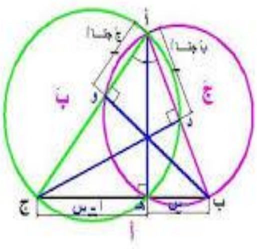
جامعة الشرقية
A' SHARQIYAH UNIVERSITY

الرياضيات الأساسية

Basic Mathematics

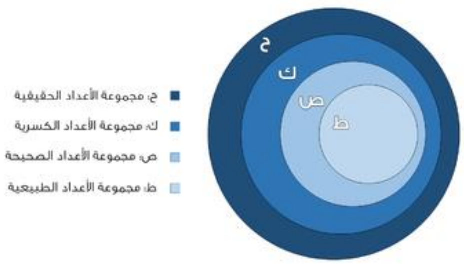
٢٠٢٢ / ٢٠٢٣ م

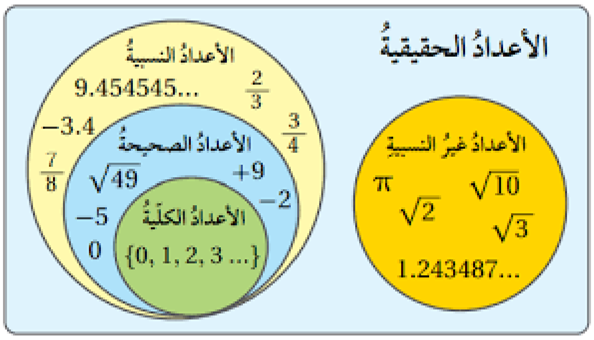


قائمة المحتويات

الرياضيات الأساسية
Basic Mathematics

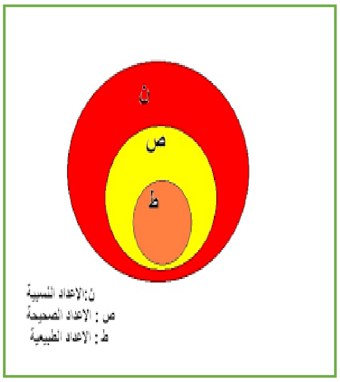
الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقية





الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقة

الأهداف:



١) وصف مجموعة الأعداد الحقيقية والمجموعات الجزئية منها.
٢) التعرف على خواص الأعداد الحقيقة.
٣) جمع وطرح الكسور باستخدام المضاعف المشترك الأكبر للمقامات
٤) تمثيل الفترات على خط الأعداد الحقيقة
٥) التعرف على القيمة المطلقة
٦) التعبير عن العدد الحقيقي بالصورة العشرية أو الكسرية أو النسبة المئوية.

١-١ : الأعداد الحقيقة ومجموعاتها

الأعداد الحقيقية Real Numbers : هي مجموعة الأعداد التي تشمل مجموعات الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية وغير النسبية .

تذكر :

الأعداد الطبيعية (ط) = { ٠، ١، ٢، ٣، .... }

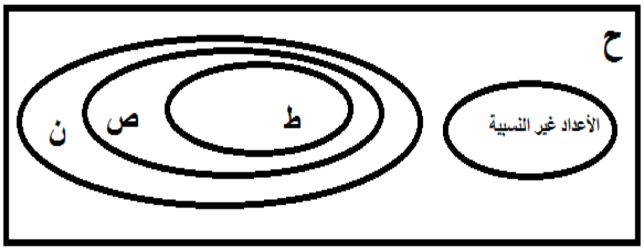
الأعداد الصحيحة (ص) = { ...... ،٣ ،٢ ، ١ ، ٠، ١- ، ٢- ، ٣- ، .... }

الأعداد النسبية (ن) هي كل عدد يمكن كتابته على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب ∋ ص ، ب ≠ ٠ .

أي أن : ن = { $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب ∋ ص ، ب ≠ ٠ }

مثل : $\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{٥}{٩}$ ، ٢٧ = $\frac{٢٧}{١}$ ، ٠,٣٤ = $\frac{٣٤}{١٠٠}$

الأعداد غير النسبية هي الأعداد التي لا يمكن أن تمثل على الصورة $\frac{أ}{ب}$ مثل هـ ، $\sqrt{٢}$ ، π ، $\sqrt{\frac{١}{٥}}$



مثال (١): صنف العناصر في المجموعة التالية{ ١٠٠ ،٠,٣٢٣، −١١ ، ١١ ، $\sqrt{١٦}$ ، ٣,١٤ ، $\frac{٢٢}{٧}$ } إلى : (أ) أعداد طبيعية (ب) أعداد صحيحة (ج) أعداد نسبية (د) أعداد غير نسبية

الحل :−

(أ) الأعداد الطبيعية هي { ١٠٠ ، ١١ ، $\sqrt{١٦}$ }

(ب) الأعداد الصحيحة هي { ١٠٠ ، ١١ ، −١١ ، $\sqrt{١٦}$ }

(ج) الأعداد النسبية هي { ١٠٠، ٠,٣٢٣ ، −١١ ، ١١ ، $\sqrt{١٦}$ ، ٣,١٤ ، $\frac{٢٢}{٧}$ }

(د) الأعداد غير النسبية هي { − π}

ملاحظة : كل عدد عشري منتهي أو دوري هو عدد نسبي

مثلا: ٠,٦٦٦٦٦٠٠٠ = $٠,\overline{٦}$ عدد نسبي لأنه يمكن كتابته على شكل كسر $\frac{٢}{٣}$

كذلك ٠,٢٥ عدد نسبي لأنه عدد عشري منتهي ويمكن كتابته على شكل كسر = $\frac{١}{٤}$

أما $\sqrt{٥}$ فليس عدد لأنه نسبي لأنه عدد عشري غير منتهي وليس بدوري ٢,٢٣٦٠٦٧٩٧٧٤٩٠٠٠٠

وكذلك π ، هـ

خصائص الأعداد الحقيقية

الخاصية	مثال
الخاصية الإبدالية: أ + ب = ب + أ أ × ب = ب ×أ	٣ + ٢ = ٢ + ٣ ٤ × ٦ = ٦ × ٤
الخاصية التجميعية: (أ + ب) + ج = أ + (ب + ج) (أ × ب) × ج = أ × (ب × ج)	(٥ + ٦) + ٩ = ٥ + (٦ + ٩) (٢ × ٣) × ٥ = ٢ × (٣ × ٥)
خاصية التوزيع: أ × (ب + ج) = أ ×ب + أ × ج (ب + ج) × أ = ب × أ + ج × أ	٣ (٥ + ٢) = ٣×٥ + ٣× ٢ (٥ + ٧) ×٤ = ٥ × ٤ + ٧ × ٤
خاصية الانغلاق: أ + ب عدد حقيقي أ × ب عدد حقيقي	٣ + ٧ = ١٠ عدد حقيقي ٢ × ٦ = ١٢ عدد حقيقي

تذكر:

١) عند جمع أي عدد حقيقي مع الصفر يكون الناتج نفس العدد، لذا يسمى الصفر العنصر المحايد الجمعي

أي أن: أ + ٠ = أ ، فمثلا ٥ + ٠ = ٥

٢) عند ضرب أي عدد حقيقي بالواحد يكون الناتج نفس العدد، لذا يسمى الواحد العنصر المحايد الضربي

أي أن: أ × ١ = أ ، فمثلا ٥ × ١ = ٥

٣) النظير الجمعي: عند جمع أي عدد حقيقي مع نظيره الجمعي يكون الناتج صفر،

أي أن: أ + (−أ) = ٠ ، فمثلا ٦ + (−٦) = ٠

٤) النظير الضربي: عند ضرب أي عدد حقيقي مع نظيره الضربي يكون الناتج ١،

أي أن: أ × ($\frac{١}{أ}$) = ١ ، فمثلا ٦ × ($\frac{١}{٦}$) = ١

٥) إذا كان حاصل ضرب عددين يساوي صفرا ، فإن أحد العددين على الأقل يكون صفرا .

أي أن: أ × ب = ٠ أ = ٠ أو ب = ٠ أو كلاهما = ٠

خصائص العدد السالب :	أمثلة :
(−١) × أ = − أ	(−١) × ٥ = −٥
− (−أ) = أ	− (−٦) = ٦
(−أ) × ب = أ × (−ب) = − (أ ب)	−(٥) × ٤ = ٥ × (−٤) = − (٥×٤) = −٢٠
(−أ) × (− ب) = أ ب	(−٢) × (−٣) = ٢×٣ = ٦
−(أ + ب) = − أ − ب	− (١+٥) = −١ −٥ = −٦
−(أ − ب) = −أ + ب	−(٤ −٢) = −٤ +٢ = −٢

خصائص الكسور :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{أ}\times\text{ج}}{\text{ب}\times\text{د}}$$

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \div \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{د}}{\text{ج}} = \frac{\text{أ}\times\text{د}}{\text{ب}\times\text{ج}}$$

$$\frac{\text{أ}}{\text{ج}} + \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{ج}}$$

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{أ}\times\text{د} + \text{ب}\times\text{ج}}{\text{ب}\times\text{د}}$$

$$\frac{\text{أ}\times\text{د}}{\text{ب}\times\text{د}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$ فإن $\text{أ}\times\text{د} = \text{ب}\times\text{ج}$

مثال(٢): جد قيمة $\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢}$

الحل : في عملية جمع أو طرح الكسور نحتاج لتوحيد المقامات

المضاعف المشترك الأصغر للمقامات (٣ ، ٢) هو ٦

$$\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} = \frac{٢\times٢ + ١\times٣}{٣\times٢} = \frac{٧}{٦} = ١\frac{١}{٦}$$

تدريب(١): جد قيمة ما يأتي :

(أ) $\frac{٦}{٧} - \frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٨} \times \frac{٣}{٤}$ (ج) $\frac{٢}{٥} \div \frac{٧}{٩}$

تدريب(٢): القطاع الدائري المجاور يمثل الرياضات المفضلة لطلبة إحدى المدارس:

(أ) ما هو الكسر الذي يمثل الطلبة الذين يحبون رياضة المشي؟

(ب) ما هو الكسر الذي يمثل الطلبة الذين يحبون رياضتي كرة القدم والسباحة ؟

تمثيل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد

اذا رسمت خط الأعداد في وضع أفقي، تجد أن جميع النقاط التي تمثل الأعداد الصحيحة الموجبة تقعُ على اليمين من النقطة المرجعية التي تمثل الصفر، في حين أن جميع النقاط التي تمثل الأعداد الصحيحة السالبة تقعُ على اليسارِ من النقطة التي تمثل الصفر.

تذكر :

- كل نقطة على خط الأعداد تمثل عددا حقيقيا وكل عدد حقيقي يمثل بنقطة على خط الأعداد.
- بين أي عددين حقيقين يوجد عدد حقيقي

تدريب(٣): أكتب الأعداد التي تمثلها النقاط الموضحة في خط الأعداد الصحيحة فيما يلي :

اتحاد وتقاطع المجموعات

مثال(٣): إذا كانت س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ، ص = {٣، ٤، ٥} ، ع = {٦، ٧، ٨} ، فأوجد ما يلي: س $\cup$ ع ، س $\cap$ ص ، ص $\cap$ ع

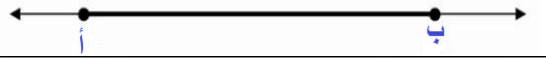
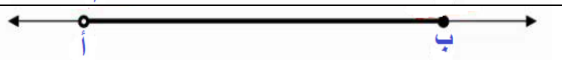
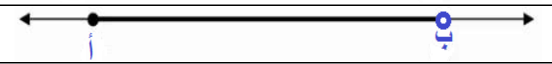
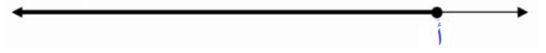
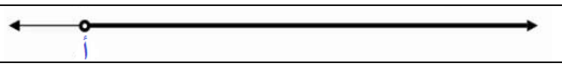
الحل : س $\cup$ ع = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}

س $\cap$ ص = {٣، ٤، ٥}

ص $\cap$ ع = { } = Φ (مجموعة خالية ويقرأ الرمز Φ فاي)

الفترات

تعرف الفترة في مجموعة الاعداد الحقيقية بانها مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية تحدد وفقاً لشروط معينة ويمكن أن يرمز لها بالرمز (ف) . حيث يعبر عن الفترة بقوسين يوضع داخلهما عددين أحدهم يمثل بداية الفترة والآخر يمثل نهاية الفترة.

الفترة	التعبير عنها بالمتباينات	الرسم
]أ ، ب[	{س : حيث أ < س < ب}	
[أ ، ب]	{س : حيث أ ≤ س ≤ ب}	
]أ ، ب]	{س : حيث أ < س ≤ ب}	
[أ ، ب[	{س : حيث أ ≤ س < ب}	
[أ ، ∞[	{س : حيث س ≥ أ}	
]-∞ ، أ]	{س : حيث س ≤ أ}	
]أ ، ∞[	{س : حيث س > أ}	
]-∞ ، أ[	{س : حيث س < أ}	
]-∞ ، ∞[	مجموعة الأعداد الحقيقية ح	

مثال(٤): مثل الفترات التالية على خط الأعداد الحقيقية :

(أ) [-٣ ، ٥]

(ب) [-٢ ، ٣[

(ج) [-٤ ، ∞[

اتحاد وتقاطع الفترات

مثال(٥): مثل المجموعات التالية:

(أ)]١، ٤[∪ [٢ ، ٥]

(ب)]١، ٤[∩ [٢ ، ٥]

التحويل بين الأعداد العشرية والكسور والنسبة المئوية

النِّسبة المئوية تشير إلى استخدام أجزاء المائة في الحساب. فكثيرًا مانرى أعدادًا مثل ٢٪، أو ٣٠٪ أو ٧٥٪ حيث الرمز % يعني في المائة. وتقرأ هذه الأعداد ٢ في المائة، و ٣٠ في المائة و ٧٥ في المائة، حيث يعني التعبير في المائة أجزاء المائة. فالنسبة ٢٪ تعني جزئين من المائة و٣٠٪ تعني ٣٠ جزءًا من المائة و ٧٥٪ تعني ٧٥ جزءًا من المائة. والنسب المئوية في حقيقة الأمر كسور اعتيادية فالنسبة ٢٪ هي ١٠٠/٢ و ٣٠٪ هي ١٠٠/٣٠ و ٧٥٪ هي ١٠٠/٧٥ والنسب المئوية أيضا كسور عشرية، حيث النسبة ٢٪ هي ٠,٠٢ و ٣٠٪ هي ٠,٣٠ و ٧٥٪ هي ٠,٧٥ فإذا أردت حساب ٢٥٪ من العدد ٦٠ فعليك إيجاد ١٠٠/٢٥ أو ٠,٢٥ للعدد ٦٠.

تستخدم النسبة المئوية بكثرة في الحياة اليومية. فالمصارف تستخدمها لحساب الفوائد على المدخرات والقروض كما أن الضرائب تحسب بطريقة النسب المئوية من الدخل والأسعار ومقادير أخرى.

تحويل النسبة المئوية إلى كسور اعتيادية:

لتحويل نسبة مئوية إلى كسر اعتيادي نسقط الرمز % ثم ندخل مقامًا قدره ١٠٠ فمثلاً .

٢٥٪ = ١٠٠/٢٥ = ١/٤

٣٧,٥٪ = ١٠٠/٣٧,٥ = ٣/٨

١٢٥٪ = ١٠٠/١٢٥

٢٦٥٪ = ١٠٠/٢٦٥

تحويل النسب المئوية إلى كسور عشرية:

لتحويل نسبة مئوية إلى كسر عشري نسقط الرمز % ونضع الفاصلة العشرية بعد خانتين إلى اليسار فمثلاً:

٢٥٪ = ٠,٢٥

٣٧,٥٪ = ٠,٣٧٥

١٢٥٪ = ١,٢٥

٢٦٥٪ = ٢,٦٥

تحويل الكسور العشرية إلى نسب مئوية:

لتحويل كسر عشري إلى نسبة مئوية نحرك الفاصلة العشرية خانتين إلى اليمين ثم نلحق الرمز %كما في الأمثلة التالية:

٠,٠٧ (٧ أجزاء من المائة) = ٧٪

٠,٦٣ (٦٣ جزءًا من المائة) = ٦٣٪

٠,٦٢٥ (٦٢,٥ جزءًا من المائة) = ٦٢,٥٪

١,٥٢ (١٥٢ جزءًا من المائة) = ١٥٢٪

تحويل الكسور الاعتيادية إلى نسب مئوية:

لتحويل كسر اعتيادي إلى نسبة مئوية نقسم البسط على المقام لنحصل على كسر عشري ثم نحرك الفاصلة العشرية خانتين إلى اليمين ونلحق الرمز % كما في الأمثلة التالية:

٣/٥ = ٣ ÷ ٥ = ٠,٦ (٦٠ جزءا من المائة) = ٦٠٪

٥/٨ = ٥ ÷ ٨ = ٠,٦٢٥ (٦٢,٥ جزءًا من المائة) ٦٢,٥٪

٣/٤ = ٣ ÷ ٤ = ٠,٧٥ (٧٥ جزءًا من المائة) = ٧٥٪

٧/٤ = ٧ ÷ ٤ = ١,٧٥ (١٧٥ جزءًا من المائة) = ١٧٥٪

تحويل الكسور الاعتيادية الى كسور عشرية:

الكسر العادي يتكون من بسط ومقام وعند تحويل الكسر العادي الى كسر عشري يجب ان يكون مقامه ١٠ او ١٠٠ او ١٠٠٠ ......وبناء على ذلك نقوم بعملية التحويل

مثال :

١) $\frac{٥}{١٠}$ هنا ننظر الى المقام ونجد انه ١٠ وتحتوي على صفر واحد وبذلك نرسم فاصلة عشرية وعلى يمينها منزلة واحدة(ــ ,) وفي تلك المنزلة نضع ٥ التي بالبسط وبذلك يكون الكسر العشري المتكون هو (٥ , ٠) ويقرأ خمسة من عشرة

٢) $\frac{٧}{١٠٠}$ هنا المقام ١٠٠ و يحتوي على صفران وبذلك نرسم الفاصلة و على يمينها منزلتان فقط (ــ ــ ,) نضع ما في البسط من اليمين الى اليسار حيث نضع ٧ على اخر منزلة من اليمين (٧ ــ ,) وفي الفراغ المتبقي نضع صفر (٧ ٠ ,٠) و يقرأ سبعة من مئة
وعلى هذه الطريقة نستطيع التحويل اذا كان المقام ١٠٠٠

ولكن اذا كان المقام لا يساوي ١٠ او ١٠٠ او ١٠٠٠ ماذا نفعل ؟

مثال :

١) $\frac{٣}{٥}$ ننظر الى المقام ونجد انه ٥ هنا نبحث عن عدد نضربه ب ٥ ليصبح ١٠ او ١٠٠ و ١٠٠٠ فنضرب الخمسة في ٢ وكذلك البسط نضربه في ٢ وبكل سهولة الان نحوله الى كسر عشري و يصبح (٦ , ٠) ويقرأ سته من عشرة.

٢) $\frac{٣}{٤}$ هذا عدد كسري حيث ننظر الى المقام ٤ نبحث عن عدد نضربه ب ٤ و يكون الناتج ١٠٠ المقام فيه صفران اي منزلتان على يمين الفاصلة و العدد الصحيح نضعه على يسار الفاصلة و يصبح (ــ ــ , ٠) (٥ ٧ , ٠) ويقرأ خمسة وسبعون من مئة.

تمارين (١–١)

تدريب (١) : اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

١) أي من الأعداد التالية ليس عددا طبيعيا:

أ) −٣ ب) ١ ج) ٥ د) ١٢٠

٢) أي من الأعداد التالية ليس عددا صحيحا:

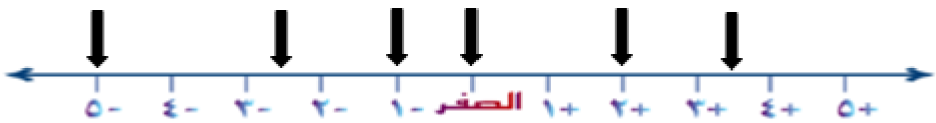
أ) ٩ ب) ٧ ج) $\frac{١}{٢}$ د) ٢

٣) مجموعة الأعداد {٠، −١، −٢، −٣، −٤، ......} تسمى مجموعة :

أ) الأعداد الطبيعية السالبة ب) الأعداد الصحيحة السالبة

ج) الأعداد الصحيحة غير الموجبة د) الأعداد الصحيحة غير السالبة

٤) عدد النقاط المشار إليها بالأسهم وتمثل أعداد صحيحة سالبة هو:



أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

٥) يمكن وصف المجموعة {−٣، −٢، −١، ٠، ١، ٢، ٣، ....} بأنها مجموعة:

أ) الأعداد الطبيعية الأكبر من −٣
ب) الأعداد الطبيعية الأكبر من أو تساوي −٣
ج) الأعداد الصحيحة الأكبر من أو تساوي −٣ والأقل من ٣
د) الأعداد الصحيحة الأكبر من أو تساوي −٣

٦) يمكن وصف المجموعة {....، −٤، −٣، −٢، −١، ٠، ١، ٢، ٣، ٤} بأنها مجموعة:

أ) الأعداد الطبيعية الأقل من ٤
ب) الأعداد الصحيحة الأقل من أو تساوي ٤
ج) الأعداد الصحيحة الأكبر من أو تساوي −٤ والأقل من أو تساوي ٤
د) الأعداد الطبيعية الأقل من أو تساوي ٤

٧) يمكن وصف المجموعة {....، −٤، −٣، −٢، −١، ٠، ١، ٢، ٣، ٤، .....} بأنها مجموعة :

أ) الأعداد الصحيحة

ب) الأعداد الطبيعية

ج) الأعداد الصحيحة الأكبر من أو تساوي −٥ والأقل من أو تساوي ٥

د) الأعداد الطبيعيةالأكبر من أو تساوي −٥ والأقل من أو تساوي ٥

تدريب (٢) : اذكر الخاصية الرياضية المستخدمة في كل مما يأتي:

أ) ٤× (٣+٥) = (٣+٥) ×٤

ب) ٨ + س = س + ٨

ج) (٢ + ب)(٢ + ج) = ٢ (٢ + ب) + ج (٢ + ب)

د) (س + ٣ص) + ٥ ع = س + (٣ص + ٥ ع)

تدريب (٣) : جد ناتج ما يلي :

١) $\frac{٣}{٥} + \frac{٧}{٦}$

٢) ٢ − $\frac{٣}{٧} + \frac{٤}{٥}$

٣) $\left(\frac{٢}{٥} + \frac{١}{٢} \right) \div \left(\frac{١}{١٠} + \frac{٣}{١٥} \right)$

تدريب (٤) : باستخدام المضاعف المشترك الأصغر جد ناتج ما يلي :

١) $\frac{٧}{١٦} - \frac{٥}{١٢}$

٢) $\frac{٣١}{٩٦} + \frac{١١}{٧٢}$

تدريب (٥) : إذا كان س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨} ، ص = {٢، ٤، ٦، ٨، ١٠} ،

ع = {٣، ٥، ٧، ٩} ، جد ما يلي:

أ) س ∪ ص

ب) س ∩ ع

ج) س ∪ ص ∪ ع

تدريب (٦) : إذا كانت درجة الحرارة في الساعة الرابعة فجرا (-١٠ْ) ، ثم ارتفعت درجة الحرارة ظهرا بمقدار (١٦ْ)، وبعده انخفضت في الساعة الخامسة مساء بمقدار (٨ْ) . كم درجة الحرارة في الساعة الخامسة مساء؟

تدريب (٧) : عبر عن الفترات التالية على شكل متباينة:

أ)]-٥ ، ٥[ب) [-٤ ، ٣] ج)]٣ ، ٧] د) [-١ ، ٤[

هـ)]-∞ ، ٤] و) [-٢ ، ∞[ج)]-∞ ، ١[

تدريب (٨) : عبر عن المتباينات التالية على شكل فترات ومثلها في خط الأعداد الحقيقية:

أ) ٢ ≥ س ب) ٣ < س ج) ٦ > س > ١ د) ٧ > س ≥ ٢-

هـ) ٦ ≥ س ≥ ٣- و) ٧ ≥ س > ٠

تدريب (٩) : عبر الأشكال التالية على شكل فترات :

أ)


ب)


ت)


ث)


تدريب (١٠) : جد قيمة ما يلي:-

١) | (-$\frac{١}{٣}$) × ١٥ | ٢) | |١١-٣| -٧ |

تدريب (١١) : مثل الفترات التالية على خط الأعداد:-

١) [-٤ ، ٦[∪ [٠ ، ٨[

٢)]-٢ ، ٨[∩]-∞ ، ٦[

٣)]-∞ ، -٣[∪]٣ ، ∞[

تدريب (١٢) : عبر عن الكسور التالية بالنسبة المئوية:–

١) $\frac{٥}{٨}$ ٢) $\frac{١٧}{٢٥}$ ٣) ٠,٨٧٥ ٤) ٣,٠٢٥

تدريب (١٣) : عبر عن ما يلي بالكسور الاعتيادية في أبسط صورة:–

١) ٥ % ٢) ٣٢ % ٣) ٠,٦٥ ٤) ٠,١٢٥

تدريب (١٤) : عبر عن ما يلي بالكسور العشرية:–

١) ٣,٥ % ٢) ١٨,٧٥ % ٣) $\frac{١١}{٢٥}$

تطبيقات حياتية

١) تشارك اثنان من الأخوة في شراء هدية لأمهما ، فدفع الأول $\frac{٢}{٥}$ قيمة الهدية ، ودفع الثاني بقية المبلغ. فإذا كانت قيمة الهدية ٩٠ ريالا ، فكم دفع كل منهم

٢) اشترت لجين ٩ قطع من الحلوى وأكلت ثلثها ، بينما اشترت منى ١٢ قطعة من الحلوى وأكلت ثلاث أربا ع الحلوى . من منهما أكل أكثر من قطع الحلوى؟

(١–٢): الأسس والجذور

الأسس الموجبة:

$(أ)^{١} = أ$

$(أ)^{٢} = أ \times أ$

$(أ)^{٣} = أ \times أ \times أ$ وهكذا ،،،،

$(أ)^{ن} = أ \times أ \times أ \times أ \times .... \times أ$ (ن من المرات)

أمثلة:–

$٣^{٥} = ٣\times٣\times٣\times٣\times٣$

$(-٢)^{٤} = -٢ \times -٢ \times -٢ \times -٢ = ١٦$

$-٢^{٤} = -(٢)^{٤} = -(٢\times٢\times٢\times٢) = -١٦$

تذكر : $(أ)^{٠} = ١$

في حالة أن الأس عدد سالب نتبع القاعدة الآتية :–

$$(أ)^{-ن} = \frac{١}{(أ)^{ن}}$$

أمثلة :–

١) $(-١٠٢٤٥)^{٠} = ١$

٢) $(٥)^{-٢} = \frac{١}{(٥)^{٢}} = \frac{١}{٥\times٥} = \frac{١}{٢٥}$

٣) $(-٤)^{-٣} = \frac{١}{(-٤)^{٣}} = \frac{١}{(-٤)\times(-٤)\times(-٤)} = \frac{١}{٦٤}$

خواص الأسس :

١) $\text{أ}^{\text{ن}} \times \text{أ}^{\text{م}} = (\text{أ})^{\text{ن}+\text{م}}$

٢) $(\text{أ}^{\text{ن}})^{\text{م}} = (\text{أ})^{\text{ن} \times \text{م}}$

٣) $\dfrac{(\text{أ})^{\text{ن}}}{(\text{أ})^{\text{م}}} = (\text{أ})^{\text{ن}-\text{م}}$ ، $\text{أ} \neq ٠$

٤) $(\text{أ}\times\text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} \times \text{ب}^{\text{ن}}$

٥) $(\text{أ}/\text{ب})^{\text{ن}} = \dfrac{(\text{أ})^{\text{ن}}}{(\text{ب})^{\text{ن}}}$ ، $\text{ب} \neq ٠$

٦) $(\text{أ}/\text{ب})^{-\text{ن}} = (\text{ب}/\text{أ})^{\text{ن}} = \dfrac{(\text{ب})^{\text{ن}}}{(\text{أ})^{\text{ن}}}$ ، $\text{أ} \neq ٠$

٧) $(\text{أب})^{-\text{ن}} = \dfrac{١}{(\text{أب})^{\text{ن}}}$

٨) $\dfrac{١}{(\text{أ})^{-\text{ن}}} = (\text{أ})^{\text{ن}}$

٩) $\dfrac{(\text{أ})^{-\text{ن}}}{(\text{ب})^{-\text{م}}} = \dfrac{(\text{ب})^{\text{م}}}{(\text{أ})^{\text{ن}}}$

مثال (١) : بسط المقادير التالية واكتبها بحيث تكون جميع الأسس موجبة:

١) $(٤\,\text{س}^{-٤}\,\text{ص}^{٥})^{٣}$

٢) $\dfrac{\text{ن}^{-٢}\,\text{م}^{-١}}{٧\,\text{م}^{-٤}\,\text{ن}^{-٣}}$

٣) $\left(\dfrac{\text{ع}^{-٥}}{\text{ع}^{-٢}\,\text{س}^{-١}}\right)^{٦}$

٤) $(-١٠\,\text{م}^{٢}\,\text{ع}^{-٤})^{٢}\,(\text{م}^{٣}\,\text{ع})^{-٥}$

٥) $\dfrac{٥\,\text{س}^{-١}\,\text{ص}^{-٤}}{(٣\,\text{ص}^{٥})^{-٢}\,\text{س}^{٩}}$

٦) $\left(\dfrac{٢٤\,\text{أ}^{٣}\,\text{ب}^{-٨}}{٦\,\text{أ}^{-٥}\,\text{ب}}\right)^{-٢}$

الحل:-

١) $(٤\,\text{س}^{-٤}\,\text{ص}^{٥})^{٣} = ٤^{٣}\,\text{س}^{-١٢}\,\text{ص}^{١٥} = \dfrac{٦٤\,\text{ص}^{١٥}}{\text{س}^{١٢}}$

٢) $\dfrac{\text{ن}^{-٢}\,\text{م}^{-١}}{٧\,\text{م}^{-٤}\,\text{ن}^{-٣}} = \dfrac{\text{ن}^{٣}\,\text{م}^{٤}}{٧\,\text{م}\,\text{ن}^{٢}} = \dfrac{\text{ن}\,\text{م}^{٣}}{٧}$

٣) $\left(\frac{\text{ع}^{-5}}{\text{ع}^{-2}\,\text{س}^{-1}}\right)^{6} = \left(\frac{\text{ع}^{2}\,\text{س}}{\text{ع}^{5}}\right)^{6} = \left(\frac{\text{س}}{\text{ع}^{3}}\right)^{6} = \frac{\text{س}^{6}}{\text{ع}^{18}}$

٤) $\left(-10\,\text{م}^{2}\,\text{ع}^{-4}\right)^{2}\left(\text{م}^{3}\,\text{ع}\right)^{-5} = (-10)^{2}\,\text{م}^{4}\,\text{ع}^{-8}\,\text{م}^{-15}\,\text{ع}^{-5} = \frac{100}{\text{م}^{11}\,\text{ع}^{13}}$

٥) $\frac{5\,\text{س}^{-1}\,\text{ص}^{-4}}{(3\,\text{ص}^{5})^{-2}\,\text{س}^{9}} = \frac{5\,(3\text{ص}^{5})^{2}}{\text{س}\,\text{ص}^{4}\,\text{س}^{9}} = \frac{5\times 9\,\text{ص}^{10}}{\text{ص}^{4}\,\text{س}^{10}} = \frac{45\,\text{ص}^{6}}{\text{س}^{10}}$

٦) $\left(\frac{24\,\text{أ}^{3}\,\text{ب}^{-8}}{6\,\text{أ}^{-5}\,\text{ب}}\right)^{-2} = \left(\frac{24\,\text{أ}^{3}\times\text{أ}^{5}}{6\,\text{ب}^{8}\times\text{ب}}\right)^{-2} = \left(\frac{4\,\text{أ}^{8}}{\text{ب}^{9}}\right)^{-2} = \left(\frac{\text{ب}^{9}}{4\,\text{أ}^{8}}\right)^{2} = \frac{\text{ب}^{18}}{16\,\text{أ}^{16}}$

الصيغة العلمية للعدد:

هو كتابة أعداد على شكل عددين، الأول هو عدد عشري قيمته المطلقة تكون أكبر من واحد أو يساويه و أصغر من عشرة. أما الآخر فهو العدد ١٠ مرفوع لأس معلوم. يتم استخدام هذه الكتابة في اختصار الأعداد الكبيرة. وهي تكتب على الشكل التالي :

$\text{أ}\times 10^{\text{ن}}$ حيث $1 \le \text{أ} < 10$ ، ن عدد صحيح

فمثلا يمكن كتابة العدد ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٥٦ بالصورة العلمية $5{,}6 \times 10^{-9}$

أمثلة :–

$10000 = 1 \times 10^{4}$	$24327 = 2{,}4327 \times 10^{4}$
$1000 = 1 \times 10^{3}$	$7354 = 7{,}354 \times 10^{3}$
$100 = 1 \times 10^{2}$	$482 = 4{,}82 \times 10^{2}$
$10 = 1 \times 10^{1}$	$89 = 8{,}9 \times 10^{1}$
$(1/10) = 0{,}1 = 1 \times 10^{-1}$	$0{,}32 = 3{,}2 \times 10^{-1}$
$(1/100) = 0{,}01 = 1 \times 10^{-2}$	$0{,}053 = 5{,}3 \times 10^{-2}$
$(1/1000) = 0{,}001 = 1 \times 10^{-3}$	$0{,}0078 = 7{,}8 \times 10^{-3}$
$(1/10000) = 0{,}0001 = 1 \times 10^{-4}$	$0{,}00044 = 4{,}4 \times 10^{-4}$

الجذور :-

إذا كان ن عددا صحيحا موجبا أكبر من الواحد ، أ عدد حقيقي فإن :

$\sqrt[ن]{أ} = (أ)^{1/ن}$ حيث ن : دليل الجذر ، أ : العدد المجذور ، $\sqrt{}$: الجذر

$\sqrt[ن]{أ} = ب$ **تدل على** $أ = ب^{ن}$

مثال (٢) : اكتب المقادير الجذرية الآتية في صورة أسية :-

١) $\sqrt[10]{٨س} = (٨ س)^{1/10}$

٢) $\sqrt[5]{٢٤٣} = (٢٤٣)^{1/5} = ٣$ لأن $٣^{5} = ٢٤٣$

٣) $\sqrt{١٦} = (١٦)^{1/2} = ٤$ لأن $٤^{2} = ١٦$

٤) $\sqrt[3]{-١٢٥} = (-١٢٥)^{1/3} = -٥$ لأن $(-٥)^{3} = -١٢٥$

وبالعكس ، يمكن كتابة الصورة الأسية في صورة جذرية كالآتي:-

$(أ)^{م/ن} = (أ^{1/ن})^{م} = (\sqrt[ن]{أ})^{م}$ أو $(أ)^{م/ن} = (أ^{م})^{1/ن} = \sqrt[ن]{أ^{م}}$

خواص الجذور :-

إذا كانت ن عدد صحيح أكبر من ١ ، و العددان أ ، ب عددان حقيقيان فإن :-

١) $\sqrt[ن]{أ\,ب} = \sqrt[ن]{أ}\;\sqrt[ن]{ب}$

٢) $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$

٣) $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = \begin{cases} |أ| & \text{إذا كانت ن عدد زوجي} \\ أ & \text{إذا كانت ن عدد فردي} \end{cases}$

مثال (٣) : بسط المقادير الآتية (افترض س ، ص ، ع أعداد موجبة):-

١) $\sqrt{\text{ص}^{٧}} = \sqrt{\text{ص}^{٦} \times \text{ص}} = \text{ص}^{٣}\sqrt{\text{ص}}$

٢) $\sqrt[٩]{\text{س}^{٦}} = (\text{س}^{٦})^{١/٩} = (\text{س})^{٢/٣} = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$

٣) $\sqrt{١٨\,\text{س}^{٦}\,\text{ص}^{١١}} = \sqrt{٩\times٢\,(\text{س}^{٣})^{٢}\,(\text{ص}^{٥})^{٢}\,\text{ص}} = ٣\,\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٥}\sqrt{٢\text{ص}}$

٤) $\sqrt[٤]{٣٢\,\text{س}^{٩}\,\text{ص}^{٥}\,\text{ع}^{١٢}} = \sqrt[٤]{١٦\,\text{س}^{٨}\,\text{ص}^{٤}\,\text{ع}^{١٢}\,(٢\text{س ص})} = ٢\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}\,\text{ع}^{٣}\sqrt[٤]{٢\text{س ص}}$

٥) $\sqrt[٣]{٩\text{س}^{٢}}\,\sqrt[٣]{٦\text{س}^{٢}} = \sqrt[٣]{(٩\text{س}^{٢})(٦\text{س}^{٢})} = \sqrt[٣]{٥٤\,\text{س}^{٤}} = \sqrt[٣]{٢٧\text{س}^{٣}(٢\text{س})} = ٣\text{س}\sqrt[٣]{٢\text{س}}$

انطاق المقام :-

هي جعل المقام خالياً من الجذر التربيعي وذلك عن طريق ضرب البسط والمقام في مرافق المقام. فمثلا:

$$\frac{١}{\sqrt{\text{س}}} = \frac{١}{\sqrt{\text{س}}} \times \frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}} = \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}$$

$$\frac{٣}{\sqrt{٢}} = \frac{٣}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$$

$$\frac{٦\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} = \frac{٦\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٦\sqrt{٢\times٣}}{\sqrt{٣\times٣}} = \frac{٦\sqrt{٦}}{٣} = ٢\sqrt{٦}$$

انتبه :

إذا كان المقام على الصورة $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}}$ حيث $\text{م} < \text{ن}$ فإننا نضرب المقام في $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{ن}-\text{م}}}$ كي نتخلص من الجذر في المقام. فمثلا :-

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}}\,\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{ن}-\text{م}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}+\text{ن}-\text{م}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{س}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\text{ص}^{2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\text{ص}^{2}}} \times \frac{\sqrt[3]{\text{ص}}}{\sqrt[3]{\text{ص}}} = \frac{\sqrt[3]{\text{ص}}}{\sqrt[3]{\text{ص}^{3}}} = \frac{\sqrt[3]{\text{ص}}}{\text{ص}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[7]{\text{ب}^{2}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\text{ب}^{2}}} \times \frac{\sqrt[7]{\text{ب}^{5}}}{\sqrt[7]{\text{ب}^{5}}} = \frac{\sqrt[7]{\text{ب}^{5}}}{\sqrt[7]{\text{ب}^{7}}} = \frac{\sqrt[7]{\text{ب}^{5}}}{\text{ب}}$$

تمارين (١–٢)

تمرين (١) : بسط ما يلي عن طريق كتابة الناتج بالأسس الموجبة فقط :

١) $\text{س}^{-5}\ \text{س}^{5}$

٢) $(3\,\text{س}^{2})(5\,\text{س}^{4})(4\,\text{س}^{3})$

٣) $(3\,\text{ع}^{-2}\,\text{ن}^{3})^{-2}$

٤) $\left(\frac{\text{ر}^{2}\,\text{س}^{3}}{\text{ب}\,\text{ن}^{4}}\right)^{5}$

٥) $\frac{10^{19} \times 10^{-14}}{10^{-5} \times 10^{3}}$

٦) $\frac{20\,\text{س}^{-4}\,\text{ص}^{5}}{4\,\text{س}^{4}\,\text{ص}^{-3}}$

٧) $\frac{15 \times 10^{-7}}{5 \times 10^{-5}}$

٨) $\frac{32\,\text{ن}^{5}\,\text{ن}^{-8}}{24\,\text{م}^{-7}\,\text{م}^{7}}$

٩) $\left(\frac{2\,\text{س}^{-3}\,\text{ص}^{2}}{4\,\text{س}\,\text{ص}^{-1}}\right)^{-2}$

١٠) $\left(\left(\frac{\text{س}^{-2}\,\text{ص}^{3}\,\text{ت}}{\text{س}^{-3}\,\text{ص}^{-2}\,\text{ت}^{2}}\right)^{2}\right)^{-1}$

تمرين (٢) : اكتب المقادير التالية على الصورة الأسية :

١) $\sqrt[5]{\text{ب}}$

٢) $\sqrt{\text{س}}$

٣) $\sqrt[4]{\text{س}^{3}}$

٤) $\sqrt[9]{\text{س}^{5}}$

تمرين (٣) : اكتب المقادير التالية في أبسط صورة :

١) $\text{س}^{\frac{1}{5}}$

٢) $\text{ص}^{\frac{3}{7}}$

٣) $\text{ع}^{\frac{2}{3}}$

٤) $\text{ل}^{\frac{1}{2}}$

تمرين (٤) : اكتب الأعداد التالية بالصيغة العلمية :

١) ٣٥٤٢٠٠٠٠٠

٢) ٤٣٦٠

٣) ٠,٠٥٥

٤) ٠,٠٢٩٦

٥) ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٤٨

٦) ٠,٠٠٠٤٩٦

تمرين (٥) : اكتب الأعداد التالية في الصورة العشرية :

١) $١,٥ \times ١٠^{-٦}$

٢) $٣,٤٨ \times ١٠^{٦}$

٣) ٧×١٠^{-٥}

٤) ٣×١٠^{-٤}

٥) $٨,٣٦ \times ١٠^{٨}$

٦) ٢×١٠^{٢}

تمرين (٦) : ما الفرق بين $٢^{(٣^{٢})}$ ، $(٢^{٣})^{٢}$ ؟

تمرين (٧) : في سبتمبر ٢٠٠٨ كان عدد سكان الولايات المتحدة $٢,٠٦٠ \times ١٠^{٨}$ ، وكان الدين الوطني $١,٢٣٠ \times ١٠^{١٢}$. كم قيمة مشاركة كل فرد في هذا الدين ؟

تمرين (٨) : المسافة بين الأرض والشمس حوالي ٩٣ مليون ميل . عبر عن هذه المسافة بالصيغة العلمية .

تمرين (٩) : جد كتلة ٥ مليون جسيم غباري إذا كانت كتلة الجسيم الواحد تساوي $٧,٥٣ \times ١٠^{-١٠}$ جم.

(١–٣): القياسات وتحويل وحدات القياسات

تعددت الانظمة المستخدمة للقياس في العالم, فمنذ مئات السنين والدول تستخدم انظمة قياس خاصة بها تختلف عن كل دولة ... وبسبب تعدد هذه الانظمة برزت العديد من المشاكل التي واجهت الناس العاديين والعلماء الذين يرغبون في تبادل المعلومات ... لذلك تم عقد مؤتمر عالمي للأوزان والمقاييس في عام ١٩٦٠ , اتفق فيه العلماء على ضرورة اعتماد نظام موحد للقياس .وسمي هذا النظام بـ (النظام العالمي للوحدات) ويرمز له بالرمز (SIU) حيث يمثل هذا الرمز اختصار الكلمات الانجليزية التي تعطي معنى النظام العالمي للوحد ات وهي (System International Unit) . ومن أبرز الانظمة التي كانت تستخدمها الدول في الماضي : النظام الهندسي البريطاني : والذي يحتوي على الوحدات التالية " الباوند , قدم , ثانية " ، والنظام المتري : ويحتوي على الوحدات التالية " كغ , متر , ثانية " وعرف بنظام **mks**.

السابقة	ترجمة بادئة	الرمز E	10^n	الرقم العشري	التسمية	مُتبنى مُنذ
يوتا	ثمانية	Y	10^{24}	1000000000000000000000000	سبتيليون	1991
زيتا	سبعة	Z	10^{21}	1000000000000000000000	سكستليون	1991
إكسا	ستة	E	10^{18}	1000000000000000000	كوينتيليون	1975
بيتا	خمسة	P	10^{15}	1000000000000000	كدريليون	1975
تيرا	وحش	T	10^{12}	1000000000000	تريليون	1960
جيجا	عملاق	G	10^{9}	1000000000	مليار	1960
ميغا	عظيم	M	10^{6}	1000000	مليون	1960
كيلو	ألف	k	10^{3}	1000	ألف	1795
هكتو	مائة	h	10^{2}	100	مائة	1795
ديكا	عشرة	da	10^{1}	10	عشرة	1795
ديسي	عاشر	d	10^{-1}	0.1	عُشر (جزء من عشرة)	1795
سنتي	مائة	c	10^{-2}	0.01	جزء من مائة	1795
ميللي	الالف	m	10^{-3}	0.001	جزء من ألف	1795
مايكرو	صغير	µ	10^{-6}	0.000001	جزء من مليون	1960
نانو	قزم	n	10^{-9}	0.000000001	جزء من مليار	1960
بيكو	صغير	p	10^{-12}	0.000000000001	جزء من تريليون	1960
فيمتو	خمسة عشر	f	10^{-15}	0.000000000000001	جزء من كدريليون	1964
أتو	ثمانية عشر	a	10^{-18}	0.000000000000000001	جزء من كوينتيليون	1964

زيبتو	سبعة	z	10^{-21}	0.000000000000000000001	جزء من سكستليون	1991
يوكتو	ثمانية	y	10^{-24}	0.000000000000000000000001	جزء من سبتيليون	١٩٩١

*(المصدر : موقع ويكيبديا بشبكة الانترنت العالمية)

هناك ٧ وحدات أساسية في النظام الدولي للوحدات (SIU) هي:

المتر	ويقاس بواسطته الطول ويرمز له بالرمز" م "ويحدد المتر الطولي بالطول الموجي لإشعاع ذرة الكريبتون .
الكيلوغرام	وتقاس بواسطته الكتلة ويرمز له بال" كغم . "
الثانية	ويقاس بها الزمن ويرمز لها بال" ث "وتحدد بمدة اشعاع ذرة السيزيوم .
الأمبير	ويقاس به شدة التيار الكهربائي ويحدد بالقوة الكهروديناميكية بين موصلين، ويقاس بالأمبير (أ).
الكلفن	وتقاس به درجة الحرارة ويرمز له ب" ك . "
الشمعة	وتقيس شدة الضوء وليس لها اختصار) في الإنجليزية ("cd") وهي مقدار الإشعاع الناتج من ذرة البلاتين بلاتين المتجمدة .
المول	وحدة لقياس كمية المادة ويستخدم عادة في الكيمياء، والمول هو عدد أفوجادرو (تقريبا ٦,٠٢٢١٤١٥ × ١٠^{23}) من الجزيئات الأساسية، سواء كان الحديث يدور عن ذرات أو جزيئات لمركب ما .

وحدات الطول :-

وحدات الطول هي عبارةٌ عن مقاييس تستخدم لقياس طول شيءٍ ما، وقد استخدم الإنسان قديماً وحداتٍ مختلفةٍ لقياس الأطوال؛ فقبل النظام العالمي للوحدات كان الإنسان يستخدم أعضاءه لقياس الأطوال؛ فاستخدموا القدم، والشبر، والذراع، وبعد وضع نظامٍ عالمي للوحدات، فقد أصبح هناك وحداتٌ موحدةٌ في جميع الدول، وهي الكيلومتر، والمتر، والديسيمتر، والسنتيمتر، والمليمتر، وهنا سنوضح التحويلات بين هذه الوحدات.

١ كيلو متر = ١٠٠٠ متر

١ هيكتومتر = ١٠٠ متر

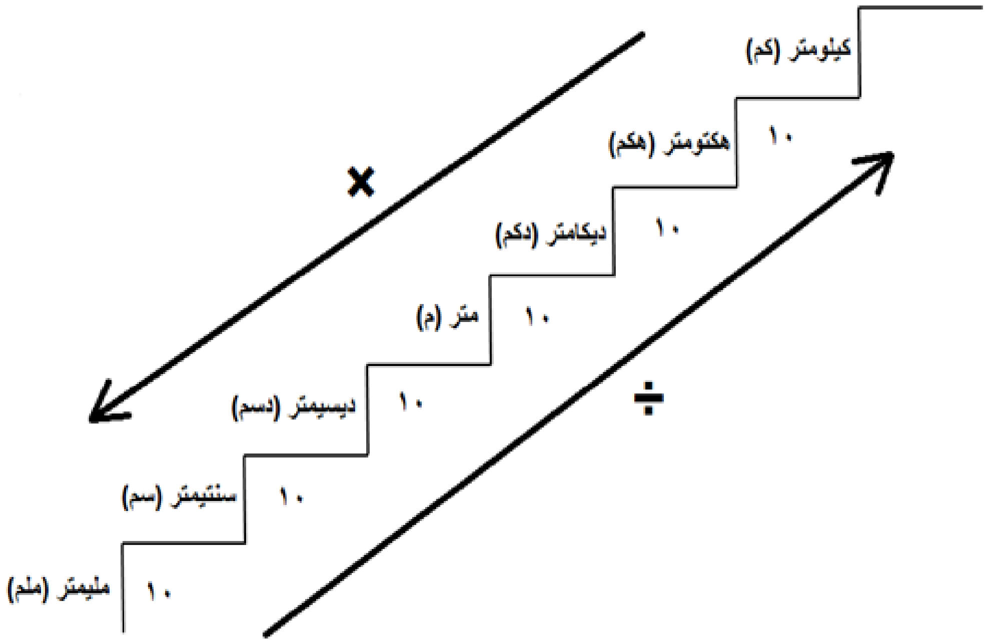
١ ديكامتر = ١٠ متر

١ ديسيمتر = ٠,١ متر (١ م = ١٠ دسم)

١ سنتيمتر = ٠,٠١ متر (١م = ١٠٠ سم)

١ ملليمتر = ٠,٠٠١ متر (١ م = ١٠٠٠ ملم)

للتحويل بين وحدات الطول نستعين بالمخطط التالي:



مثال(١): إذا علمت أن طول سور حديقة يساوي ٥٢٠ م ، فجد الطول بوحدة الديسيمتر.

الحل: ٥٢٠ م = (٥٢٠×١٠) دسم = ٥٢٠٠ دسم

المطلوب هو التحويل من وحدة المتر إلى الديسيمتر، أي من الوحدة الكبيرة إلى الوحدة الأصغر منها مباشرة، وعند التحويل من كبيرة لأصغر منها **نضرب**.

مثال(٢): إذا علمت أن المسافة بين قريتين يساوي ٥٠٠٠٠ دسم ، فجد المسافة بوحدة الكيلومتر.

الحل:

٥٠٠٠٠ دسم = (٥٠٠٠٠ ÷ ١٠٠٠٠) كم = ٥ كم

المطلوب هو التحويل من وحدة الديسيمتر إلى الكيلومتر، أي من الوحدة الصغيرة إلى الوحدة الأكبر منها، وعند التحويل من وحدة صغيرة لأكبر منها **نقسم**.

وحدات الكتلة:-

الكتلة هي عبارة عن مقدار ما يحتويه الجسم من مادة، أيّ أنّ كُتل الأجسام سواء كانت صغيرة أم كبيرة تبقى ثابتة في أيّ مكان. ويختلف الوزن عن الكتلة بأنّ الوزن كمية فيزيائيّة متّجهة، ويُقاس بوحدة النيوتن، ويساوي كتلة الجسم مضروباً بتسارع الجاذبية (الوزن = الكتلة × تسارع الجاذبيّة)، أمّا الكتلة؛ فيتمُّ قياسُها باستخدام وسائل وطرق مختلفة أهمها ميزان ذي الكفّتين –الذي يُستخدم في قياس كتل المواد الغذائية والخضروات لدى البائعين– إضافةً للميزان المستخدم في قياس كتل الشاحنات والحمولة الكبيرة، وغيرُها من أنواع الميزان المختلفة التي تختلف تخصُّصاتها.

١ كيلوغرام = ١٠٠٠ غرام

ا هيكتوغرام = ١٠٠ غرام

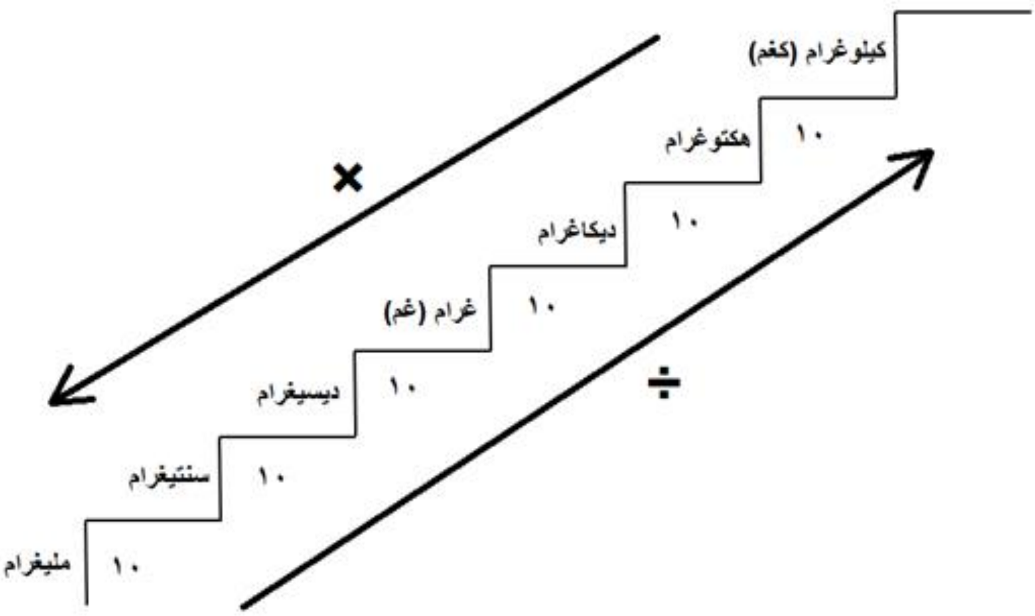
١ ديكاغرام = ١٠ غرام

١ ديسيغرام = ٠,١ غرام (١غم = ١٠ ديسيغرام)

١ سنتيغرام = ٠,٠١ غرام (١غم = ١٠٠ سنتيغرام)

١ ملليغرام = ٠,٠٠١ غرام (١ م = ١٠٠٠ ملغم)

للتحويل بين وحدات الكتلة نستعين بالمخطط التالي:



مثال(٣): إذا علمت أن كتلة قطعة من الخشب يساوي ٦٠ جم، فجد الكتلة بوحدة المليغرام.

الحل: ٦٠ جم = (٦٠ × ١٠٠٠) ملغم = ٦٠٠٠٠ ملغم.

المطلوب هو التحويل من وحدة الجرام إلى المليغرام، أي من الوحدة الكبيرة إلى الوحدة الأصغر منها مباشرة،

وعند التحويل من كبيرة لأصغر منها **نضرب**.

وحدات الحجم:-

تشغل المجسمات (ثلاثية الأبعاد) حيزاً ومكاناً ما يسمى بالحجم، فعُلبة الألوان، والغُرفة، والخزّان جميعها عبارة عن مجسمات تشغل حيزاً معيناً، ويُعرّف حَجم المجسم (سعة المجسم) بأنهُ عدد الوحدات المكعبة التي تعمل على تعبئة المكان والحيز الذي يشغلهُ المجسم.

يبين الجدول الآتي علاقة وحدات قياس الحجم المستخدمة في النظام المعتمد دولياً، وهو النظام المتري:-

١ متر مكعب (م^{٣}) = ١٠٠٠ دسم^{٣}	**١ دسم^{٣} = ١ لتر**
١ ديسمتر مكعب (دسم^{٣}) = ١٠٠٠ سم^{٣}	**١ م^{٣} = ١٠٠٠ لتر**
١ سنتيمتر مكعب (سم^{٣}) = ١٠٠٠ ملم^{٣}	**١ لتر = ١٠٠٠ ملليتر**

مثال(٤): إذا علمت أن حجم علبة كرتونية يساوي ٢ م^{٣}، فجد الحجم بوحدة الديسيمتر.

الحل: ١ م^{٣} = ١٠٠٠ دسم^{٣}

المطلوب هو التحويل من وحدة المتر إلى الديسيمتر، أي من الوحدة الكبيرة إلى الوحدة الأصغر منها مباشرة، وعند التحويل من كبيرة لأصغر منها **نضرب**.

الحجم بالديسيمتر= ٢×١٠٠٠.

٢٠٠٠ هو حجم العلبة بالديسيمتر (٢٠٠٠ دسم^{٣}).

مثال(٥): إذا علمت أن حجم محاة يساوي ٣سم^{٣} ، فجد الحجم بوحدة الملليمتر.

الحل:

١ سم^{٣} = ١٠٠٠ ملم^{٣}

الحجم بوحدة الملليلتر= ٣×١٠٠٠.

٣٠٠٠ حجم المحاة بوحدة الملليمتر (٣٠٠٠ ملم^{٣}).

مثال(٦): إذا علمت أن حجم خزان يساوي ٣٠٠٠٠ دسم^٣ ، فجد الحجم بوحدة المتر مكعب.

الحل:

١ م^٣ = ١٠٠٠ دسم^٣ .

المطلوب هو التحويل من وحدة الديسيمتر إلى المتر، أي من الوحدة الصغيرة إلى الوحدة الأكبر منها، وعند التحويل من وحدة صغيرة لأكبر منها **نقسم**.

الحجم بالأمتار=٣٠٠٠٠/ ١٠٠٠

٣٠ هو حجم الخزان بالأمتار (٣٠م^٣).

مثال(٧): إذا علمت أن حجم إحدى الصناديق الخاصة بالألعاب يساوي ٦٠٠٠ سم^٣ ، فجد الحجم بوحدة الديسيمتر.

الحل:

١دسم^٣ = ١٠٠٠سم^٣ .

الحجم بالديسيمتر= ٦٠٠٠/١٠٠٠، (عند التحويل من وحدة صغيرة إلى أخرى أكبر منها نقسم).

٦ هو حجم الصندوق بالديسيمتر (٦ دسم^٣).

وحدات الزمن:–

وحدة الزمن كما تُعرف في نظام الوحدات الدولي هي الثانية وتم تحديدها لتكون تسعة آلاف مليون (٩١٩٢٦٣١٧٧٠) فترة اشعاع لذرة عنصر السيزيوم . (موقع ويكيبيديا . الانترنت)

السنة الواحدة = ١٢ شهرا = ٥٢ أسبوعا = ٣٦٥ يوما

الأسبوع = ٧ أيام ، اليوم = ٢٤ ساعة ، الساعة = ٦٠ دقيقة ، الدقيقة = ٦٠ ثانية

العقد = ١٠ سنوات ، القرن = ١٠٠ سنة

تمارين (١–٣)

تدريب (١) : عبر عن ما يلي بالأمتار :-

١) ١٥ سم ٢) ٢م و٤٥سم ٣) ٤٥٦ سم ٤) ٤كم و ٨٥م

تدريب (٢) : عبر عن ما يلي بالكيلومترات :-

١) ٨م ٢) ٤٥م ٣) ٧٧٧٧م ٤) ١٥٠ سم

تدريب (٣) : عبر عن ما يلي بالكيلوغرامات :-

١) ٢ جم ٢) ٢٥٠ جم ٣) ٤٥٧٠ جم

تدريب (٤) : علبة بطاطس كتلتها ١٥٠ جرام . جد كتلة ١٢ علبة بطاطس من نفس النوع (بالجرام وبالكيلوجرام).

تدريب (٥) : اكمل الجدول التالي :-

٩٩,٣ كم = ... م	٣٢١١٠ جم = ... كجم
٨٢,٣٦١ كم = ... م	٦١٣٠٠ كجم = ... غم
٣٥٤٨ كم = ... م	٣٧,٢ سم = ... ملم
٥٧٤٢ سم = ... م	١٤,٣٦ سم = ... ملم
٩٢٠ ملم = ... سم	٥٧٦,٥ ملم = ... سم

تدريب (٦) : مها اشترت قطعة من القماش طولها متر و ٤٠ سم لابنها الأكبر ، وقطعة أخرى لابنها الأصغر طولها متر و ٨٠ سم .

تدريب (٧) : علبة زيت تحتوي ٥ ليترات من الزيت . إذا استخدم لتر و ٢٠٠ ملل من الزيت من العلبة، فكم يتبقى فيها؟

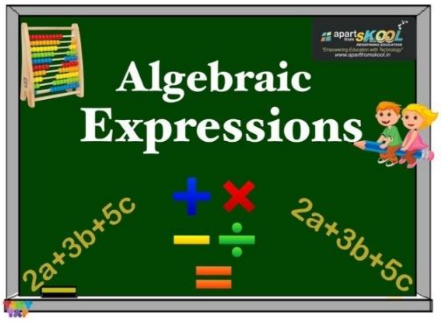
تدريب (٨) : صنبور يقطر منه الماء بمعدل ١٥٠ ملل في الساعة .كم عدد اللترات الذي تقطر من الصنبور خلال ٨ ساعات؟

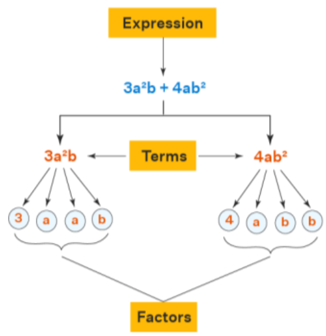
تدريب (٩) : إبريق يتسع حوالي ٩٠٠ ملل من الشاي.كم عدد الأكواب ذات سعة ١٥٠ ملل يمكن ملأها من الإبريق؟

الرياضيات الأساسية

Basic Mathematics

الوحدة الثانية : المقادير الجبرية والحدوديات





الوحدة الثانية : (٢–١) المقادير الجبرية والحدوديات

المقدار الجبرى هو ما تكون من حد جبري أو أكثر يفصل بين كل حد وآخر علامة (+) أو(–)

أمثلة :

٥س^{٢} +٢ ، ٣س^{٤} + ٢س^{٢} –٥ ، س +ص –٨ ، س +٩ ، $\sqrt{(٢س - ٤)^{٢}}$ ، $\dfrac{٢٠ \text{ س}^{-٤} \text{ ص}^{٥}}{٤ \text{ س}^{٤} \text{ ص}^{-٣}}$

ملاحظة : الحد الجبري عبارة عن حاصل ضرب معامل في متغير أو أكثر، مثل (٢ س ص) فالمعامل هو (٢) والمتغيرات هي (س) ، (ص) .

الحدودية هي تركيب جبري يتكون من واحد أو أكثر من المعاملات والمتغيرات، يتم بناؤه باستخدام عمليات الجمع والطرح والضرب والأسس الصحيحة غير السالبة، وتكتب على الصورة

أ$_{ن}$س^{ن} + أ$_{ن-١}$س$^{ن-١}$ + أ$_{ن-٢}$س$^{ن-٢}$ + ... + أ$_{١}$س + أ$_{.}$ حيث أ$_{ن}$ ، أ$_{ن-١}$ ، .... ، أ$_{١}$، أ$_{.}$ أعداد حقيقية، ن عدد صحيح غير سالب.

ويمثل أعلى أس في الحدودية درجة الحدودية ، فعندما أ$_{ن}$ $\neq$ صفر تكون الحدودية من الدرجة ن .

أمثلة:–

الحدودية	النوع	الحدود الجبرية	الدرجة
٣س٢ –٢س +٤	ثلاثية (مكونة من ٣ حدود)	٣س٢ ، ٢س ، ٤	الثانية
س^{٦} + ٥ س	ثنائية (مكونة من حدين)	س^{٦} ، ٥ س	السادسة
٣–س – س^{٢} + س^{٣}	رباعية (مكونة من أربعة حدود)	٣، س ، س^{٢} ، س^{٣}	الثالثة
٧س + ١	ثنائية (مكونة من حدين)	٧س ، ١	الأولى
٥ س^{٢}	حدانية (مكونة من حد واحد)	٥س^{٢}	الثانية
٨	حدانية (مكونة من حد واحد)	٨	صفر

جمع وطرح الحدوديات

مثال (١):– جد (س^{٣} –٥س^{٢} +٣س +٥) + (س^{٣} +٢س^{٢} –٧س +٢)

الحل : نقوم بتجميع الحدود المتشابهة (تحتوي على نفس المتغير بنفس الأس)

(س^{٣} –٥س^{٢} +٣س +٥) + (س^{٣} +٢س^{٢} –٧س +٢)

= (س^{٣} +س^{٣}) +(–٥س^{٢} +٢س^{٢})+(٣س –٧س)+(٥ +٢) = ٢س^{٣} –٣س^{٢} –٤س +٧

مثال (٢) :– جد (س^{٣} –٥س^{٢} +٣س +٥) – (س^{٣} +٢س^{٢} –٧س +٢)

الحل:– هنا عملية طرح ، وتختلف عن عملية الجمع في أن اشارة الطرح سوف تتوزع على جميع حدود المطروح

أي أن :

(س^{٣} –٥س^{٢} +٣س +٥) – (س^{٣} +٢س^{٢} –٧س +٢)

= س^{٣} –٥س^{٢} +٣س +٥ – س^{٣} –٢س^{٢} +٧س –٢

= (س^{٣}–س^{٣})+(–٥س^{٢}–٢س^{٢})+(٣س+٧س)+(٥–٢) = –٧س^{٢} –١٠س +٣

ضرب الحدوديات

مثال (٣): جد حاصل ضرب (٢س – ١)(٣س + ٢)

الحل :– (٢س – ١)(٣س + ٢) = ٦س^{٢} + ٤س – ٣س – ٢ = ٦س^{٢} + س – ٢

مثال (٤):– جد حاصل ضرب (٢س – ٣ص)(٥س + ٢ص)

الحل :– (٢س – ٣ص)(٥س + ٢ص) = ١٠س^{٢} + ٤س ص – ١٥س ص – ٦ص^{٢}

= ١٠س^{٢} –١١س ص –٦ص^{٢}

نواتج ضرب خاصة:–

١) (س + ص) (س – ص) = س^{٢} – ص^{٢}
٢) (س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢}
٣) (س – ص)^{٢} = س^{٢} – ٢س ص + ص^{٢}
٤) (س + ص)^{٣} = س^{٣} + ٣س^{٢} ص + ٣س ص^{٢} + ص^{٣}
٥) (س – ص)^{٣} = س^{٣} – ٣س^{٢} ص + ٣س ص^{٢} – ص^{٣}

مثال (٥) :– جد ناتج (٢س – ٣ص)^{٢}

الحل :– باستخدام نواتج الضرب الخاصة (٢س – ٣ص)^{٢} = (٢س)^{٢} – ٢(٢س)(٣ص) + (٣ص)^{٢}

= ٤س^{٢} ١٢ س ص + ٩ص^{٢}

مثال (٦) :– جد حاصل ضرب (٣س + ٢)(٢س^{٢} – ٤س + ٥)

الحل: (٣س + ٢)(٢س^{٢} – ٤س + ٥)

= ٣س (٢س^{٢} – ٤س + ٥) + ٢(٢س^{٢} – ٤س + ٥) باستخدام خاصية التوزيع

= (٣س)(٢س^{٢}) + (٣س)(–٤س) +(٣س)(٥) + ٢(٢س^{٢}) +٢(–٤س) + ٢(٥) باستخدام خاصية التوزيع

= ٦س^{٣} – ١٢س^{٢} + ١٥س + ٤س^{٢} – ٨س + ١٠ باستخدام قوانين الأسس

= ٦س^{٣} – ٨س^{٢} + ٧س + ١٠ تجميع الحدود المتشابهة

العامل المشترك وتحليل الحدوديات

التحليل بإخراج العامل المشترك (Factoring Out Common Factors)

مثال (٧) : حلل الحدودية التالية بإخراج العامل المشترك :

أ) ٢س^{٣} ص – ٨س^{٢} ص^{٢} – ٦س ص^{٣}

الحل :– العامل المشترك بين الثلاثة حدود هو (٢س ص)

٢س^{٣} ص – ٨س^{٢} ص^{٢} – ٦س ص^{٣} = (٢س ص) (س^{٢} – ٤س ص – ٣ص^{٢})

ب) ٢س (٣س – ٢) –٧(٣س – ٢)

الحل :– العامل المشترك هو (٣س – ٢)

٢س (٣س – ٢) –٧(٣س – ٢) = (٣س – ٢) (٢س – ٧)

تحليل الحدوديات عن طريق تجميع الحدود لمجموعات :

مثال (٨) : حلل الحدودية :

أ) ٣س^{٣} – ٦س + ٤س^{٤} – ٨س^{٢}

الحل : ٤س^{٤} + ٣س^{٣} – ٨س^{٢} – ٦س = س^{٣} (٤س + ٣) – ٢س(٤س + ٣)

= (٤س + ٣) (س^{٣} – ٢س)

= س (س^{٢} –٢)(٤س + ٣)

ب) أ ص + أ ع – ٢ س ص – ٢س ع

الحل : أ (ص + ع) –٢س (ص + ع) = (ص + ع) (أ – ٢س)

ج) ٣ أ ن + ب د – ٣ أ د – ب ن

الحل : ٣أ ن – ب ن – ٣ أ د + ب د = ن(٣ أ – ب) – د (٣ أ – ب)

= (٣ أ – ب) (ن – د)

حالات خاصة في تحليل الحدوديات :

١) المربع الكامل

أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢} = (أ + ب)^{٢}

أ^{٢} – ٢ أ ب + ب^{٢} = (أ – ب)^{٢}

٢) الفرق بين مربعين :

أ^{٢} – ب^{٢} = (أ + ب) (أ – ب)

٣) الفرق ومجموع مكعبين :

أ^٣ – ب^٣ = (أ – ب) (أ^٢ + أ ب + ب^٢)

أ^٣ + ب^٣ = (أ + ب) (أ^٢ – أ ب + ب^٢)

مثال (٩) :حلل ما يلي:-

١) س^٢ + ٦س ص + ٩ ص^٢

٢) ٩س^٢ – ٤ص^٢

٣) ٨ م^٣ – ١

٤) أ^٣ + ب^٣ د^٣

الحل :-

١) س^٢ + ٦س ص + ٩ص^٢ = س^٢ + ٢(س)(٣ص) + ٩ص^٢ = (س + ٣ص)^٢

٢) ٩س^٢ – ٤ص^٢ = (٣س)^٢ – (٢ص)^٢ = (٣س – ٢ص)(٣س + ٢ص)

٣) ٨ م^٣ – ١ = (٢م)^٣ – (١)^٣ = (٢م – ١)(٤م^٢ + ٢م + ١)

٤) أ^٣ + ب^٣ د^٣ = (أ)^٣ + (ب د)^٣ = (أ + ب د)(أ^٢ – أ ب د + ب^٢ د^٢)

تحليل الحدودية الثلاثية :

طريقة المحاولة والخطأ :-

مثال (١٠): حلل الحدودية الثلاثية : س^٢ + ٢س – ١٥

الحل: في البداية تعلم أن تحليل الحدودية الثلاثية تكون على الصورة :

س^٢ + ٢س – ١٥ = (س + ...) (س + ...)

ثم نبحث عن عددين حاصل ضربهما –١٥ ومجموعهما ٢ ، سنجد أنهما العددان –٣ ، ٥

إذن س^٢ + ٢س – ١٥ = (س + ٥) (س – ٣)

مثال (١١) :حلل الحدودية الثلاثية : س^٢ – ١٠س + ٢٤

الحل: س^٢ – ١٠س + ٢٤ = (س + ...) (س + ...)

ثم نبحث عن عددين حاصل ضربهما ٢٤ ومجموعهما –١٠ ، سنجد أنهما العددان –٦ ، –٤

إذن س^٢ – ١٠س + ٢٤ = (س – ٦) (س – ٤)

مثال (١٢) : حلل الحدودية الثلاثية : ٣س^{٢} + ٢ س − ٨

الحل: تلاحظ أن معامل س^{٢} هنا يساوي عدد غير الواحد

٣س^{٢} + ٢ س − ٨ = (٣س + ...) (س + ...)

ثم نبحث عن عددين حاصل ضربهما − ٢٤ (عبارة عن حاصل ضرب معامل س^{٢} (٣) والحد المطلق (−٨)) ومجموعهما ٢ (معامل الحد الأوسط) ، سيكون العددان ٦ ، −٤

٦ × ٤-
٨ × ٣-
١٢ × ٢-
٢٤ × ١-

إذن ٣س^{٢} + ٢ س − ٨ = ٣س^{٢} + ٦ س − ٤س − ٨

= (٣س^{٢} + ٦ س) + (− ٤س − ٨)

= ٣س (س + ٢) −٤ (س + ٢)

= (س + ٢) (٣س − ٤)

مثال (١٣) : حلل الحدودية الثلاثية : ٥س^{٢} − ١٧ س + ٦

الحل: تلاحظ أن معامل س^{٢} = ٥

٥س^{٢} − ١٧ س + ٦ = (٥س + ...) (س + ...)

نبحث عن عددين حاصل ضربهما ٣٠ (عبارة عن حاصل ضرب معامل س^{٢} (٥) والحد المطلق (٦)) ومجموعهما −١٧ (معامل الحد الأوسط) ، سيكون العددان −١٥ ، −٢

٦- × ٥-
١٠- × ٣-
١٥- × ٢-
٣٠- × ١-

إذن ٥س^{٢} − ١٧ س + ٦ = ٥س^{٢} − ١٥ س −٢س + ٦

= (٥س^{٢} −١٥س) + (− ٢س + ٦)

= ٥س (س − ٣) − ٢ (س − ٣)

= (س − ٣) (٥س − ٢)

قسمة كثيرات الحدود :

خوارزمية القسمة :

إذا كان د(س) ، هـ(س) كثيرات حدود ، هـ(س) $\neq$ صفر ، فإن $\frac{\text{د(س)}}{\text{هـ(س)}}$ يعطى بالعلاقة :

د(س) = هـ (س) × ك (س) + ر (س) حيث ر (س) = صفر أو درجة ر (س) < درجة هـ (س)

يسمى د (س) المقسوم ، هـ (س) المقسوم عليه ، ك(س) خارج القسمة ، ر(س) الباقي

أي أن: المقسوم = المقسوم عليه × خارج القسمة + الباقي

مثال (١): جد خارج قسمة د(س) = ٣ س^{٣} + ١٦س^{٢} + ٢١س + ٢٠ على هـ (س) = س + ٤

الحل : باستخدام القسمة المطولة :

٣س^{٢} + ٤س + ٥

س + ٤ | ٣ س^{٣} + ١٦س^{٢} + ٢١س + ٢٠

- ٣ س^{٣} + ١٢س^{٢}

٤ س^{٢} + ٢١س + ٢٠

- ٤ س^{٢} + ١٦س

٥ س + ٢٠

- ٥ س + ٢٠

٠

مثال (٢): جد خارج قسمة د(س) = −٢س^{٥} +٦س^{٤} +١٠س^{٣} −٦س^{٢} −٩س +٤ على هـ (س) = س −٤

الحل : باستخدام القسمة التركيبية :

أولا نرتب حدود المقسوم د(س) حسب الدرجة (وفي هذه المثال مرتبة كما تلاحظ)

ثانيا نجري القسمة كما يلي :

٤	−٢	٦	١٠	−٦	−٩	٤
		−٨	−٨	٨	٨	−٤
	−٢	−٢	٢	٢	−١	٠

خارج القسمة سيكون من الدرجة الرابعة والباقي = صفر (كما هو واضح)

د(س) = (س − ٤) (−٢س^{٤} −٢س^{٣} +٢س^{٢} +٢س −١)

تمارين (٢−١)

تمرين (١)

املأ الفراغ لتكون عملية القسمة صحيحة :

(١)

$\boxed{٣س}$ − ٢

س + ٧) ٣س^{٢} + ١٩س − ١٤

٣س^{٢} $\boxed{}$

٢س $\boxed{}$ $\boxed{}$

$\boxed{}$ $\boxed{}$

الباقي $\boxed{}$

(٢)

٢س + ١

٣س − ٢) ٦س^{٢} − س − ٢

$\boxed{}$ −٤س

$\boxed{}$ $\boxed{}$

$\boxed{}$ $\boxed{}$

الباقي $\boxed{}$

(٣)

$\boxed{س}$ − ٥

٢س − ١) ٢س^{٢} − ١١س + ٥

$\boxed{٢س^{٢}}$ - س

-١٠س + ٥

$\boxed{}$ + ٥

الباقي $\boxed{}$

(٤) أكمل الحل

٢س − ٣

٨س^{٣} − ٢٧ ÷ ٤س^{٢} + ٦س + ٩

(٥)

س^{٢} + س + ١) س^{٣} + ٣س^{٢} + ٣س + ٢

(٦)

س^{٢} + س − ١

س − ٤) ٥س^{٣} + س^{٢} − ٩س + ٤

تمرين (٢) : جد ما يلي :

أ) (٥س^{٢} +٢س +١) + (٣س^{٢} –س –٧)

ب) (٥س^{٢} +٢س +١) – (٣س^{٢} –س –٧)

ح) (٦س^{٣} +س^{٢} –٣س +٢) + ٧(٢س^{٢} +٣س –٤)

خ) ٣(س^{٣} –٢س –٦) – ٢(٢س^{٣} –س^{٢} +٢س –٣)

د) [٣س^{٢} – (٢س + ١) – (س^{٢} – ١)]

ذ) ٣(ص^{٢} – ٢م^{٢}) + (ص^{٢} + ٥م^{٢})

ر) (ن^{٣} – ٣ن^{٢} +ن – ١) – (٢ن^{٢} – ن +٣)

ز) (س^{٣} – ٢) – [٢س^{٣} – (٣س + ٤)]

س) ٢(ل – ١) – (٣ل + ٢) – ٢(٢ل – ٣)

ش) ٤ع – ٢ع [٥ – ٣(ع + ٢)]

تمرين (٣) : جد حاصل الضرب فيما يلي :

أ) (٤س – ٣) (س – ٢)

ب) (٣س – ٥) (٢س + ١)

ت) (٣س + ٢ص) (س – ٣ص)

ث) (٢س – ٣ص) (س + ٢ص)

ج) (٦س – ٤ص) (٥س + ٣ص)

ح) (٧م – ٤) (٣م – ٢)

خ) (ن – ٢ع)^{٢}

د) (٣س + ٢ص)^{٢}

ذ) (س – ٣) (س + ٣)

ر) (٤ص + ٣) (٤ص – ٣)

ز) (٢ – ع)^{٣}

س) (٥ + ٢ د)^{٣}

تمرين (٤) : حلل الحدوديات التالية بإخراج العامل المشترك :

أ) ٣س^{٣} ص − ٦س^{٢} ص^{٢} − ٣س ص^{٣}
ب) ٣ص (٢ص + ٥) + ٢(٢ص + ٥)
ت) (ن + ٢)^{٢} − ٣(ن + ٢)
ث) م (ن − ١) + (ن − ١)
ج) ٣س^{٤} + ٦س^{٣} − ١٥ س^{٢}
ح) ٤ م^{٣} ن − ٢ م^{٢} ن^{٢} + ٢ م ن^{٢}

تمرين (٥) : حلل الحدوديات التالية :

أ) ٤س^{٢} − ٩ص^{٢}
ب) ٩ م^{٢} − ١
ت) ١٢٥ ن^{٣} + هـ^{٣}
ث) ع^{٣} − ر^{٣}
ج) ٤س^{٢} − ٤س ص + ص^{٢}
ح) ٨١ م^{٢} + ٣٦ م ن + ٤ ن^{٢}

تمرين (٦) : حلل الحدوديات الثلاثية التالية :

أ) س^{٢} + ٤س − ١٢
ب) ٤ س^{٢} − ٢٠ س + ٢٥
ت) م^{٢} − ٦ م + ٩
ث) ٨ ن^{٢} + ١٠ ن + ٣
ج) ٢ س^{٢} + ٧ س − ٤
ح) ن^{٢} − ٢ ن − ٨

تمرين (٧) : باستخدام القسمة المطولة أو القسمة التركيبية جد خارج قسمة د(س) على هـ (س) عندما :

أ) د(س) = س^{٢} + ٩س ٧ ، هـ (س) = س + ٧
ب) د(س) = ٣ س^{٣} − ٥س^{٢} + ١٠س −٣ ، هـ (س) = ٣س + ١
ت) د(س) = ٢ س^{٣} − ٩س^{٢} + ١٥ ، هـ (س) = س −٥

ث) د(س) = $س^٣ - ٣س^٢ + ٥س - ٣$ ، هـ (س) = $س^٢ - ٢$

ج) د(س) = $٦س^٣ + ٣س^٢ - ٣س - ٥$ ، هـ (س) = ٣س +١

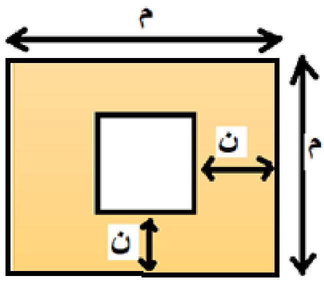
ح) د(س) = $س^٣ - ٣س^٢ + ٣س - ٢$ ، هـ (س) = س − ٢

خ) د(س) = $س^٤ - ٣س^٢ + ٤س + ٧$ ، هـ (س) = $س^٢ + س$

د) د(س) = $٣ س^٢ + ٥س - ٩$ ، هـ (س) = س + ٣

تمرين (٨) : باستخدام تحليل الفرق بين مربعين جد قيمة المقدار: $(٦٢٨)^٢ - (٦٢٧)^٢$.

تمرين (٩) : حقل من العشب على شكل منطقة مربعة طول ضلعها (م) متر ، فإذا تم قص العشب من حواف المربع بعرض (ن) متر كما هو موضح في المنطقة المظلله بالشكل . فسر لماذا مساحة المنطقة المقصوصة تساوي $م^٢ - (م - ٢ن)^٢$ ؟



(٢–٢) المقادير النسبية :

المقدار الكسري هو حاصل قسمين مقدارين جبريين مثل : $\frac{\text{س - ٢}}{\text{٢س}}$ ، $\frac{\text{٣ ص}^{\text{٢}}}{\text{ص}}$

فإذا كان كلا من البسط والمقام في المقدار الجبري عبارة عن كثيرات حدود فإن المقدار الكسري يسمى مقدارا نسبيا

ملاحظة : كثيرة الحدود هي مقدار جبري فيه المتغير لا يوجد في المقام أو تحت الجذر.

أمثلة للمقادير النسبية : $\frac{\text{س - ٢}}{\text{٢س}^{\text{٢}}\text{ -٣س +٥}}$ ، $\frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٤}}\text{ - ١}}$ ، $\frac{\text{٢}}{\text{س}}$ ، $\frac{\text{س}^{\text{٢}}\text{ +٣س -٥}}{\text{١}}$

تبسيط المقادير النسبية :

مثال (١) : بسط المقدار النسبي: $\frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

الحل :

$$\frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٢} \times \text{س}}{\text{س} \times \text{س}} = \frac{\text{٢}}{\text{س}}$$

مثال (٢) : بسط المقدار النسبي : $\frac{\text{(س + ٣)(س + ٤)}}{\text{(س + ٣)(س + ٢)}}$

الحل :

$$\frac{\text{(س + ٣)(س + ٤)}}{\text{(س + ٣)(س + ٢)}} = \frac{\text{(س + ٤)}}{\text{(س + ٢)}}$$

مثال (٣) : بسط المقدار النسبي : $\frac{\text{٣ س}^{\text{٢}}\text{ – ٣س}}{\text{٣س}^{\text{٣}}\text{ – ٦س}^{\text{٢}}\text{ + ٣س}}$

الحل :

$$\frac{\text{٣ س}^{\text{٢}}\text{ – ٣س}}{\text{٣س}^{\text{٣}}\text{ – ٦س}^{\text{٢}}\text{ + ٣س}} = \frac{\text{٣ س(س –١)}}{\text{٣س(س}^{\text{٢}}\text{ – ٢س +١)}} = \frac{\text{٣ س(س –١)}}{\text{٣س(س –١)(س – ١)}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{س - ١}}$$

جمع وطرح المقادير النسبية :

مثال (٤) : جد ناتج الطرح في أبسط صورة : $\frac{٥س - ١}{س + ٨} - \frac{٣س + ٤}{س + ٨}$

الحل : نلاحظ هنا أن المقام موحد

$$\frac{٥س - ١}{س + ٨} - \frac{٣س + ٤}{س + ٨} = \frac{(٥س - ١) - (٣س + ٤)}{س + ٨}$$

$$= \frac{٥س - ١ - ٣س - ٤}{س + ٨} = \frac{٢س - ٥}{س + ٨}$$

ملاحظة : عند جمع أو طرح المقادير الجبرية لا بد من توحيد المقامات.

ضرب وقسمة المقادير النسبية :

مثال (٥): جد ناتج $\frac{٢س + ٤}{س} \times \frac{٣}{٦س + ١٢}$ في أبسط صورة .

الحل :-

$$\frac{٢س + ٤}{س} \times \frac{٣}{٦س + ١٢} = \frac{٢(س + ٢)}{س} \times \frac{٣}{٦(س + ٢)}$$

$$= \frac{٢}{س} \times \frac{٣}{٦} = \frac{١}{س}$$

انطاق البسط أو المقام :

مثال (٦): انطق المقام للمقدار الجبري : $\frac{٢}{\sqrt{٣} - ٥}$

الحل :

$$\frac{٢}{\sqrt{٣} - ٥} = \frac{٢}{\sqrt{٣} - ٥} \times \frac{\sqrt{٣} + ٥}{\sqrt{٣} + ٥} = \frac{٢\sqrt{٣} + ١٠}{(\sqrt{٣})^{٢} - ٢٥} = \frac{٢\sqrt{٣} + ١٠}{٣ - ٢٥}$$

$$= \frac{٢(\sqrt{٣} + ٥)}{-٢٢} = \frac{-\sqrt{٣} - ٥}{١١}$$

مثال (٧) : انطق البسط في المقدار الجبري : $\frac{\sqrt{٥}+\sqrt{٣}}{\sqrt{١٥}}$

الحل :

$$\frac{\sqrt{٥}+\sqrt{٣}}{\sqrt{١٥}} = \frac{\sqrt{٥}+\sqrt{٣}}{\sqrt{١٥}} \times \frac{\sqrt{٥}-\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}-\sqrt{٣}} = \frac{٥-٣}{\sqrt{١٥}\,(\sqrt{٥}-\sqrt{٣})}$$

$$= \frac{٥-٣}{\sqrt{٧٥}-\sqrt{٤٥}} = \frac{٢}{٥\sqrt{٣}-٣\sqrt{٥}}$$

تمارين (٢–٢)

تمرين (١) : بسط المقادير النسبية التالية :

١) $\frac{\text{س}^{٢}-٦\text{س}+٩}{\text{س}^{٢}-٩}$

٢) $\frac{\text{س}^{٣}-١}{\text{س}^{٢}-١}$

٣) $\frac{٦\text{س}^{٢}+\text{س}-٢}{٢\text{س}^{٢}+\text{س}-١}$

٤) $\frac{\text{س}^{٢}+٧\text{س}+١٠}{\text{س}^{٢}+\text{س}-٢٠}$

٥) $\frac{٦(\text{س}^{٢}-١)}{١٨(\text{س}+٣)(\text{س}+١)}$

٦) $\frac{\text{س}^{٢}+\text{س}}{\text{س}^{٢}-١}$

تمرين (٢) جد ناتج ما يلي في أبسط صورة :

١) $\frac{٣\text{س}}{\text{س}^{٢}+٣\text{س}-١٠} - \frac{٦}{\text{س}^{٢}+٣\text{س}-١٠}$

٢) $\frac{\text{س}+٤}{٢\text{س}} - \frac{\text{س}-١}{\text{س}^{٢}}$

٣) $\frac{٤\text{س}}{٢\text{س}-١} - \frac{٥}{\text{س}-٣}$

٤) $\frac{٣}{\text{س}+٢} + ٢$

٥) $\frac{١}{\text{س}+١} + \frac{\text{س}}{\text{س}-٦}$

٦) $\frac{٣}{(٢\text{ص}-٣)} + \frac{٥}{(٢\text{ص}-٣)^{٢}}$

تمرين (٣) جد ناتج ما يلي في أبسط صورة:

١) $\frac{س^{٢} + ٦س + ٩}{س^{٢} - ٩} \times \frac{٣س - ٩}{س^{٢} + ٢س - ٣}$

٢) $\frac{٢س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٢س - ٨} \times \frac{٢س^{٢} - س - ٣}{س^{٢} - ٣س - ٤}$

٣) $\frac{س + ٤}{٢س - ٦} \div \frac{٣س + ١٢}{٤س - ١٢}$

٤) $\frac{٩س^{٢}}{س^{٢} + ١٢س + ٣٦} \div \frac{١٢س}{س^{٢} + ٦س}$

٥) $\frac{س + ٣}{١٢س} \div \frac{س^{٢} - ٩}{٣س}$

٦) $\frac{ع^{٢} - ٩}{ع^{٢} - ٣٦} \times \frac{ع + ٦}{ع - ٣}$

تمرين (٤) انطق المقام فيما يلي:

١) $\frac{١}{٥ - \sqrt{٢}}$

٢) $\frac{س}{\sqrt{٢} + \sqrt{س}}$

٣) $\frac{أ - \sqrt{ب}}{أ + \sqrt{ب}}$

٤) $\frac{٤}{\sqrt{٢} - ٢}$

٥) $\frac{-٢}{\sqrt{٧} - \sqrt{٢}}$

٦) $\frac{\sqrt{١٤} - \sqrt{٧}}{\sqrt{١٤} + \sqrt{٧}}$

تمرين (٥) انطق البسط فيما يلي :

١) $\frac{١ - \sqrt{٧}}{٢}$

٢) $\frac{\sqrt{٥} - \sqrt{١١}}{٣}$

٣) $\frac{٤ + ٢\sqrt{٣}}{\sqrt{٩}}$

٤) $\frac{\sqrt{ن} + \sqrt{٣}}{٧}$

٥) $\frac{٣\sqrt{٢} - ٢\sqrt{٣}}{٦}$

٦) $\frac{\sqrt{١٤} - ٢}{\sqrt{٧} - \sqrt{٢}}$

(٢–٣) أصفار كثيرات الحدود:

أصفار كثيرات الحدود يتم الحصول عليها بوضع الدالة د(س) = ٠ ، ولإيجاد أصفار دالة كثيرات الحدود نستخدم طريقة التحليل، وعدد أصفار الحدودية يعتمد على درجة الحدودية (أعلى أس في الحدودية).

أصفار الحدودية لا يمكن أن تكون عدداً تخيلياً فمثلا: س^{٢} + ٩ = ٠

يعني أن س = $\sqrt{-٩}$ = $\pm$ ٣ ت (تخيلي)

لمزيد من التفاصيل سنعرض الأمثلة الآتية:

مثال (١) : جد أصفار الحدودية د(س) = س^{٢} + ٣س − ٤ ؟

الحل: نلاحظ أن الحدودية من الدرجة الثانية، إذن يوجد صفرين للحدودية.

د (س) = س^{٢} + ٤س − س − ٤

د (س) = س (س + ٤) − (س + ٤)

د (س) = (س − ١) (س + ٤)

نضع د(س) = ٠ وهذا يعني (س − ١) (س + ٤) = ٠

ومنها إما (س − ١) = ٠ أو (س + ٤) = ٠

إذن أصفار الحدودية هي { ١ ، −٤ }

بما أن الحدودية من الدرجة الثانية وهذا يعني وجود حلين للحدودية (١ ، ٠) و (−٤ ، ٠)

مثال (٢): جد أصفار الحدودية د(س) = س^{٣} + س^{٢} − ٤س − ٤ ؟

الحل: نلاحظ أن الحدودية من الدرجة الثالثة، إذن يوجد ٣ أصفار للحدودية.

د(س) = س^{٣} + س^{٢} − ٤س − ٤

د(س) = س^{٢} (س + ١) − ٤ (س + ١)

د(س) = (س^{٢} − ٤) (س + ١)

د(س) = (س − ٢) (س + ٢) (س + ١)

نضع د(س) = ٠ وهذا يعني (س − ٢) (س + ٢) (س + ١) = ٠

ومنها إما (س − ٢) = ٠ أو (س + ٢) = ٠ أو (س + ١) = ٠

إذن أصفار الحدودية هي { ٢ ، −٢ ، −١ }

بما أن الحدودية من الدرجة الثالثة وهذا يعني وجود ٣ أصفار للحدودية (٢ ، ٠) و (−٢ ، ٠) و(−١ ، ٠)

نظرية الباقي:

تنص هذه النظرية على أنه " باقي قسمة كثيرة الحدود ق(س) بأي درجة على كثيرة الحدود هـ(س) من الدرجة الأولى أو الخطية وعلى الصورة هـ(س) = س − أ هو ق(أ) "

هذه النظرية مفيدة في إيجاد الباقي بطريقة سهلة بدلاً من إيجاد الباقي بطريقة القسمة المطولة. عندما نقسم ق(س) على (س − أ) ، نحصل على العلاقة من خلال:

ق(س) = هـ(س) × ك(س) + ل(س)

حيث: ق(س): المقسوم ، هـ(س): المقسوم عليه ، ك(س): ناتج القسمة ، ل(س): باقي القسمة

مثال (١):

جد باقي قسمة الحدودية: ق(س) = س^{٣} − ٢س^{٢} − ٣س + ٨ على (س−٢) ؟

الحل:

من خلال نظرية الباقي يتضح أن: الباقي = ق(أ) ومن المقسوم عليه نجد أن: أ = ٢

الباقي = ق(٢) = (٢)^{٣} − ٢(٢)^{٢} − ٣(٢) + ٨ = ٢

نظرية العامل:

تنص على أنه " (س − أ) عاملاً للحدودية ق(س) إذا وإذا فقط ق(أ) = ٠ "

هذه النظرية تساعدنا على تحديد ما إذا كانت كثيرة الحدود الخطية (س − أ) عاملا للحدودية ق(س) أم لا. تستخدم نظرية الباقي ونظرية العامل لحل كثيرات الحدود أو تحليليها إلى عوامل. فإذا كانت (س − أ) عاملا للحدودية ق(س) فإن نظرية الباقي تكون هي نظرية العامل وتكتب بالصورة:

ق(س) = هـ(س) × ك(س)   لأن ل(س) = ٠

مثال (١):

حدد ما إذا كان (س + ٥) عاملا للحدودية د(س) = ٢س^{٢} + ٧س − ١٥ أم لا ؟

الحل:

نضع س + ٥ = ٠ ومنها س = −٥

وبالتعويض عن قيمة س في الحدودية المعطاة نجد أن:

د (−٥) = ٢ (−٥)^{٢} + ٧ (−٥) − ١٥ = ٠

بما أن د(−٥) = ٠ فإن : (س + ٥) تعتبر عاملا للحدودية د(س) = ٢س^{٢} + ٧س − ١٥

نظرية الأصفار النسبية:

تنص هذه النظرية على أنه : إذا كانت ق(س) كثيرة حدود ذات معاملات صحيحة بترتيب تنازلي للأسس، فإن كل صفر نسبي للدالة ق(س) = ٠ سيكون على الصورة:

$$\pm \frac{ل}{هـ}$$

حيث: (ل) معامل الحد الثابت ، (هـ) معامل الحد الأول

مثال (١):

جد جميع الأصفار النسبية للحدودية: ق(س) = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − س + ٤

الحل:

نجد (ل): معامل الحد الثابت = ٤ ، (هـ) معامل الحد الأول = ٢

وبالتالي: (ل) عوامل العدد ٤ = ± ١ ، ± ٢ ، ± ٤

(هـ) عوامل العدد ٢ = ± ١ ، ± ٢

إذن قائمة الأصفار النسبية $\pm \frac{ل}{هـ} = \frac{\pm ١ ، \pm ٢ ، \pm ٤}{\pm ١ ، \pm ٢}$ = { ± ١ ، ± ٢ }

حتى نجد الأصفار النسبية الحقيقية للحل نعوض عن قائمة الأصفار النسبية في الحدودية ق(س)

ق(١) = ٢(١)^{٣} − ٣(١)^{٢} − (١) +٤ = ٢ ≠ ٠ (س=١ ليس صفرا للحدودية)

ق(−١) = ٢(−١)^{٣} − ٣(−١)^{٢} − (−١) +٤ = ٠ (س=−١ هو صفرا للحدودية)

ق(٢) = ٢(٢)^{٣} − ٣(٢)^{٢} − (٢) +٤ = ٦ ≠ ٠ (س=٢ ليس صفرا للحدودية)

ق(−٢) = ٢(−٢)^{٣} − ٣(−٢)^{٢} − (−٢) +٤ = −٢٢ ≠ ٠ (س=−٢ ليس صفرا للحدودية)

مما سبق نستنتج أن الصفر الحقيقي للحدودية هو { −١ }

تمارين (٢ − ٣)

أولا: جد الأصفار الحقيقية لكثيرات الحدود الآتية:

١) ٢س^{٢} + ٥س − ٣ ٢) ٣س^{٢} + ٢س − ٥ ٣) ٥س^{٣} + ٢س^{٢} − ٥س − ٢

٤) ٤س^{٢} − ٣س − ١ ٥) ٤س^{٣} + س^{٢} − ٤س − ١ ٦) ٢٨س^{٢} − ١٧س − ٣

٧) ٥س^{٢} + ١٦س + ٣ ٨) س^{٣} + س^{٢} − ٤س − ٤ ٩) س^{٢} + ٤س − ٥

ثانيا: جد باقي كثيرات الحدود الآتية باستخدام نظرية الباقي:

١٠) ق(س) = ٢س^{٢} + ٥س − ٣ ، هـ(س) = س + ٣

١١) ق(س) = ٣س^{٢} + ٢س − ٥ ، هـ(س) = ٣س + ٥

١٢) ق(س) = ٤س^{٢} − ٣س − ١ ، هـ(س) = س − ١

١٣) ق(س) = ٤س^{٣} + س٢ − ٤س − ١ ، هـ(س) = ٤س + ١

١٤) ق(س) = ٥س^{٢} + ١٦س + ٣ ، هـ(س) = س + ٣

١٥) ق(س) = س^{٣} + س^{٢} − ٤س − ٤ ، هـ(س) = س − ٢

١٦) حدد ما إذا كان (٢س − ٣) عاملا للحدودية د(س) = ٢س^{٢} + ٧س − ١٥ أم لا؟

١٧) حدد ما إذا كان (س + ٢) عاملا للحدودية د(س) = س^{٣} + س^{٢} − ٤س − ٤ أم لا؟

١٨) حدد ما إذا كان (س − ١) عاملا للحدودية د(س) = ٤س^{٢} − ٣س − ١ أم لا؟

١٩) حدد ما إذا كان (س − ٢) عاملا للحدودية د(س) = ٤س^{٣} + س^{٢} − ٤س − ١ أم لا؟

٢٠) حدد ما إذا كان (س − ٣) عاملا للحدودية د(س) = ٥س^{٢} + ١٦س + ٣ أم لا؟

٢١) حدد ما إذا كان (س − ٢) عاملا للحدودية د(س) = س^{٣} + س^{٢} − ٤س − ٤ أم لا؟

ثالثا: جد قائمة بجميع الأصفار النسبية الممكنة ثم ابحث عن الأصفار النسبية الحقيقية للآتي:

٢٢) س^{٣} − ٤س^{٢} − ٢س + ٣

٢٣) ٣س^{٣} − س^{٢} − ٥س − ٢

٢٤) ٣س^{٢} − ٥س + ٢

٢٥) ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − س + ٢

٢٦) $٦س^٢ - ٥س^٢ + ٢س - ٣$

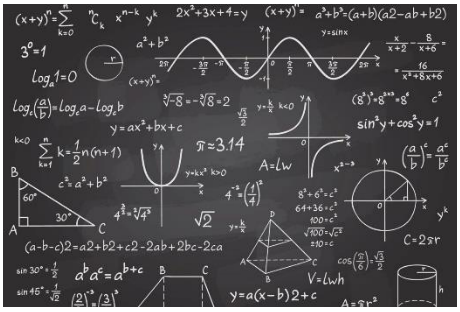
٢٧) $٥س^٢ - ٢س - ٣$

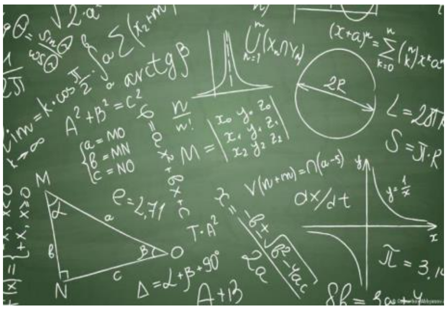
جامعة الشرقية
A' SHARQIYAH UNIVERSITY

الرياضيات الأساسية

Basic Mathematics

الوحدة الثالثة: المعادلات والمتباينات





الوحدة الثالثة: المعادلات والمتباينات

الأهداف: يكون الطالب قادرا على :

١) حل المعادلة الخطية في متغير واحد والمتباينة الخطية .
٢) ترجمة المسائل اللفظية إلى تعبيرات رياضية ونمذجة بعض المشكلات الواقعية إلى معادلات ومتباينات.
٣) حل المعادلة التربيعية .

(٢-١): حل المعادلات والمتباينات

المعادلة الرياضية هي عبارة مؤلفة من رموز رياضية، تنص على مساواة تعبيرين رياضيين، ويعبر عن هذه المساواة عن طريق علامة التساوي (=) . مثلا ٣+٦=٩ ، س -٥ = ٧

تذكر حل المعادلة يعني إيجاد قيمة المتغير التي تجعل المعادلة صحيحة

خصائص المساواة : إذا كان :

أ) أ = ب فإن أ + ج = ب + ج
ب) أ = ب فإن أ × ج = ب × ج ، حيث ج ≠ ٠

المعادلة الخطية :

الصورة العامة لها أ س + ب = ٠ ، حيث أ ، ب ∋ ح ، س : متغير من الدرجة الأولى

أمثلة :-

معادلة خطية	معادلة ليست خطية
٥س − ٣ = ١٢	$س^{٢}$ + ٣س = ١
س + ٣ =٧	$\sqrt{س}$ − ٥س = ٠
س = ٩	$\frac{٥}{س}$ −٢س = ٧

حل المعادلة الخطية :

مثال(١) : حل المعادلات الخطية التالية:

أ) ٢س + ٧ = ٢١

ب) ٥س − ٨ = ٣س + ٤

الحل :

أ) ٢س + ٧ = ٢١
٢س = ٢١ − ٧
٢س = ١٤
س = ٧

ب) ٥س − ٨ = ٣س + ٤
٥س − ٣س = ٨ + ٤
٢س = ١٢
س ٦

المعادلة التربيعية :

الصورة العامة لها: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، حيث أ ، ب ، جـ ∋ ح ، أ ≠ ٠

أمثلة : س^{٢} = ٩ ، س^{٢} − ٧س +٣ =٠ ، ٣س^{٢} + س = ٥

حل المعادلة التربيعية :

مثال (٢) حل المعادلات التربيعية الآتية :

أ) س^{٢} = ٧

ب) (س − ٣)^{٢} = ٥

الحل :−

أ) س^{٢} = ٧
س = ± $\sqrt{٧}$
مجموعة الحل = { $\sqrt{٧}$ ، −$\sqrt{٧}$ }

ب) (س − ٣)^{٢} = ٥
س − ٣ = ± $\sqrt{٥}$
س = ٣ ± $\sqrt{٥}$
مجموعة الحل ={ ٣+ $\sqrt{٥}$ ، ٣− $\sqrt{٥}$ }

تذكر لكل عددين حقيقين أ ، ب إذا كان أ × ب = ٠ فإن أ = ٠ أو ب = ٠

مثال (٣) : حل المعادلة التربيعة : س^{٢} + ٨س + ١٢ = ٠

الحل : س^{٢} + ٨س + ١٢ = ٠

(س + ٦) (س + ٢) = ٠

إما (س + ٦) = ٠ أو (س + ٢) = ٠

س = −٦ س = −٢

م . ح = {−٢ ، −٦ }

مثال (٤) : حل المعادلة : ٢س^{٢} + ٧س + ٣ =٠

الحل : ٢س^{٢} + ٧س + ٣ =٠

(٢س + ١) (س + ٣) = ٠

إما (٢س + ١) =٠ أو (س + ٣) = ٠

س = − $\frac{١}{٢}$ س = −٣

مجموعة الحل هي {−٣ ، − $\frac{١}{٢}$ }

حل المعادلة التربيعية باستخدام القانون العام :

حل المعادلة التربيعية : أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ نستخدم القانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ} ، أ \neq ٠$$

مثال (٥) : حل المعادلة : ٤س^{٢} + ١٦س −٩ =٠

الحل : أ =٤ ، ب = ١٦ ، جـ = −٩

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ} = \frac{-١٦ \pm \sqrt{(١٦)^{٢} - ٤\times٤\times(-٩)}}{٢ \times ٤} = \frac{-١٦ \pm \sqrt{٤٠٠}}{٨}$$

$$= \frac{-١٦ \pm ٢٠}{٨}$$

إما س = $\frac{-١٦ + ٢٠}{٨}$ أو س = $\frac{-١٦ - ٢٠}{٨}$

س = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$ أو س = $\frac{-٣٦}{٨}$ = $-\frac{٩}{٢}$

حل معادلة تحتوي على تعبير كسري :

مثال (٦) : حل المعادلة : $\frac{١٠}{س} - \frac{١٢}{س -٣} + ٤ = ٠$

الحل : نوحد المقامات

المضاعف المشترك الأصغر س (س − ٣) : $\frac{١٠(س-٣)}{س(س-٣)} - \frac{١٢\ س}{س(س-٣)} + \frac{٤س\ (س-٣)}{س(س-٣)} = ٠$

$= \frac{١٠(س-٣) - ١٢س + ٤س(س-٣)}{س(س-٣)} = \frac{١٠س -٣٠ -١٢س +٤س^٢ -١٢س}{س(س-٣)}$

$= \frac{٤س^٢ - ١٤س - ٣}{س(س-٣)} = ٠$ يعني البسط = ٠

$٤س^٢ - ١٤س - ٣٠ = ٠$

$(٤س + ٦)(س - ٥) = ٠$

إما (٤س + ٦) = ٠ ومنها س = $\frac{-٦}{٤}$ = $-\frac{٣}{٢}$

أو (س − ٥) = ٠ ومنها س = ٥

حل معادلة تحتوي على تعبير جذري :

مثال (٧) : حل المعادلة : $٢س - \sqrt{س +١} = ٨$

الحل : $٢س - ٨ = \sqrt{س + ١}$ بتربيع الطرفين

$(٢س - ٨)^٢ = س + ١$

$٤س^٢ - ٣٢س + ٦٤ - س - ١ = ٠$

$٤س^٢ - ٣٣س + ٦٣ = ٠$

وباستخدام القانون العام نجد س = ٣ أو س = $\frac{٢١}{٤}$

تمارين (٣−١)

تمرين (١) : حل المعادلات الخطية التالية :

١) −٧س = ١٥ − ٢س

٢) ٨ − ٢س = ١٤ + س

٣) ٣(٤ − س) = ٢(١ + ٢س) − ٧

٤) $\frac{\text{٢س - ١}}{\text{س + ٢}} = \frac{\text{٤}}{\text{٥}}$

تمرين (٢) : حل المعادلات التالية عن طريق التحليل :

١) س^{٢} = ١٢

٢) س^{٢} + س − ١٢ = ٠

٣) س^{٢} − ٩س + ١٨ = ٠

٤) س^{٢} + ٣س − ١٠ = ٠

٥) س^{٢} − ٧ س + ١٢ = ٠

٦) ٢س^{٢} + ٧ س + ٣ = ٠

٧) ٦س^{٢} + س − ١٢ = ٠

٨) ٤س^{٢} − ١٣س − ١٢ = ٠

تمرين (٣) : حل المعادلات التالية باستخدام القانون :

١) ٢س^{٢} + س = ١

٢) ٣س^{٢} + ٥س − ٢ = ٠

٣) ٦س^{٢} + س − ١٢ = ٠

٤) ٢س^{٢} + ٤س + ١ = ٠

٥) ٣س^{٢} − ٦س + ٩ = ٠

تمرين (٤) : حل المعادلات التالية :

أ) $\frac{\text{١}}{\text{س}} + \frac{\text{٢}}{\text{س - ١}} = \text{٣}$

ب) $\sqrt{\text{٥ − س}} + \text{١} = \text{س − ٢}$

ت) $\frac{\text{١}}{\text{س - ١}} + \frac{\text{١}}{\text{س + ٢}} = \frac{\text{٥}}{\text{٤}}$

ث) $\text{٢س} = \text{١} - \sqrt{\text{٢ − س}}$

(٣–٢): تطبيقات لحل المعادلات :

مثال (١) : طول أرض مستطيلة الشكل يساوي ضعف عرضها ، فإذا كان محيطها يساوي ٧٢ متر فجد أبعادها.

الحل : نفرض عرض الأرض : س   وبالتالي طويلها يكون : ٢س

محيطها = ٢ (الطول + العرض)

٧٢ = ٢ (٢س + س)

٧٢ = ٤س + ٢س

٧٢ = ٦س ⟵ س = ١٢ م

أبعادها هي ١٢ ، ٢٤ متر

مثال (٢) : إذا كان الإيجار الشهري لمبنى يساوي ٢٥٠ ريال ، فكم يكون جملة الإيجار خلال سنة واحدة ؟

الحل : جملة الإيجار = ٢٥٠ × ١٢

= ٣٠٠٠ ريال

مثال (٣) : إذا كانت درجات أربعة طلاب في الامتحان القصير هي ٧ ، ٨ ، ٩ ، ٥ . جد متوسط هذه الدرجات.

الحل : المتوسط = مجموع القيم ÷ عددها

= (٧+٨+٩+٥) ÷ ٤

= ٢٩ ÷ ٤ = ٧,٢٥

مثال (٤) : احسب الفائدة البسيطة لمبلغ ٥٠٠ ريال استثمرت في شركة ما، وكانت نسبة الأرباح فيها ٧٪ لمدة سنة واحدة .

الحل : الفائدة البسيطة = المبلغ × نسبة الفائدة × الزمن

$$= ٥٠٠ \times \frac{٧}{١٠٠} \times ١ = ٣٥$$ ريال

مثال (٥) : احسب المسافة المقطوعة لسيارة خلال ٦ ساعات وتسير بسرعة ١٢٠ كم/ساعة .

الحل : السرعة = المسافة ÷ الزمن ← المسافة = السرعة × الزمن

= ١٢٠ × ٦ = ٧٢٠ كم

مثال (٦) : يزيد طول حديقة مستطيلة الشكل عن عرضها بمقدار ٧ متر ، فإذا كانت مساحتها ٢٢٨ متر مربع فجد أبعادها .

الحل : نفرض عرض الحديقة : س ← يكون طولها س + ٧

مساحتها = الطول × العرض

٢٢٨ = (س + ٧) × س

٢٢٨ = س^{٢} + ٧س

س^{٢} + ٧س − ٢٢٨ = ٠

(س + ١٩) (س − ١٢) = ٠

إما س = −١٩ وهذا مرفوض (لأن العرض لا يمكن قياسه بالسالب)

أو س = ١٢ وبالتالي أبعاد الحديقة هي (١٢ +٧) ، ١٢

تمارين (٣-٢)

١) وصلت نسبة الأرباح في إحدى الشركات سنويا ٥٪ ، فإذا كان أحد المساهمين في الشركة قد ساهم بمبلغ ٣٠٠٠ ريال . فكم الفائدة التي حصل عليها بعد مرور ٤ سنوات ؟

(علما أن الفائدة البسيطة = المبلغ × نسبة الربح × عدد السنوات)

٢) وصلت نسبة الأرباح في إحدى الشركات سنويا ٣٪ ، فإذا أحد المساهمين في الشركة قد ساهم بمبلغ ٧٠٠٠ ريال وبلغت فائدته ٨٤٠ ريال. فكم عدد السنوات التي مرت حتى حصل على هذه الفائدة؟

(علما أن الفائدة البسيطة = المبلغ × نسبة الربح × عدد السنوات)

٣) كم الزمن الذي تحتاجه سيارة لتقطع مسافة ١٥٠ كم بسرعة ٩٠ كم/ساعة ,

(علما أن السرعة = المسافة ÷ الزمن)

٤) إذا كانت درجات مجموعة من الطلبة في امتحان ما ٨٤ ، ٦٩ ، ٩١ ، ٥٣ ، ٧٢ . جد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات .

(علما أن المتوسط الحسابي = مجموع القيم ÷ عددها)

٥) حديقة مستطيلة الشكل عرضها ٢٥ م ، فإذا كانت مساحتها ٨٥٠ متر مربع فجد طولها .

(علما أن مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض)

٦) إذا كانت تكلفة صنع طاولتين و ثلاثة كراسي ٧٠٥ ريال ، وكانت تكلفة الطاولة تزيد عن تكلفة الكرسي بمقدار ٤٠ ريالا . جد تكلفة كل من الطاولة والكرسي .

٧) يزيد طول مستطيل عن عرضه بمقدار ١٠سم ، وكان محيط المستطيل يساوي ٨٠ سم . فجد أبعاده.

٨) رجل قضى ثلث حياته في بريطانيا ، وربع حياته في امريكا ، وهو الآن في اسكوتلندا من ٢٠ عاما. كم عمر هذ الرجل ؟

٩) عمر أحمد ضعف عمر سالم ، وكان مجموع عمر أحمد وسالم ٥٤ سنة . فكم عمر كل منهما ؟

(٣–٣): المتباينات الخطية

المتباينات هي عبارات رياضية تحتوي على الرموز < ، > ، ≤ ، ≥ . مثل : ٣س – ٧ > ٥

قوانين المتباينات :

أ) إذا كانت أ ≥ ب فإن أ + جـ ≥ ب + جـ لكل جـ ∈ ح .

ب) إذا كانت أ ≥ ب فإن أ – جـ ≥ ب – جـ لكل جـ ∈ ح

ت) إذا كانت أ ≥ ب ، جـ > ٠ فإن أ جـ ≥ ب جـ لكل جـ ∈ ح

ث) إذا كانت أ ≥ ب ، جـ < ٠ فإن أ جـ ≤ ب جـ لكل جـ ∈ ح

ج) إذا كانت أ > ٠ ، ب > ٠ ، أ ≥ ب فإن $\frac{١}{أ} \leq \frac{١}{ب}$

حل المتباينة الخطية :

يعني إيجاد قيم المتغير في المتباينة التي تجعل المتباينة صحيحة.

مثال (١) : حل المتباينة التالية : ٣س – ١١ ≥ ٧

الحل : ٣س – ١١ ≥ ٧

٣س ≥ ٧ +١١

٣س ≥ ١٨ بالقسمة على ٣

س ≥ ٦

مجموعة الحل هي] – ∞ ، ٦]

ويمكن تمثيل مجموعة الحل على خط الأعداد:

مثال (٢) : حل المتباينة التالية : –١ > ٢س + ٥ ≥ ٧

الحل : –١ > ٢س + ٥ ≥ ٧ باضافة –٥ لجميع الأطراف

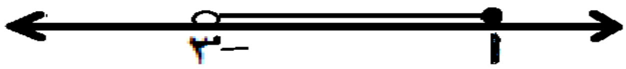
–١ –٥ > ٢س + ٥ –٥ ≥ ٧ –٥

–٦ > ٢س ≥ ٢ بالقسمة على ٢

−٣ < س ≤ ١

مجموعة الحل هي] −٣ ، ١]

ويمكن تمثيل مجموعة الحل على خط الأعداد:



تطبيقات حياتية على المتباينة الخطية:

مثال (١) : كي يحصل بائع الجرائد على مكافأة إضافية على راتبه لا بد له من أن يبيع ١٢٠ جريدة على الأقل في الشهر ، فإذا باع ٨٥ جريدة خلال الثلاثة الأسابيع الأولى فكم يلزمه أن يبيع خلال الأسبوع الأخير كي يحصل على المكافأة ؟

الحل : نفرض س عدد الجرائد المباعة في الأسبوع الأخير، وكي يحصل البائع على المكافأة لا بد له من أن يبيع ١٢٠ جريدة أو أكثر

أي ٨٥ + س ≥ ١٢٠

س ≥ ١٢٠ − ٨٥

س ≥ ٣٥

أي لا بد أن يبيع ٣٥ جريدة أو أكثر خلال الأسبوع الأخير من الشهر

مثال (٢) : إذا كان عرض أرض مستطيلة الشكل ٢٠ متر ، فكم يكون طولها إذا كان محيطها على الأقل ١٨٠ متر ؟

الحل : نفرض طول الأرض س

المحيط ≥ ١٨٠

٢س + ٤٠ ≥ ١٨٠

٢س ≥ ١٨٠ − ٤٠

٢س ≥ ١٤٠

س ≥ ٧٠

أي أن طول الأرض يساوي على الأقل ٧٠ متر .

تمارين (٣–٣)

تمرين (١) : حل المتباينات الخطية التالية ةاكتب مجموعة الحل على شكل فترات ومثلها على خط الأعداد:

١) ٣س – ٢ > –١١
٢) ٢ (٧س – ٣) ≥ ١٢س + ١٦
٣) ٥ – ٢س > ٠
٤) – ٤س ≥ ١٠
٥) – ١ > ٢س + ٥ ≥ ٣
٦) – ٢ > ٨ – ٢س ≥ –١

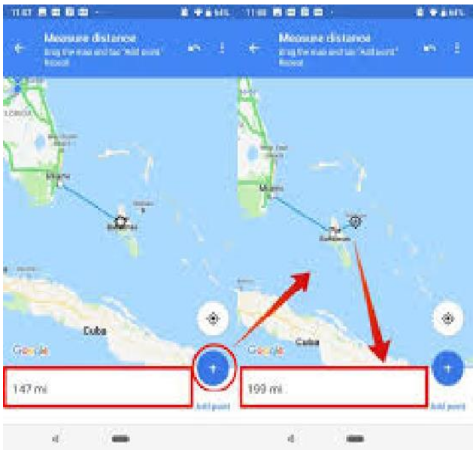
تمرين (٢) : لدى أحمد ٥٠٠ ريال في حسابه في بداية الصيف ،ويرغب ألا يقل حسابه عن ٢٠٠ ريالا على نهاية فصل الصيف. فإذا كان يسحب مبلغ ٢٥ ريالا أسبوعيا للتغذية والملابس والنقل فاكتب المتباينة التي تمثل موقف أحمد ، وجد عدد الأسابيع التي يمكن لأحمد أن يسحب فيها من حسابه .

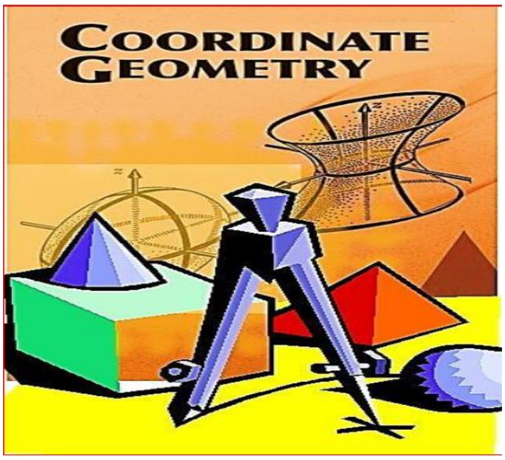
تمرين (٣) : فندق شيراتون والمنتجعات تأخذ رسم موحد مقداره ٥٠ ريالا على إقامة الحفلات بها مع مبلغ ٥ ريال عن كل شخص ، فإذا أراد أحد الأشخاص أن يقيم حفلة في أحد هذه المنتجعات بحيث يصرف مبلغ لا يزيد عن ١٠٠ ريال فاكتب المتباينة التي تمثل هذا الموقف ، وجد عدد الأشخاص الذين يمكن أن يدعوهم لحضور الحفلة بحيث لا يتجاوز تكاليف الحفلة ١٠٠ ريال.

جامعة الشرقية
A' SHARQIYAH UNIVERSITY

الرياضيات الأساسية
Basic Mathematics

الوحدة الرابعة: الهندسة الإحداثية





البعد بين نقطتين

$$\text{البعد} = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$$

الوحدة الرابعة: الهندسة الإحداثية

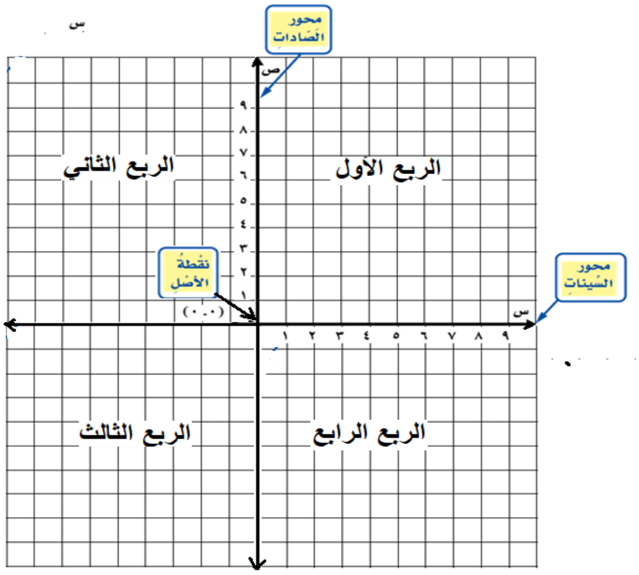
الأهداف: يكون الطالب قادرا على :

٤) توظيف المستوى الإحداثي في حل مسائل رياضية جبرية وهندسية.

٥) تفسير المفاهيم الهندسية كمعادلة الخط المستقيم والدائرة.

(٤-١): المستوى الإحداثي

المستوى الاحداثي: هو المستوى المتشكّل من التقاء محور السينات ومحور الصادات عند نقطة الأصل (٠ ، ٠)



تحديد نقطة او الزوج المرتب:

يتحدّد موقع نقطة في المستوى بمعرفة

الإحداثي السّيني والإحداثي الصّادي لها.

رسم نقطة على المستوى الاحداثي :

يتم عن طريق رسم خط عمودي على كلا

من محور السينات ومحور الصادات

الاحداثي السيني لنقطة هو بعدها عن محور الصّادات.

الإحداثي الصادي لنقطة هو بعدها عن محور السّينات.

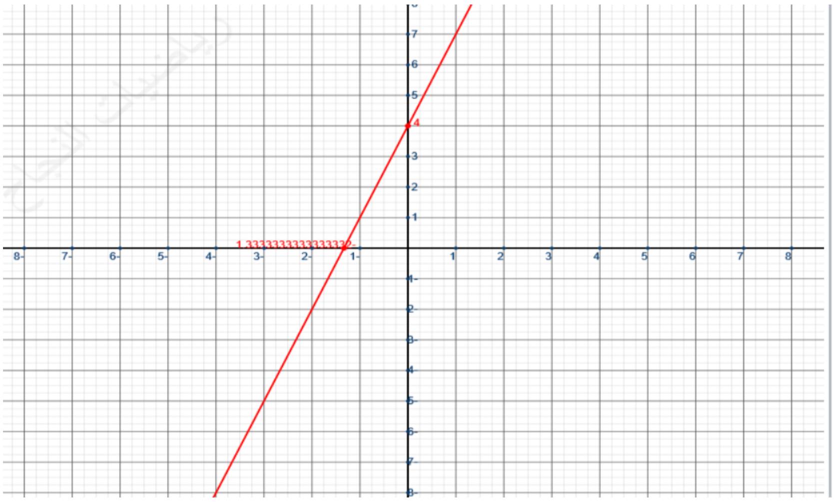
تمثيل المعادلة في متغيرين:

مثال(١) : ارسم المعادلة ص = ٣س + ٤

الحل : نكون الجدول التالي :

س	٢-	١-	٠	١	٢
ص	٢-	١	٤	٧	١٠

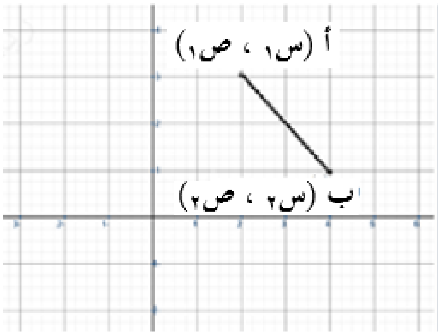
نمثل النقاط على المستوى الإحداثي ثم نصل بين النقاط بخط مستقيم



قانون البعد بين نقطتين :

إذا كانت أ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$) نقطتين في المستوى الإحداثي ،

فإن المسافة بين النقطتين أ ، ب يعطى بالعلاقة :



$$\text{أ ب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

مثال (٢) : جد البعد بين النقطتين أ (٨ ، ٥) ، ب (٦ ، ٤).

الحل : س$_1$ = ٨ ، س$_2$ = ٦

ص$_1$ = ٥ ، ص$_2$ = ٤

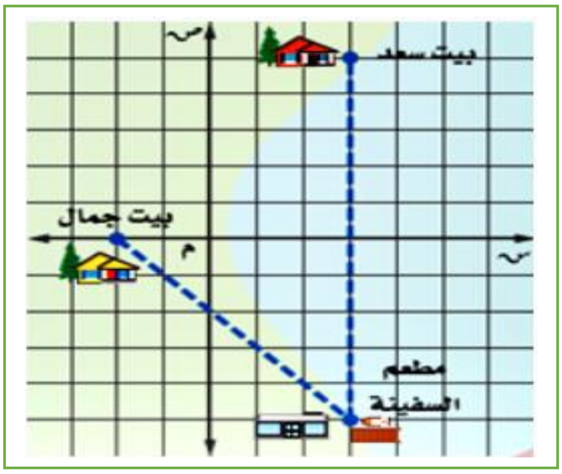
$$\therefore \text{أ ب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

$$= \sqrt{(٦ - ٨)^2 + (٤ - ٥)^2}$$

$$= \sqrt{(-٢)^2 + (-١)^2}$$

$$= \sqrt{٤ + ١} = \sqrt{٥}$$

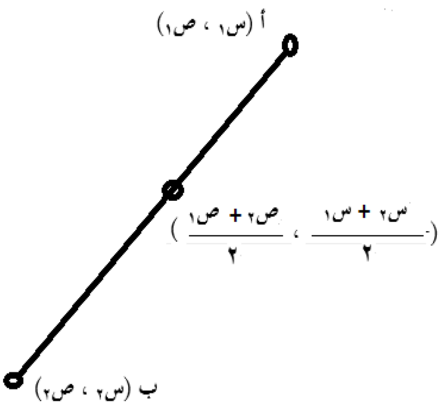
تدريب (١) : احسب المسافة بين بيت سعد عن المطعم.



إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة:

لنفرض أ $(س_١ ، ص_١)$ ، ب $(س_٢ ، ص_٢)$ نقطتين في المستوى الإحداثي ، فإن إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب هي :

$$\left(\frac{س_٢ + س_١}{٢} ، \frac{ص_٢ + ص_١}{٢} \right)$$



مثال (٣) جد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة أب ، حيث أ (٨ ، ٥) ، ب (٢ ، ٣)

الحل : احداثيات منتصف القطعة أب هي $\left(\frac{س_٢ + س_١}{٢} ، \frac{ص_٢ + ص_١}{٢} \right)$

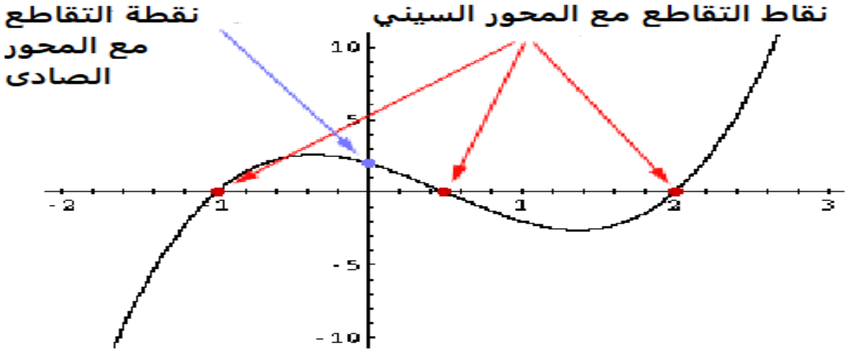
$$= \left(\frac{٢+٨}{٢} ، \frac{٣+٥}{٢} \right) = (٥ ، ٤)$$

نقاط تقاطع منحنيات الدوال مع المحاور :

تذكر

لمعرفة نقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات ، ضع ص = ٠ .

و لمعرفة نقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور الصادات ، ضع س = ٠



مثال (٤) جد نقاط تقاطع الدالة ص = ٥ س + ٥ مع المحور السيني والمحور الصادي .

الحل :

مع المحور السيني : نضع ص = ٠

٠ = ٥ س + ٥

٥ س = − ٥

س = − ١

مع المحور الصادي : نضع س = ٠

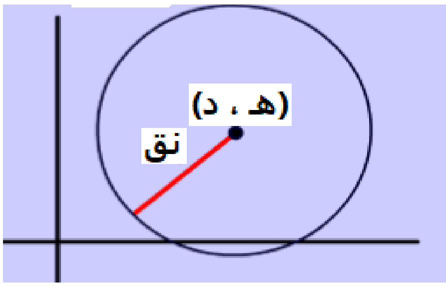
ص = ٥ × ٠ + ٥

ص = ٠ + ٥

ص = ٥

الدائرة :

(س − هـ)² + (ص − د)² = نق²



الصورة العامة لمعادلة الدائرة :

(س − هـ)٢ + (ص − د)٢ = نق ٢

حيث (هـ ، د) مركز الدائرة ، نق نصف قطر الدائرة

وإذا كان مركز الدائرة هو نقطة الأصل (٠ ، ٠) فإن معادلة الدائرة تكون :

س٢ + ص٢ = نق ٢

مثال (٥) جد معادلة الدائرة التي مركزها (٢ ، −١) وطول نصف قطرها ٤ .

الحل : (هـ ، د) = (٢ ، −١) ، نق = ٤

المعادلة هي : (س − هـ)^٢^ + (ص − د)^٢^ = نق^٢^

$$(س - ٢)^٢ + (ص - (-١))^٢ = ٤^٢$$

$$(س - ٢)^٢ + (ص + ١)^٢ = ١٦$$

مثال (٦) جد مركز الدائرة وطول نصف قطرها إذا كانت معادلتها : $(س - ٥)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٣^٢$

الحل : المركز (هـ ، د) = (٥ ، ٢)

نصق القطر (نق) = ٣

تمارين (٤−١)

تمرين (١) : ارسم الدوال التالية

١) ٢ س − ص = ٣
٢) ص = س − ٢
٣) ص = س + ٢

تمرين (٢) : جد نقاط التقاطع مع محوري السينات والصادات لكل دالة من الدوال التالية :

١) ٢ س − ص = ٦
٢) $س + ص^٢ = ٤$
٣) $ص = ١ - س^٢$
٤) $ص = \sqrt{٤ - س^٢}$

تمرين (٣) : جد معادلة الدائرة في كل حالة من الحالات التالية :

١) المركز (−١ ، −٤) ونصف القطر ٨
٢) المركز (−٣ ، ٢) ونصف القطر ٥

٣) المركز نقطة الأصل ونصف القطر ٨
٤) المركز نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٤ ، ٧)

تمرين (٤) : جد مركز الدائرة ونصف قطرها إذا كانت معادلتها هي $(س - ١)^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

تمرين (٥) : جد المسافة بين النقطتين وإحداثيات منتصف القطعة المستقيمة لهما في كل حالة من الحالات التالية:

١) (−٢ ، ٥) ، (٥ ، −٢)
٢) (٠ ، ٠) ، (−٧ ، ٤)
٣) (١ ، ١) ، (٥ ، −٦)
٤) (٣ ، ٦) ، (−١ ، ٣)
٥) (−٢ ، −٢) ، (١٠ ، ٣)

(٤−٢): معادلة الخط المستقيم

يمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم بعدة طرق منها :−

١) بمعلومية الميل ونقطة تمر بالخط المستقيم : $(ص - ص_{١}) = م\ (س - س_{١})$
٢) بمعلومية الميل والجزء الذي يقطعه الخط المستقيم من محور الصادات : $ص = م\ س + ب$

ميل الخط المستقيم : $م = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$

يكون المستقيمان متوازيان إذا تساوى ميلاهما : $م_{١} = م_{٢}$

ويكون المستقيمان متعامدان إذا كان حاصل ضرب ميلاهما يساوي −١ : $م_{١} \times م_{٢} = -١$

مثال (١) : جد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطين (١ ، ٥) ، (٤ ، ١٧)

الحل :

$$م = \frac{\text{مقدار التغير ارأسي}}{\text{مقدار التغير الأفقي}} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{١٧ - ٥}{٤ - ١} = \frac{١٢}{٣} = ٤$$

مثال (٢) : جد معادلة الخط المستقيم الذي ميله ٤ ويمر بالنقطة (−١ ، −٦)

الحل :− معادلة الخط المستقيم : (ص − ص١) = م (س − س١)

ص − (−٦) = ٤ (س − (−١))

ص + ٦ = ٤س + ٤

ص = ٤س − ٢

مثال (٣) : جد معادلة الخط المستقيم الذي ميله ٣ ويقطع جزء من محور الصادات مقداره ١ .

الحل : معادلة الخط المستقيم : ص = م س + ب

ص = ٣ س + ١

مثال (٤) : حدد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيمات التالية :

١) ٤ س + ص = ٦

٢) ٢ص = ٦س − ٤

الحل : نكتب المعادلات على الصورة : ص = م س + ب

١) ٤ س + ص = ٦

ص = −٤س + ٦

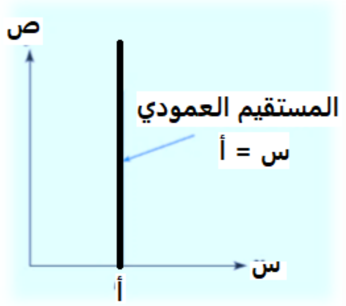
الميل = −٤ ، والجزء المقطوع من محور الصادات = ٦

٢) ٢ص = ٦س − ٤

ص = ٣س − ٢ (بالقسمة على ٢)

الميل = ٣ ، والجزء المقطوع من محور الصادات = −٢

معادلة المستقيم العمودي (الموازي لمحور الصادات)

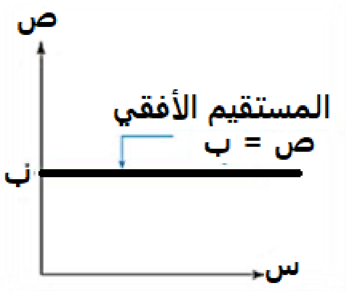


س = أ

حيث (أ ، ب) نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات

وميل المستقيم العمودي غير معرف

معادلة المستقيم الأفقي (الموازي لمحور السينات)



ص = ب

حيث (أ ، ب) نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات

وميل المستقيم الأفقي = صفر

مثال (٥) : اكتب معادلة المستقيم العمودي الذي يمر بالنقطة (٤ ، −١) .

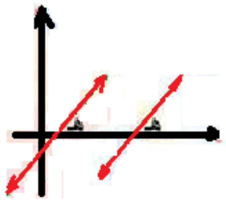
الحل : س = ٤

مثال (٦) : اكتب معادلة المستقيم الأفقي الذي يمر بالنقطة (٣ ، ٢) .

الحل : ص = ٢

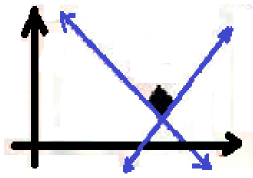
التوازي والتعامد :

يكون المستقيمان متوازيان إذا تساوى ميلاهما : م١ = م٢



ويكون المستقيمان متعامدان إذا كان حاصل ضرب ميلاهما يساوي −١

م١ × م٢ = −١



مثال (٦) : جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢ ، −٥) ويوازي المستقيم ٢س + ٢ص = ٦.

الحل : نجد ميل المستقيم : ٢س + ٢ص = ٦

٢ص = − ٢س + ٦

ص = −س + ٣

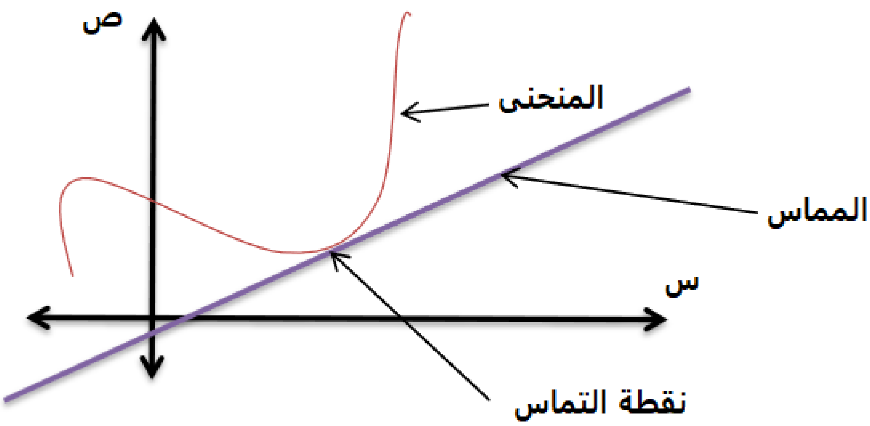
ميل المستقيم = − ١ ، وبالتالي ميل المستقيم المطلوب معادلته = −١ (لأنهما متوازيان)

معادلة المستقيم هي : ص − (−٥) = − (س − ٢)

ص = − س − ٣

المماس:

المماس هو المستقيم الذي يمس المنحنى في نقطة واحدة فقط .



تمارين (٤–٢)

تمرين (١) : جد ميل المستقيم المار بالنقطتين :

١) (–٣ ، ١٠) ، (–٢ ، ٧)
٢) (١ ، ١) ، (–٧ ، –٥)
٣) (٢ ، –٩) ، (–٢ ، –٥)

تمرين (٢) : جد معادلة الخط المستقيم الذي :

١) ميله ١ ويمر بالنقطة (–٢ ، ٤)
٢) ميله –٢ ويمر بالنقطة (–٢ ، –٢)
٣) ميله –١ ويقطع جز من محور الصادات مقداره –٢
٤) يمر بالنقطتين (–٢ ، ١) ، (٤ ، –٥)
٥) يمر بالنقطتين (–٥ ، –٧) ، (٤ ، –٦)

تمرين (٣) : جد ميل المستقيم والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيمات التالية :

١) ٣س – ٢ص = ١٢
٢) ٣س + ٤ص – ١ = ٠
٣) ٢س = ٥ص
٤) س + ص = ٣

تمرين (٤) : جد معادلة الخط المستقيم الذي :

١) يمر بالنقطة (٣ ، ٤) ويوازي المستقيم ٣س – ص = ٩
٢) يمر بالنقطة (٢ ، ٦) وعمودي على المستقيم ٦س + ص = ٥.

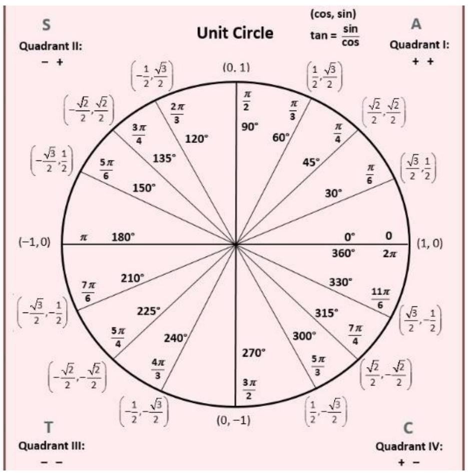
جامعة الشرقية
A' SHARQIYAH UNIVERSITY

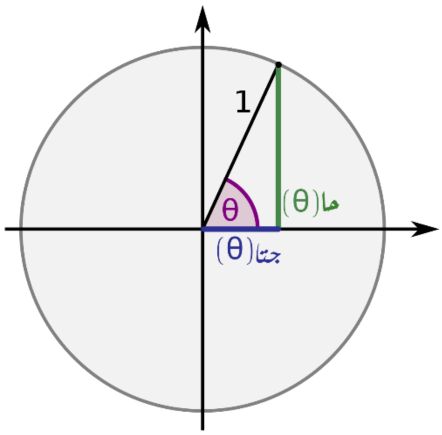
الرياضيات الأساسية

Basic Mathematics

الوحدة الخامسة

الدوال المثلثية والدوال الدائرية





الوحدة الخامسة: الدوال المثلثية والدوال الدائرية

الأهداف: بعد الانتهاء من هذه الوحدة سيتمكن الطالب من:

١) التعرف على نظامي قياس الزوايا الستيني والدائري.

٢) إيجاد طول القوس الدائري ومساحة القطاع الدائري.

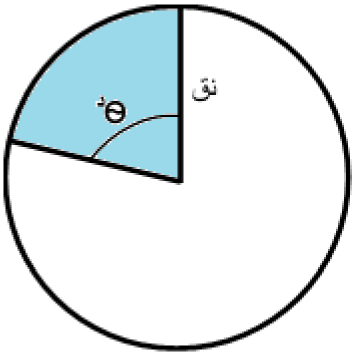
٣) التعرف على الدوال المثلثية والدائرية واستخدام القياسات الأساسية في حل المشكلات الرياضية.

٤) حل المثلثات القائمة باستخدام زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض.

٥) حل تطبيقات حياتية في الجبر وهندسة المثلث.

(٥–١): قياسات الزوايا:

العلاقة بين التقدير الستيني (الدرجات) والتقدير الدائري (الراديان):



١) $\pi \approx$ ٣,١٤١٥٩

٢) ٢$\pi \approx$ ٦,٢٨٣٢

٣) ١٨٠° = π د

٤) ٣٦٠° = ٢π د

٥) ١° = $\left(\frac{\pi}{١٨٠}\right)$ د

ملاحظة: تسمى المنطقة المظللة من الدائرة بالقطاع الدائري

٦) ١ د = $\left(\frac{١٨٠}{\pi}\right)$° ≈ ٥٧,٣°

٧) للتحويل من النظام الستيني إلى التقدير الدائري نستخدم العلاقة: أ° ⟵ أ° × $\frac{\pi}{١٨٠}$
زاوية نصف قطرية

٨) للتحويل من التقدير الدائري إلى النظام الستيني نستخدم العلاقة: أ د ⟵ أ د × $\frac{١٨٠}{\pi}$
درجة

طول القوس الدائري:

٩) طول القوس = نصف قطر الدائرة × قياس زاويته بالتقدير الدائري: ل = نق θᵈ

حيث ل طول القوس و نق طول نصف القطر، θᵈ قياس الزاوية المركزية المقابلة للقوس بالتقدير الدائري.

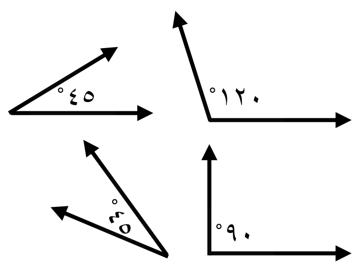
مساحة القطاع الدائري:

١٠) مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} θᵈ حيث نق طول نصف القطر، θᵈ قياس الزاوية المركزية المقابلة للقوس بالتقدير الدائري.

قياس الزوايا: إذا التقى شعاعين أو أكثر فإن التقاطع الناتج من هذا الالتقاء يسمى زاوية، ويمكن قياس الزاوية بإحدى الطريقتين الآتيتين:

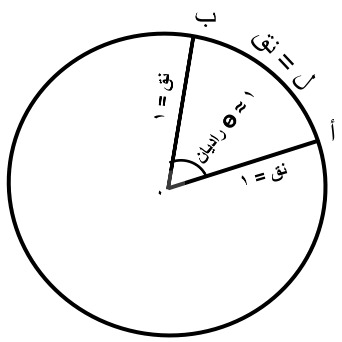
- قياس الزاوية بالتقدير الستيني (الدرجات): تستخدم الدرجات لقياس اتجاه ومقدار الزاوية ويتم استخدامه غالبا في الأشكال التي بها حواف حادة أو زوايا؛ مثل المربع، المستطيل والمثلث وغيرها.

أمثلة على قياس الزوايا بالتقدير الستيني (الدرجات)



- قياس الزاوية بالتقدير الدائري (الراديان): الزاوية المركزية (θᵈ) التي تتشكل بنصفي قطر الدائرة حيث (نق = ١) وطول القوس المقابل للزاوية المركزية (ل ≈ نق) عندها يكون قياس الزاوية المركزية يساوي (واحد راديان).

أي : إذا كان نق ≈ ل فإن θ = ١ راديان



مثال (١): حوّل ٦٠° إلى الزاوية النصف قطرية (الراديان).

الحل:

مقدار الزاوية ٦٠° بالتقدير الدائري = ٦٠ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{\pi}{٣}$ زاوية نصف قطرية

مثال (٢): حوّل $(\frac{\pi}{٣})^{\text{د}}$ إلى الدرجات.

الحل:

مقدار الزاوية بالنظام الستيني= $\frac{\pi}{٣}$ ×($\frac{١٨٠}{\pi}$)° = ٦٠°

مثال (٣): حوّل ٥ᵈ إلى الدرجات.

الحل:

مقدار الزاوية بالنظام الستيني = ٥ × ($\frac{١٨٠}{\pi}$)° = ٥ × (٥٧,٣)° = (٢٨٦,٥)°

تمارين (٥ – ١)

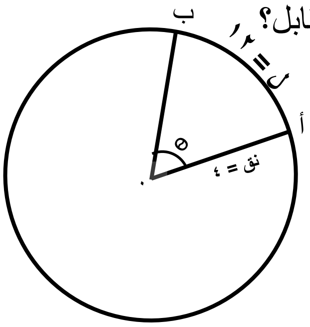
تمرين (١): حوّل من الدرجات إلى زوايا نصف قطرية (راديان):

١) ٩٠°
٢) ٣٦٠°
٣) -٣٣٠°
٤) (٠,٥)°
٥) ١٨٠°
٦) -١٠٨٠°
٧) ١٥٠°
٨) (١٦٧,٣)°
٩) ٢٧٠°
١٠) ٧,٦°
١١) -١٤٥٠°
١٢) –(١٦,٤)°

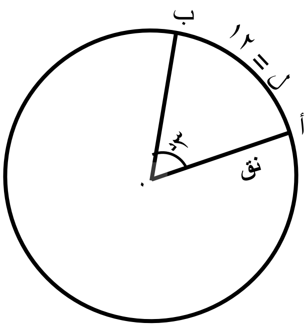
تمرين (٢): حوّل من زوايا نصف قطرية (راديان) إلى درجات:

١٣) $\frac{\pi}{٢}$
١٤) $\frac{٣\pi}{٢}$
١٥) $\frac{٣}{٢}$
١٦) $\frac{-٤\pi}{٢}$
١٧) ٥
١٨) ١٢π
١٩) $\frac{١٧\pi}{٢}$
٢٠) ٢,٧
٢١) $\frac{٣٢\pi}{٢}$

تمرين (٣): أوجد قياس الزاوية θ في الشكل المقابل؟



تمرين (٤): أوجد (نق) في الشكل المقابل؟



تمرين (٥): أوجد طول القوس (ل) في الشكل المقابل؟

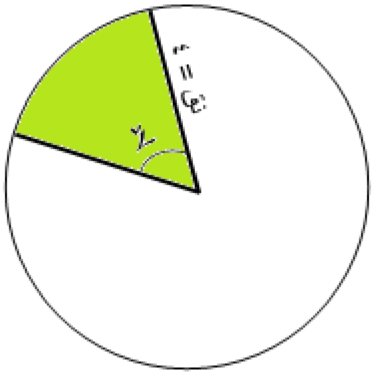
تمرين (٦): ما طول قوس من دائرة نصف قطرها ٣ م ويقابل زاوية مركزية قياسها ١٣٥° ؟

تمرين (٧): ما طول قوس من دائرة نصف قطرها ٧ م ويقابل زاوية مركزية قياسها ٤د ؟

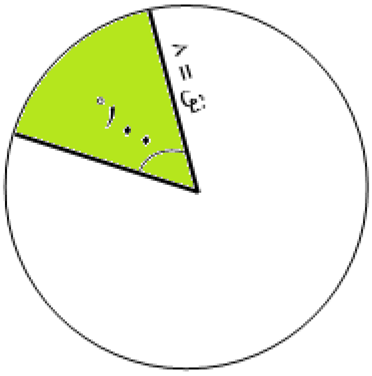
تمرين (٨): ما نصف قطر دائرة جزء من قوسها طوله ١٤ م ويقابل زاوية مركزية قياسها

$\left(\frac{\pi}{٧}\right)$ د ؟

تمرين (٩): احسب مساحة القطاع الدائري المظلل في الأشكال التالية:

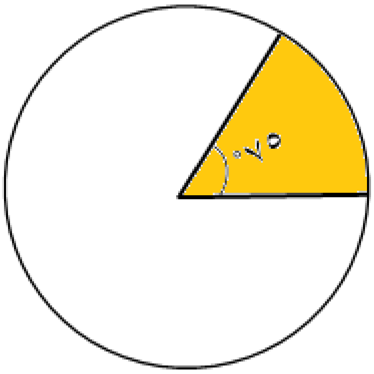


(أ)

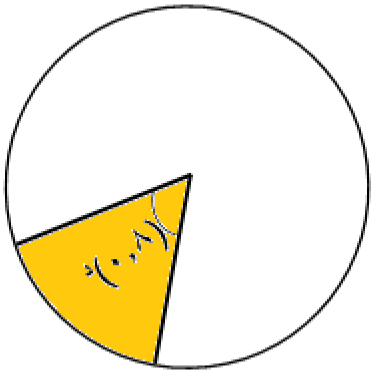


(ب)

تمرين (١٠): في الأشكال التالية: جد نصف قطر الدائرة التي مساحة قطاعها المظلل ٢٠م^{٢} ؟



(أ)



(ب)

تطبيقات حياتية:

١١) إذا كان طول أنبوب الري ٦٠٠م ، فما المساحة التي يمكن ريها بعد دوران $\left(\frac{٥\pi}{٣}\right)$د ؟

١٢) نافذة منزل جزئها العلوي على شكل نصف دائرة قطرها ٦ أقدام. جد مساحة القطاع الدائري الذي زاويته المركزية ٣٠° ؟ (استخدم ٣,١٤ = π)

١٣) شرائح بيتزا على شكل دائرة، فإذا كان نصف قطر البيتزا هو ٢٠سم، وقياس قوس شريحة البيتزا هو ٦٠° ، أوجد مساحة قطاع البيتزا؟

١٤) بندول طول نصف قطره ٤٠سم، يتأرجح بزاوية ١٨°، ما طول القوس الذي يتأرجح فيه البندول؟

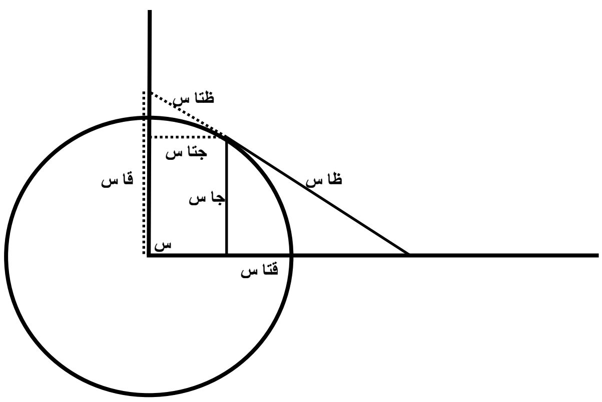
(٥–٢): الدوال المثلثية

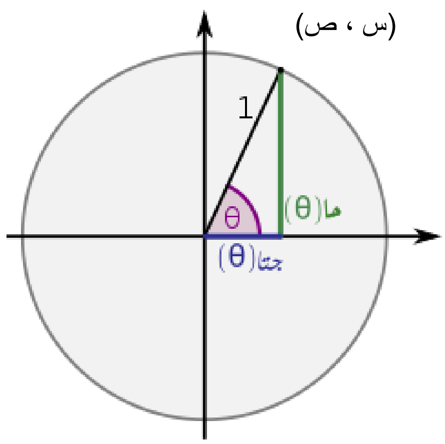
- الدوال المثلثية هي الدوال المتعلقة بالمثلثات وزواياها وأطوال أضلاعها.
- توجد ست دوال أساسية للمثلثات، (النسب المثلثية ومقلوباتها):
- النسب المثلثية الأساسية هي:
  - جيب الزاوية θ (جا θ)
  - جيب تمام الزاوية θ (جتا θ)
  - ظل الزاوية θ (ظا θ)

- مقلوب النسب المثلثية هي:
  - قتا θ
  - قا θ
  - ظتا θ

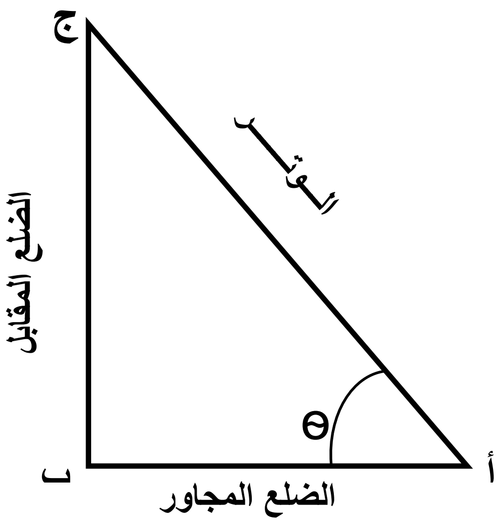
الدوال الدائرية:

وهي جزء من مجموعة الدوال المثلثية والمرتبطة بدائرة الوحدة، حيث كل نقطة على دائرة الوحدة تمثل نقطة مثلثية لزاوية في الوضع القياسي: ٠° > س > ٣٦٠° . والصور التالية توضح العلاقة بين الدوال المثلثية والدوال الدائرية:





النسب المثلثية للمثلث القائم الزاوية:



١) $\text{جـــا } \theta = \dfrac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}} = \dfrac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$

٢) $\text{قتـــا } \theta = \dfrac{\text{الوتر}}{\text{الضلع المقابل}} = \dfrac{\text{أ ج}}{\text{ب ج}}$

٣) $\text{جتـــا } \theta = \dfrac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}} = \dfrac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$

٤) $\text{قـــا } \theta = \dfrac{\text{الوتر}}{\text{الضلع المجاور}} = \dfrac{\text{أ ج}}{\text{أ ب}}$

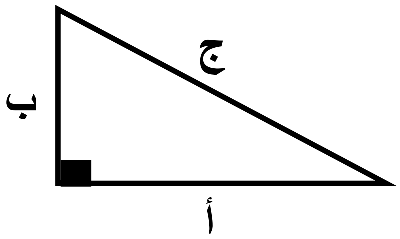
٥) $\text{ظـــا } \theta = \dfrac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}} = \dfrac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}}$

٦) $\text{ظتـــا } \theta = \dfrac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الضلع المقابل}} = \dfrac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}}$

نظرية فيثاغورس:

في أي مثلث قائم الزاوية يكون مجموع مربعي ضلعي القائمة مساوياً لمربع الوتر.

$\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2} = \text{ج}^{2}$



ومنها نجد أن :

$\text{ج} = \sqrt{\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2}}$

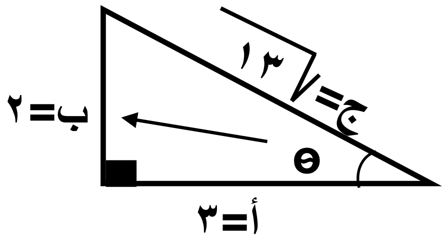
$\text{أ} = \sqrt{\text{ج}^{2} - \text{ب}^{2}}$

$\text{ب} = \sqrt{\text{ج}^{2} - \text{أ}^{2}}$

ملاحظة: مجموع زوايا أي مثلث يساوي ١٨٠° .

مثال(١):

في المثلث قائم الزاوية أدناه، أوجد النسب المثلثية ومقلوباتها للزاوية θ ؟



الحل:

المعطيات:

المثلث قائم الزاوية

الضلع المقابل للزاوية θ هو ب = ٢

الضلع المجاور للزاوية θ هو أ = ٣

الوتر هو ج = √١٣

النسب المثلثية:

$$\text{جا } \theta = \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \frac{٢}{\sqrt{١٣}}$$

$$\text{جتا } \theta = \frac{\text{أ}}{\text{ج}} = \frac{٣}{\sqrt{١٣}}$$

$$\text{ظا } \theta = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{٢}{٣}$$

مقلوب النسب المثلثية:

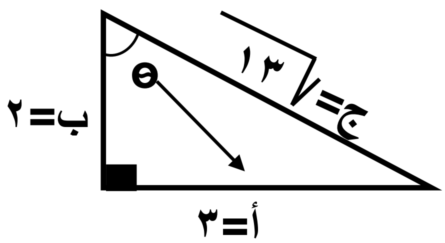
$$\text{قتا } \theta = \frac{\text{ج}}{\text{ب}} = \frac{\sqrt{١٣}}{٢}$$

$$\text{قا } \theta = \frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{١٣}}{٣}$$

$$\text{ظتا } \theta = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٣}{٢}$$

مثال(٢): في المثلث قائم الزاوية أدناه، أوجد النسب المثلثية ومقلوباتها للزاوية θ ؟

المعطيات:



المثلث قائم الزاوية

الضلع المقابل للزاوية θ هو أ = ٣

الضلع المجاور للزاوية θ هو ب = ٢

الوتر هو ج = √١٣

النسب المثلثية:

جـــا θ = $\frac{أ}{ج}$ = $\frac{٣}{\sqrt{١٣}}$

جتـــا θ = $\frac{ب}{ج}$ = $\frac{٢}{\sqrt{١٣}}$

ظـــا θ = $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{٣}{٢}$

مقلوب النسب المثلثية:

قتـــا θ = $\frac{ج}{أ}$ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٣}$

قـــا θ = $\frac{ج}{ب}$ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٢}$

ظتـــا θ = $\frac{ب}{أ}$ = $\frac{٢}{٣}$

مثال(٣): في المثلث قائم الزاوية أدناه، أوجد النسب المثلثية ومقلوباتها للزاوية θ ؟

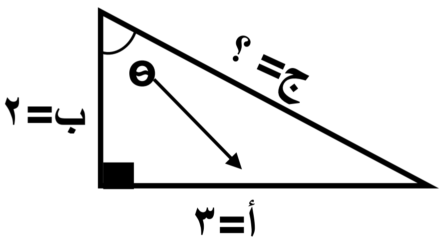
المعطيات:

المثلث قائم الزاوية

الضلع المقابل للزاوية θ هو أ = ٣

الضلع المجاور للزاوية θ هو ب = ٢

الوتر هو ج = ؟



لإيجاد قيمة الوتر ج = $\sqrt{أ^٢ + ب^٢}$ = $\sqrt{(٣)^٢ + (٢)^٢}$ = $\sqrt{١٣}$

النسب المثلثية:

جـــا θ = $\frac{أ}{ج}$ = $\frac{٣}{\sqrt{١٣}}$

جتـــا θ = $\frac{ب}{ج}$ = $\frac{٢}{\sqrt{١٣}}$

ظـــا θ = $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{٣}{٢}$

مقلوب النسب المثلثية:

قتـــا θ = $\frac{ج}{أ}$ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٣}$

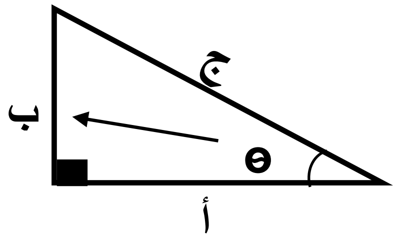
قـــا θ = $\frac{ج}{ب}$ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٢}$ ، ظتـــا θ = $\frac{ب}{أ}$ = $\frac{٢}{٣}$

قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة:

الزاوية θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$=٣٠°	$\frac{\pi}{٤}$=٤٥°	$\frac{\pi}{٣}$=٦٠°	π= ١٨٠°	$\frac{٣\pi}{٢}$=٢٧٠°	٢π= ٣٦٠°	$\frac{\pi}{٢}$=٩٠°
جا θ	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	٠	-١	٠	١
جتا θ	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	-١	٠	١	٠
ظا θ	٠	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$	٠	غير معينة	٠	غير معينة

تطبيقات النسب المثلثية لحل المثلث القائم:

للمثلث ستة عناصر (ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا) ولحل المثلث القائم يجب إيجاد أطوال هذه الأضلاع وقياسات هذه الزوايا. وتستخدم الدوال المثلثية لإيجاد العنصر المجهول في المثلث القائم كالتالي:



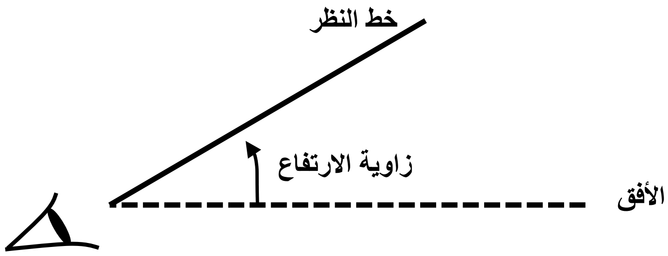
أ^٢ + ب^٢ = ج^٢

أ = ج جتـــا θ

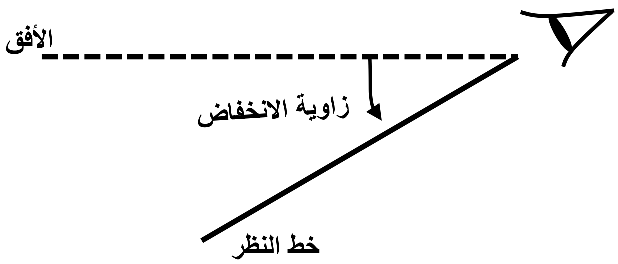
ب = ج جـــا θ

زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض:

توجد هنالك زاويتان في حساب المثلثات يثيران الاهتمام هما زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض.
وتتشكل زاوية الارتفاع بخط أفقي وخط النظر إلى نقطة ما تقع فوق خط الأفق.

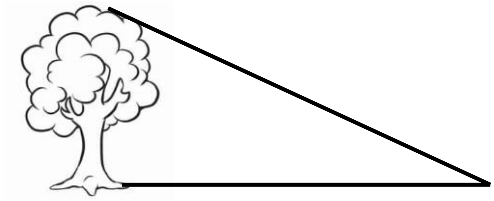


أما زاوية الانخفاض فهي تتشكل بخط أفقي وخط النظر إلى نقطة ما تقع أدنى خط الأفق.



مثال(١):

إذا كان شخص يبعد عن شجرة بمسافة ٢٨ م ونظر الشخص إلى أعلى الشجرة بزاوية ارتفاع مقدارها ٣٠°، فأوجد ارتفاع الشجرة؟



الحل:

نرسم مثلث قائم الزاوية

المعطيات:

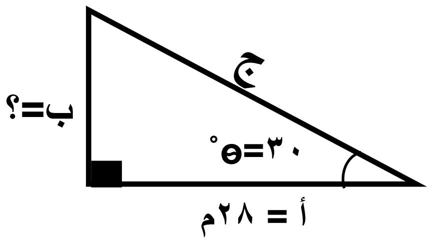
زاوية الارتفاع= ٣٠°

أ = ٢٨ م

المطلوب:

ارتفاع الشجرة = ب

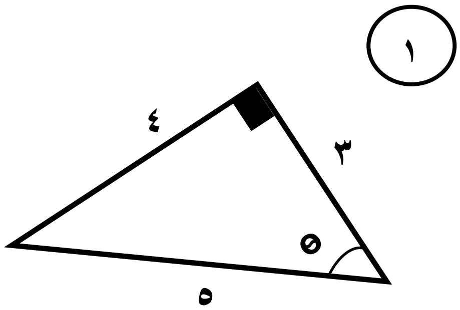
لإيجاد ارتفاع الشجرة:

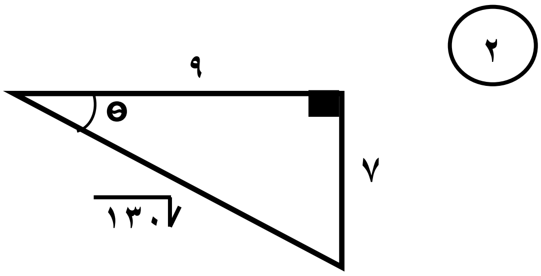


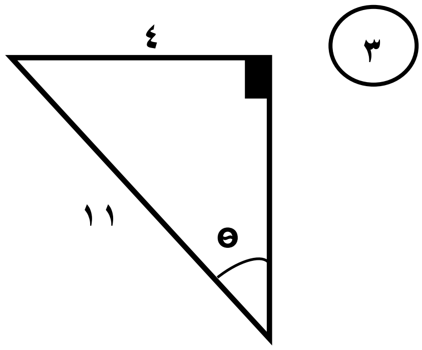
ظـا θ = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ = $\frac{\text{ب}}{٢٨}$ ومنها ب = ٢٨ × ظـا ٣٠° = ١٦,١٦٦ م

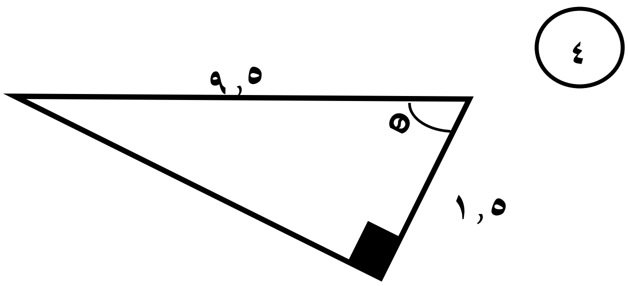
تمارين (٥-٢)

السؤال الأول: أوجد النسب المثلثية ومقلوباتها للمثلثات التالية حسب الزوايا المحددة في كل شكل:



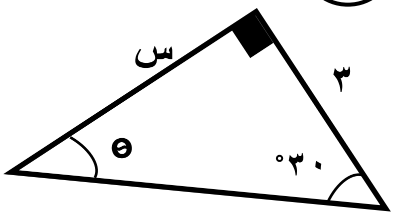




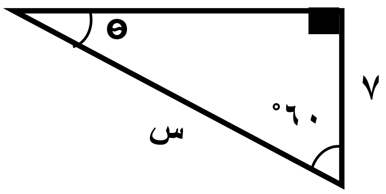


السؤال الثاني: أوجد قيمة الضلع (س) والزاوية θ من الأشكال التالية مقرباً الناتج إلى منزلتين عشريتين؟

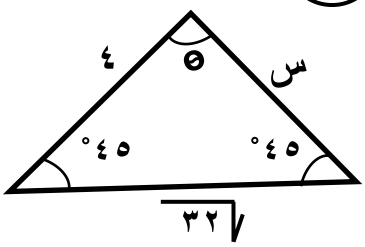
٥



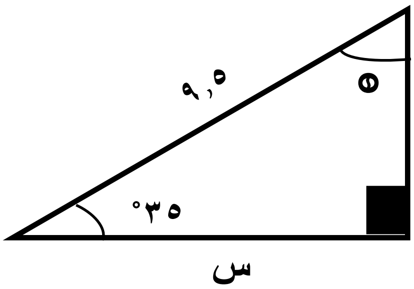
٦



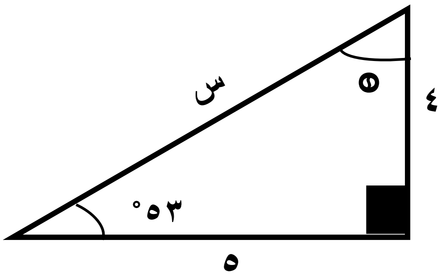
٧



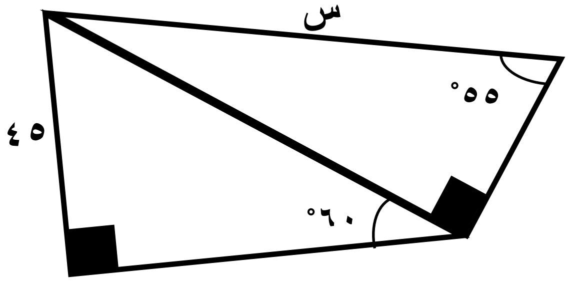
٨



٩



١٠



السؤال الثالث: ارسم المثلث حاد الزاوية θ ثم أوجد النسب المثلثية ومقلوباتها حسب المعطيات التالية:

١) جا $\theta = \frac{٢}{٥}$

٢) جتا $\theta = \frac{٩}{٤٠}$

٣) ظا $\theta = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

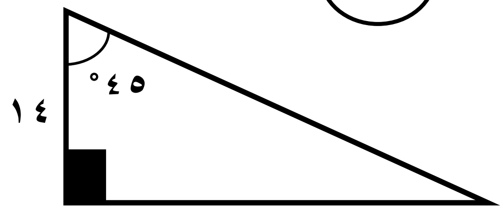
٤) قتا $\theta = \frac{١٣}{١٢}$

٥) قا $\theta = \frac{٥}{٤}$

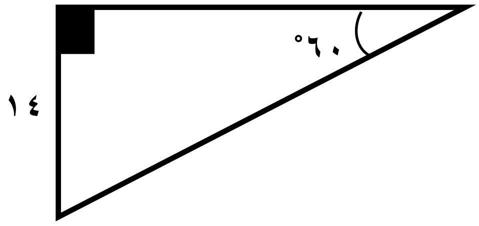
٦) ظتا $\theta = \frac{١}{٢}$

السؤال الرابع: حل المثلثات القائمة التالية:

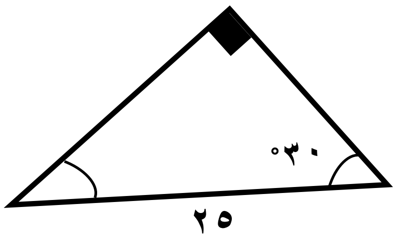
١٧



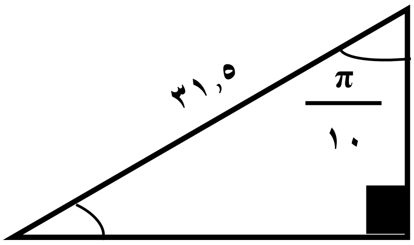
١٨



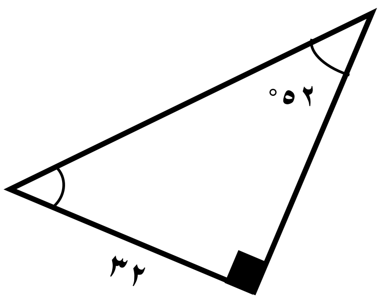
١٩



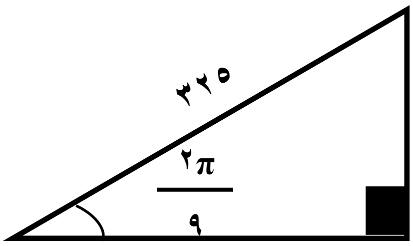
٢٠



٢١

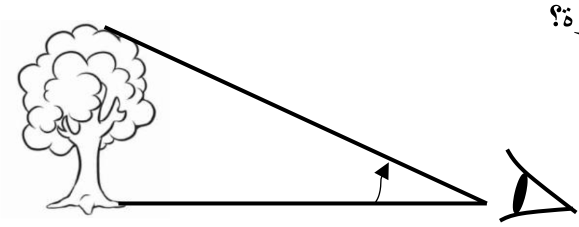


٢٢

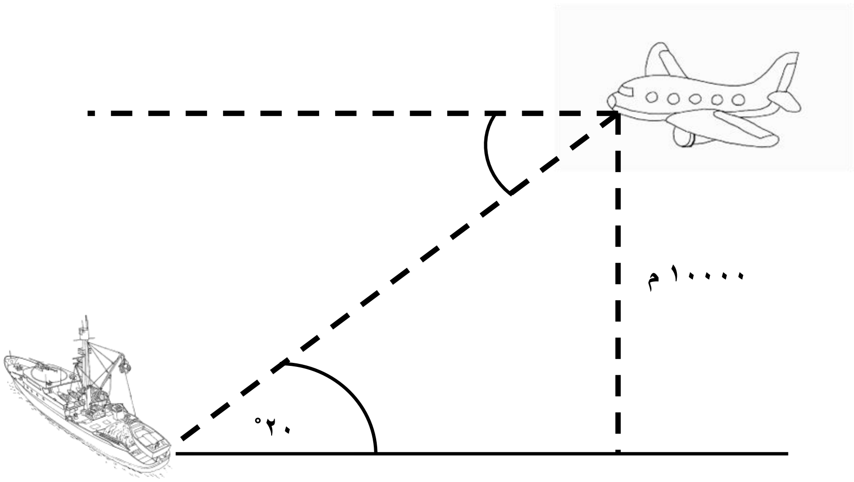


السؤال الخامس: تطبيقات على النسب المثلثية والمثلثات القائمة:

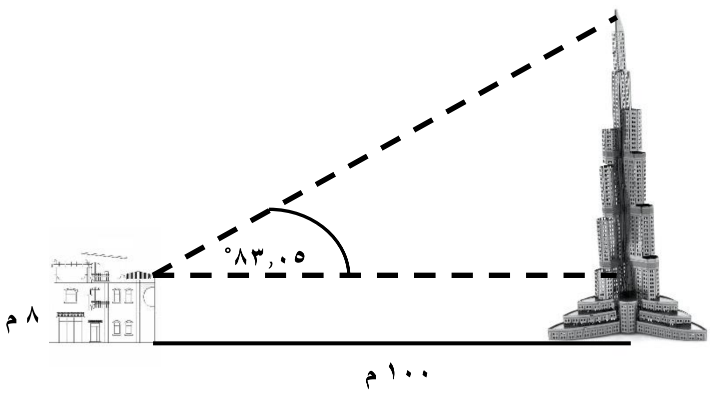
٢٣) إذا كان طول ظل الشجرة ٧٧م ونظر شخص من نهاية الظل إلى أعلى الشجرة بزاوية ارتفاع قدرها ٦٠°. فأوجد ارتفاع الشجرة؟



٢٤) في الشكل التالي: إذا كانت الطائرة تحلق بارتفاع ١٠٠٠٠م، أوجد زاوية الانخفاض التي ترسمها الطائرة مع السفينة، ثم أوجد المسافة بين الطائرة والسفينة؟



٢٥) في الشكل التالي: مبنى ارتفاعه ٨ م ويبعد عن برج بمسافة ١٠٠م ونظر شخص من سطح المبنى إلى قمة البرج بزاوية ارتفاع مقدارها ٨٣,٠٥° . أوجد ارتفاع البرج؟

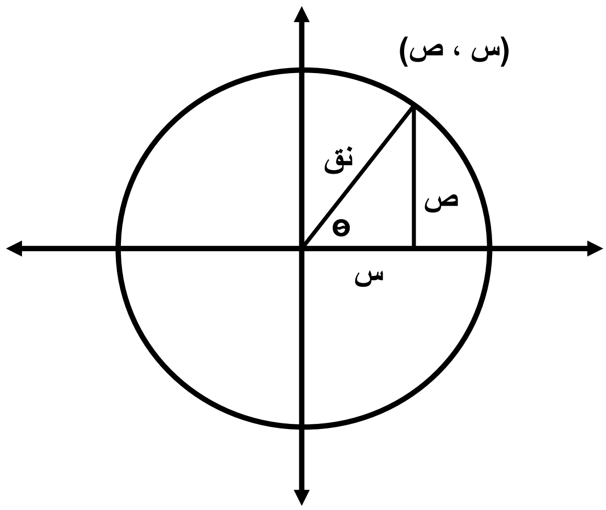


(٣-٥): الدوال المثلثية في المستوى الإحداثي

كل نقطة على دائرة الوحدة (س ، ص) تمثل نقطة مثلثية لزاوية في الوضع القياسي θ حيث : $^\circ$٠ $\leq \theta \leq$ ٣٦٠ .

من الشكل التالي المسافة من نقطة الأصل إلى النقطة (س ، ص) تمثل بالعلاقة :

نق = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ فتكون النسب المثلثية كالتالي:



النسب المثلثية:

جـا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{نق}}$

جتـا θ = $\frac{\text{س}}{\text{نق}}$

ظـا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

مقلوب النسب المثلثية:

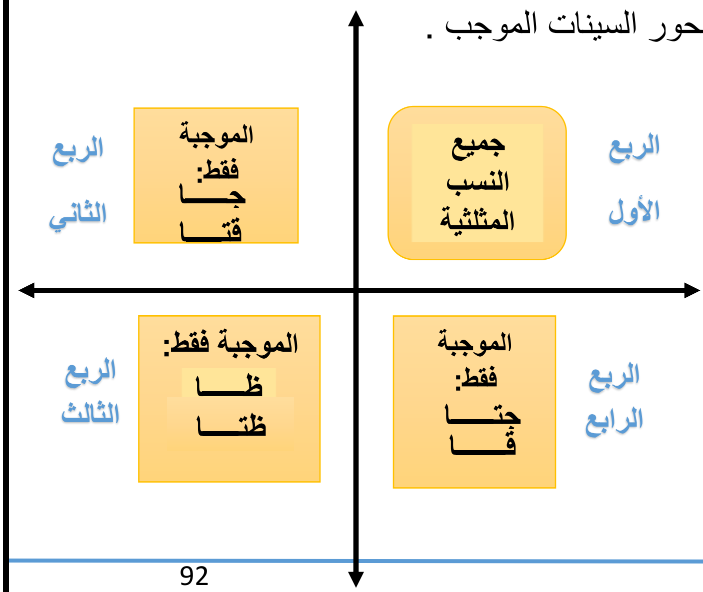
قتـا θ = $\frac{\text{نق}}{\text{ص}}$

قـا θ = $\frac{\text{نق}}{\text{س}}$

ظتـا θ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

ملاحظة : س ، ص لا تساوي الصفر، والضلع النهائي للزاوية يمكن أن يكون في أي ربع في الدائرة ، بينما الضلع الإبتدائي يكون منطبقا على محور السينات الموجب .

إشارات النسب المثلثية في المستوى الاحداثي:



المتطابقات:

١) جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ = ١

٢) ١ + ظـــا^{٢} θ = قـــا^{٢} θ

٣) ١ + ظتـــا^{٢} θ = قتـــا^{٢} θ

تمارين (٥-٣)

السؤال الأول: حدد قيم النسب المثلثية للزاوية θ من المعلومات التالية:

١) جا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، θ تقع في الربع الأول

٢) جتـــا θ = $\frac{١}{٢}$ ، جتا θ > ٠

٣) ظتا θ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، θ تقع في الربع الثالث

٤) ظا θ = -$\sqrt{٣}$ ، θ تقع في الربع الرابع

٥) قا θ = ٥ ، جا θ < ٠

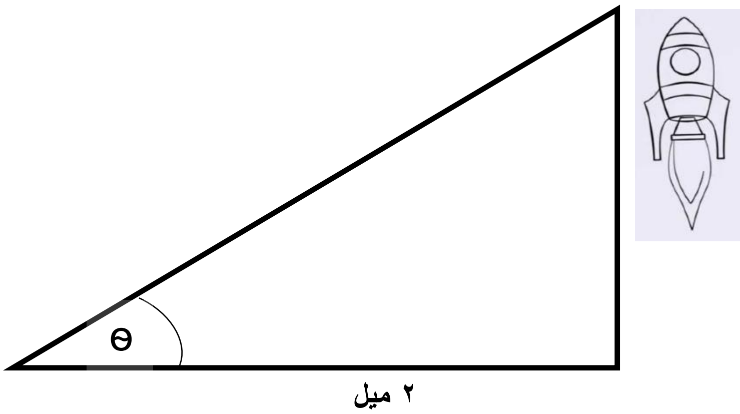
٦) جتـــا θ = $\frac{-٢}{٧}$ ، ظا θ < ٠

تطبيقات حياتية للنسب المثلثية:

١) صاروخ يطلق عبر منصة ويتم تعقبه من مسافة ٢ ميل، كما هو موضح في الشكل،
فإذا كان ارتفاع الصاروخ بالميل يعطى بالعلاقة:

ع = ٤٥٠٠ ظا θ ، وزاوية الارتفاع ٣٠°

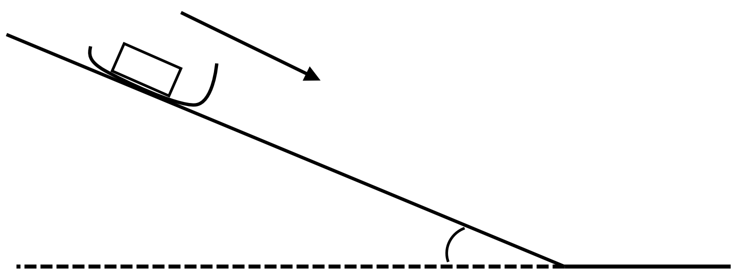
فأوجد ارتفاع الصاروخ وبعد الصاروخ عن منطقة التعقب ؟



٢) زلاجة تنحدر من على تل ارتفاعه ٢٥٠٠م فإذا كانت الزاوية التي يصنعها التل مع سطح الأرض تقدر بـ ٣٠° والوقت الذي تستغرقه الزلاجة للوصول إلى أسفل التل يعطى بالعلاقة:

$$ت = \sqrt{\frac{أ}{١٦ \text{جا} \theta}}$$ حيث(أ) تمثل المنحدر،

فأوجد الوقت بالدقائق لوصول الزلاجة إلى أسفل التل؟



انتهى