $q \to 0$, $r \to 0$, $s \to 0$
- $p \to 1$, $q \to 0$, $r \to 0$, $s \to 1$
- $p \to 1$, $q \to 1$, $r \to 0$, $s \to 0$
- $p \to 1$, $q \to 1$, $r \to 0$, $s \to 1$

Tömören az X-ek helyén bármi állhat, a számoknál csak maguk a számok. Ha egy szóban k darab X van, akkor a szó által jelölt értékadáshalmaz összesen 2^k darab értékadást tartalmaz (ha egyáltalán nincs benne X, akkor 2^0=1-et).

3 Műveletek

Az algoritmushoz még két műveletet kell definiálnunk: az illeszkedést és a metszetet. Két szó pontosan akkor illeszkedik, ha az m-edik szimbólum:

- legalább az egyik szóban X
- mindkettőnél 0
- mindkettőnél 1.

1. példa: A w_1=0XX és w_2=XX1 szavak illeszkednek, mert az 1. szimbólum w_1-ben 0, míg a w_2-ben X, a 2. szimbólum w_1-ben X, míg w_2-ben szintén X, valamint a 3. szimbólum w_1-ben X, míg w_2-ben 1.

2. példa: Az w_1=0XX és w_2=1XX szavak nem illszekednek, mert w_1 1. szimbóluma 1, míg w_2-é 0.

Amikor két szó nem illeszkedik egymásra, akkor az történik, hogy az egyik értékadáshalmazban az adott változót minden értékadásban igazra állítjuk, a másikban pedig minden értékadásban ugyanazt a változót hamisra. Ebből az következik, hogy a két értékadáshalmaznak üres halmaz a metszete, mert egy változót nem tudunk egyszerre igazra és hamisra is állítani. Ezzel szemben, ha két szó illeszkedik egymásra, akkor a kettejük metszete biztosan nem üres halmaz, mivel minden értékadáshalmaz legalább egy elemű (ez az az eset, amikor nincs a szóban X, 2^0=1), valamint:

- ha az egyik értékadáshalmazban meghatározunk egy változónak egy igazságértéket, akkor a másikban is ugyanazt adjuk a változónak, vagy
- ha az egyik értékadáshalmazban meghatározunk egy változónak egy igazságértéket, akkor a másikban szabadon hagyjuk a változót, felvehet igaz és hamis értékeket is, valamint

- mindkettő értékadáshalmazban szabadon hagyjuk az adott változót, mindkettőben kaphat 0 vagy 1 értéket is.

Két szó által jelölt értékadáshalmazoknak a metszetét jelölő szót pedig úgy számítjuk ki, hogy először ellenőrizzük, hogy illeszkednek-e egymásra (ekkor nem üres halmaz a metszetük), ha igen, akkor pedig ha legalább az egyik szóban az m-edik szimbólum

- 1, akkor a metszet szavában az m-edik szimbólum 1 lesz
- 0, akkor a metszet szavában az m-edik szimbólum 0 lesz.

Ha mindkettőben X az m-edik szimbólum, akkor az eredményben is X lesz a szimbólum.

1. példa: A w_1=0XX és w_2=XX1 szavakról tudjuk, hogy illeszkednek, a metszetük pedig a 0X1 szó, mert w_1-ben az 1. szimbólum 0, w_2-ben pedig X, w_1-ben a 2. szimbólum X és w_2-ben is X, valamint w_1-ben a 3. szimbólum X, w_2-ben pedig 1. A w_1 értékadásai:

- $p\to 0$, $q\to 0$, $r\to 0$
- $p\to 0$, $q\to 0$, $r\to 1$
- $p\to 0$, $q\to 1$, $r\to 0$
- $p\to 0$, $q\to 1$, $r\to 1$

A w_2 értékadásai:

- $p\to 0$, $q\to 0$, $r\to 1$
- $p\to 0$, $q\to 1$, $r\to 1$
- $p\to 1$, $q\to 0$, $r\to 1$
- $p\to 1$, $q\to 1$, $r\to 1$

A két halmaz metszetében lévő értékadások:

- $p\to 0$, $q\to 0$, $r\to 1$
- $p\to 0$, $q\to 1$, $r\to 1$

Ezt a halmazt pedig pontosan a 0X1 szó határozza meg. 2. példa: w_1=0XX11, w_2=X1X1X, ezek illeszkednek egymásra és a metszetük 01X11. A w_1 értékadásai:

- $p\to 0$, $q\to 0$, $r\to 0$, $s\to 1$, $t\to 1$
- $p\to 0$, $q\to 0$, $r\to 1$, $s\to 1$, $t\to 1$
- $p\to 0$, $q\to 1$, $r\to 0$, $s\to 1$, $t\to 1$
- $p\to 0$, $q\to 1$, $r\to 1$, $s\to 1$, $t\to 1$

A w_2 értékadásai:

- p→0, q→1, r→0, s→1, t→0
- <u>p→0, q→1, r→0, s→1, t→1</u>
- p→0, q→1, r→1, s→1, t→0
- <u>p→0, q→1, r→1, s→1, t→1</u>
- p→1, q→1, r→0, s→1, t→0
- p→1, q→1, r→0, s→1, t→1
- p→1, q→1, r→1, s→1, t→0
- p→1, q→1, r→1, s→1, t→1

A két halmaz metszetében lévő értékadások:

- <u>p→0, q→1, r→0, s→1, t→1</u>
- <u>p→0, q→1, r→1, s→1, t→1</u>

Ezt a halmazt pedig pontosan a 01X11 szó határozza meg.

4 Klóz modelljeinek a felírása

Az algoritmushoz még szükség van arra, hogy fel tudjuk venni egy adott klóznak az összes őt kielégítő értékadásait. Ezt első közelítésből úgy tesszük, hogy egyszerűen fölírjuk azt az értékadáshalmazt, amiben minden értékadás mellett hamis lesz a klóz (vagyis a meghatározott változók mind úgy vannak beállítva, hogy a klóz hamis értéket vegyen fel), erre pedig felírjuk az összes olyan értékadáshalmazt, amiben a klózban szereplő változók legalább egy változóban másra vannak meghatározva, mint a klózt nem kielégítő értékadáshalmazban meghatározott változóknál. Ha a klóz nem triviális és a klózban szereplő literálok száma k, akkor ez $2^k - 1$ értékadáshalmaz, ha pedig triviális, akkor a klóznak minden lehetséges értékadás modellje ami egy szóban fölírható, amelyikben minden szimbólum X.

Példa: Legyen 4 változó: p, q, r, s; valamint a $\{\neg p, q, s\}$ klóz. Ennek a klóznak azon értékadások nem modelljei, amikben p→1, q→0 és s→0, az r lehet 0 vagy 1 is, ez az 10X0 értékadáshalmaz. Fölírjuk az összes lehetséges variációt a klózban szereplő változókra, kivéve azt az egy értékadáshalmazt, amiben nem elégítjük ki a klózt:

- 00X0
- 00X1
- 01X0

- 01X1
- 10X1
- 11X0
- 11X1

Ezek a halmazok mind diszjunktak egymásra (nem illeszkednek), valamint az 10X0-al együtt lefedik az összes lehetséges értékadást.

Ennek a javítása, ha egy tömörebb formában adjuk meg ugyanezeket az értékadáshalmazokat. A példában a nem kielégítő értékadásokban a p-t igazra állítottuk, vagyis azt már innen látjuk, hogy az összes olyan értékadás, amiben a p értéke 0 kielégíti a klózt. Nem kell felírni az első négy szót, ezeket egybe is lehet jelölni: $00X0 \cup 00X1 \cup 01X0 \cup 01X1 = 0XXX$. Azok az értékadások is kapásból kielégítik a klózt, amikben a p-t 1-re és a q-t is 1-re állítjuk, a többi változó nem számít, vagyis: $11X0 \cup 11X1 = 11XX$. Egyedül az 10X1 szó maradt, ezt már nem tudjuk mivel összeolvasztani, szimplán fölvesszük. Tehát az előbbi 7 értékadáshalmazt sikerült fölírnunk három értékadáshalmazban, úgy, hogy az 1.-ben 4, a 2.-ban 2 és a 3.-ban 1 eredeti értékadáshalmaz lett becsomagolva.

- 0XXX
- 11XX
- 10X1

Általánosan egy k darab literálú nem triviális klóz modelljeit k darab értékadáshalmazzal tudjuk megadni.

5 Algoritmus

Magához az algoritmushoz föl kell vennünk három halmazt: az F(final) halmazban tároljuk az eddig bejárt klózok modelljeit (amik az összes eddigi klózt kielégítik egyszerre), a T(temporary) halmazban az aktuális klóz modelljeit, az R(result) halmazban pedig azokat az értékadáshalmazokat, amik az összes korábbit és az aktuális klózt is kielégítik egyszerre. Az F halmaz tartalma induláskor legyen a csupa X-ekből álló szó (vagyis az összes lehetséges értékadást jelentő szó), a másik 2 pedig legyen üres halmaz.

Végigmegyünk minden klózon. Minden iterációban fölvesszük a T halmazba az aktuális klóz modelljeit, kiszámoljuk az R halmazba a T és az F halmazokban lévő értékadáshalmazok metszeteit, végül pedig F tartalmát egyenlővé tesszük az R halmazzal, R-t és T-t végül üres halmazra állítjuk. A futás végén az F halmazban lesz a Σ összes modellje (értékadáshalmazokban jelölve). Ha a Σ kielégíthetetlen, akkor F a végére üres halmaz lesz.

Az F-beli és a T-beli értékadáshalmazok egymásra mindig diszjunktak, viszont egy F-beli és egy T-beli értékadáshalmazoknak lehetnek közös elemeik. Úgy tudjuk az összes metszetben lévő értékadáshalmazokat megkapni, hogy minden F-beli értékadáshalmaz szavával metszetet számolunk minden T-beli értékadáshalmaz szavának metszetével (mindent mindennel).

$F \leftarrow X^n$
$R \leftarrow \emptyset$
$T \leftarrow \emptyset$
repeat
  Fölvesszük T-be az aktuális klóz modelljeit tartalmazó értékadáshalmazokat reprezentáló szavakat.
  Kiszámoljuk R-be az F és T-beli értékadáshalmazok szavainak a metszetetit.
  $F \leftarrow R$
  $T \leftarrow \emptyset$
  $F \leftarrow \emptyset$
until bejárjuk az összes klózt
