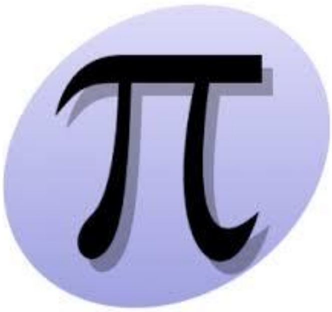
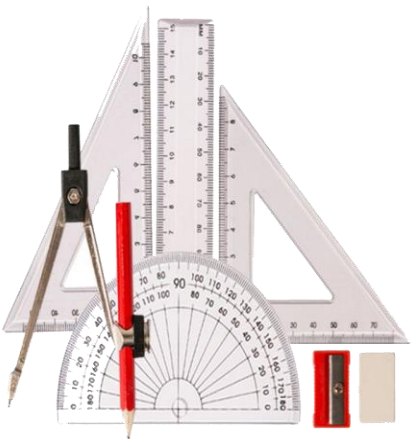
الرياضيات التطبيقية





قائمة المحتويات

الوحدة الأولى: الدوال ورسوماتها ٤
تعريف الدالة ٥
تطبيقات ٩
تركيب الدوال ١٠
الدالة واحد لواحد ١١
الدالة العكسية ١٣
رسم الدوال ١٦
التماثل ٢٠
الوحدة الثانية: الدالة التربيعية ٢٢
تطبيقات حياتية ٢٥
حل المتباينة من الدرجة الثانية ٢٧
تمارين على الوحدة الثانية ٢٨
الوحدة الثالثة: الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية ٢٩
الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية ٣٠
خواص الدالة الأسية ٣١
الفائدة المركبة ٣١
تمارين ٣٣
الدالة الطبيعية الأسية ٣٤

الدالة اللوغاريتمية...٣٥

قوانين اللوغاريتمات...٣٩

حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية..٤٠

تطبيقات حياتية...٤٢

الوحدة الرابعة: نظام المعادلات الخطية والمتباينات في متغيرين..................٤٦

نظام المعادلات الخطية والمتباينات في متغيرين...............................٤٧

المتباينات الخطية في متغيرين..٥٠

نظام المتباينات الخطية في متغيرين ٥١

الوحدة الخامسة: الإحصاء والاحتمالات...٥٥

الإحصاء والاحتمالات...٥٦

مقاييس النزعة المركزية...٥٦

تمارين...٥٨

التباين والانحراف المعياري...٥٩

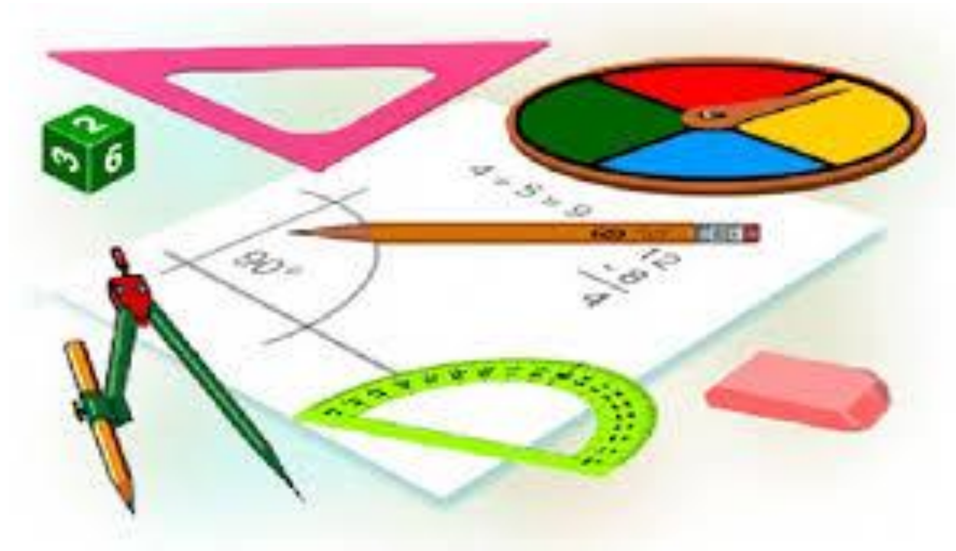
تمثيل البيانات الإحصائية...٦١

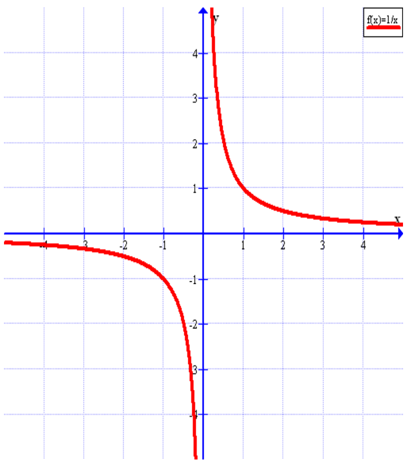
مقدمة في الاحتمالات...٦٦

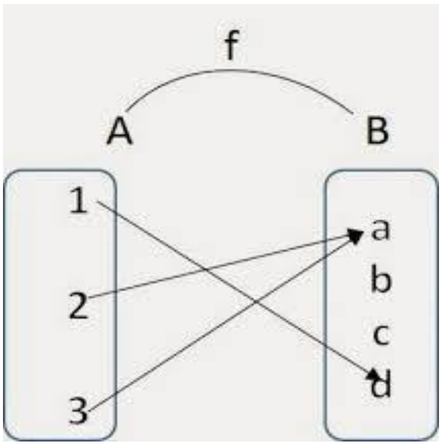
مخطط الشجرة في الاحتمالات...٦٩

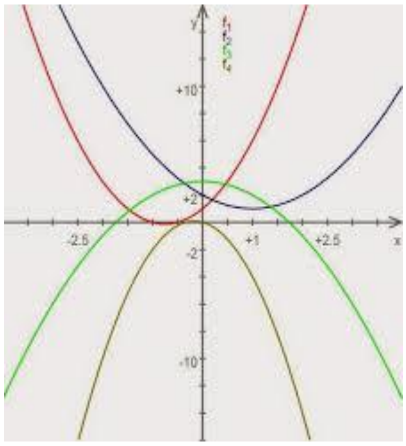
التباديل والتوافيق... ٧٢

الوحدة الأولى: الدوال ورسوماتها







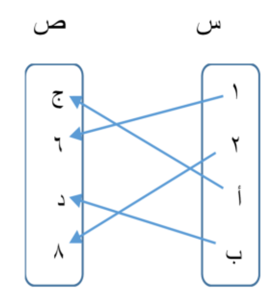


الدرس الأول : تعريف الدالة

الأهداف: ١) تعريف الدالة وتمثيلها بشكل فن ٢) تحديد المجال والمدى للدالة.

تعريف الدالة: د : س ⟵ ص
هي علاقة تربط كل عنصر في المجموعة س بعنصر واحد فقط في المجموعة ص

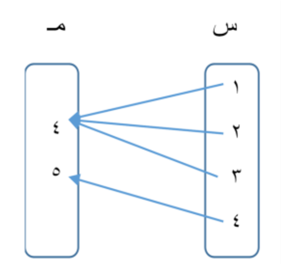
مثال(١): حدد أي من الأشكال التالية تمثل دالة أو لا مع ذكر السبب:-



الشكل يمثل دالة : لأن كل عنصر في س ارتبط بعنصر واحد فقط في ص .

المجال = س ={٢،١،أ،ب}

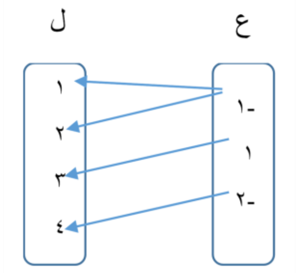
المدى = {ج،٦،د،٨}



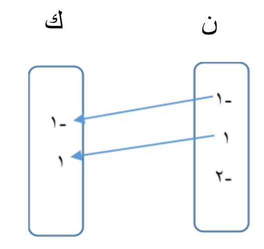
الشكل يمثل دالة : لأن كل عنصر في س ارتبط بعنصر واحد فقط في ص .

المجال = س ={١،٢،٣،٤}

المدى = {٤،٥}



الشكل لا يمثل دالة : لأنه يوجد عنصر في ع ارتبط بأكثر من عنصر في ل .



الشكل لا يمثل دالة : لأنه يوجد عنصر في ن لم يرتبط بعنصر في ك .

مثال (٢): عبر عن التعابير اللفظية التالية بالصيغة الرياضية:

أ) اطرح ١ من العدد ثم جد الجذر التربيعي له ⟵ $\sqrt{س - ١}$

ب) جد الجذر التربيعي للعدد ثم اطرح منه ١ ⟵ $\sqrt{س} - ١$

ج) جد مربع العدد ثم أضف له ٧ ثم اضربه في ٥ ⟵ $(س^٢ + ٧) \times ٥$

د) أضف للعدد ١٥ ثم اقسمه على ٦ ⟵ $\frac{س + ١٥}{٦}$

مثال(٣): عبر عن الصيغ الرياضية التالية بالصورة اللفظية:

أ) $س^٣ + ٣$ ⟵ جد مكعب العدد ثم أضف له ٣

ب) $(س - ٥)^٢ + ٤$ ⟵ اطرح ٥ من العدد ثم جد مربعه وأضف له ٤

ت) $\frac{س - ١}{١٠}$ ⟵ اطرح ١ من العدد ثم اقسمه على ١٠

مثال(٤): جد قيمة الدالة عند النقاط المحددة:

أ) $د(س) = س^٢ + س$ ، $س = -١ ، \frac{١}{٣} ، ن$

$د(-١) = (-١)^٢ + (-١) = ٠$ ،

$د(\frac{١}{٣}) = ...$ ، $د(ن) = ...$

ب) $م(س) = |٤ س - ١|$ ، $س = -٣ ، ٠ ، ٣$

$م(-٣) = |٤ \times (-٣) - ١| = |-١٣| = ١٣$ ، $م(٠) = ...$ ، $م(٣) =$ ......

ت) $هـ(ن) = \sqrt{ن - ١٠}$ ، $ن = ١٠ ، -١٠ ، ٩١$

$هـ(١٠) = \sqrt{١٠ - ١٠} = \sqrt{٠} = ٠$ ، $هـ(-١٠)$ غير معرف ، $هـ(٩١) = ...$

مثال(٥): جد قيم الدالة عند النقاط المحددة:

أ) $هـ(س) = \begin{cases} س - ١ & ، س \geq ٠ \\ ٢ س^٢ & ، س < ٠ \end{cases}$ ، $هـ(-٥) ، هـ(٢) ، هـ(٠)$

الحل

$هـ(-٥) = ٢ \times (-٥)^٢ = ٢ \times ٢٥ = ٥٠$ ، $هـ(٢) = ٢ - ١ = ١$ ،

$هـ(٠) = ...$

ب) د(س) = { ٥س ، س = ٠ ؛ س^{٢} - ١ ، ٠ > س ؛ س^{٣} - ٨ ، ١ < س } ، د(٠) ، د(−٢) ، د(٤)

الحل

د(٠) = ٥×٠ = ٠ ، د(−٢) = (− ٢)^{٢} − ١ = ٤ − ١ = ٣ ،
د(٤) = ...

تدريب(١): جد قيم الدالة عند النقاط المحددة:

أ) ع (ن) = { ن ، ٢ ≥ ن ≥ ٠ ؛ ن^{٢} - ن ، ١- > ن ؛ ن - ٣ ، ٢ < ن } ، ع(١,٢) ، ع(−٢) ، ع(١٠)

مثال(٦): جد (د + هـ) ، (د − هـ) ، (د هـ) ، $\frac{\text{د}}{\text{هـ}}$ إذا كان:

الحل

أ) د(س) = ٢س −٣ ، هـ(س) = −س + ٢

د + هـ = (٢س−٣) + (−س +٢) = (٢س−س) + (−٣+٢) = س + (−١)

د − هـ = (٢س−٣) − (−س +٢) = (٢س−٣) + (س −٢)

= (٢س+س) + (−٣−٢) = ٣س + (−٥)

د هـ = (٢س−٣) × (−س +٢) = (−٢س^{٢}) + ٤س + ٣س −٦

= −٢س^{٢} + ٧س −٦

$\frac{\text{د}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{٢س - ٣}}{\text{-س +٢}}$

تدريب (٢): جد (د + هـ) ، (د − هـ) ، (د هـ) ، $\frac{د}{هـ}$ إذا كان:

أ) د(س) = $س^٢ − ٤س − ٣$ ، هـ(س) = $− ٧س^٢ + ٢س$

ب) د(س) $\frac{س + ٣}{١٥}$ ، $\frac{- س^٢ − ٣س}{س^٣}$

ت) د(س) = $\sqrt{س − ١}$ ، هـ(س) = $٤ \ (س − ١)^٢$

مثال(٧): جد المجال للدوال التالية:

أ) ع(س) = $س^٣ − ١$ ب) هـ(س) = $\frac{١}{٢س + ٦}$

الحل

أ) المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح

ب) المجال ح − {−٣}

تدريب(٣): جد المجال للدوال التالية:

د(س) = $\frac{٣}{(س − ٤)^٢}$ د) ع(ن) = $٧ − ٤ن$

ب) د(س) = $٢س − ٧$ و) هـ(س) = $\frac{١}{\sqrt{٥ - س}}$

تطبيقات:

تدريب(٤): الدالة التالية تمثل تكلفة انتاج س بالمتر من الأقمشة بالريال العماني:

د(س) = ١٥٠٠ + ٣س + ٠,٠٢ س^{٢} + ٠,٠٠٠١ س^{٣} جد تكلفة انتاج

١) ١٥ متر ٢) ١٠٠ متر.

تدريب(٥): مساحة أي سطح كروي م يعطى بالدالة م(نق) = ٤ π نق^{٢} ، حيث نق يمثل نصف قطر الكرة. جد مساحة السطح الكروي إذا كان نصف قطر الكرة يساوي ٢.

تدريب(٦): في بعض الدول تحسب ضريبة الدخل وفق الدالة التالية:

د(س) =
- ٠ ، ٠ ≤ س ≤ ١٠٠٠٠
- ٠,٠٩ س ، ١٠٠٠٠ < س ≤ ٣٠٠٠٠
- ١٥٠٠ + ٠,١٥ س ، س > ٣٠٠٠٠

جد د(٦٠٠٠) ، د(١٤٠٠٠) ، د(٤٥٠٠٠) .

تركيب الدوال:

المقصود بتركيب الدوال هو تركيب دالة بعد تطبيق دالة أخرى و يرمز لها بالرمز (د هـ هـ)(س) أو د(هـ(س))

(د ∘ هـ) (س) تعني تطبق الدالة هـ(س) أولاً ثم تطبق الدالة د(س) على الناتج

س ← $\boxed{\text{هـ(س)}}$ ← هـ(س) ← $\boxed{\text{د(س)}}$ ← د(هـ(س))

<u>شرط تركيب الدوال (د هـ هـ)(س) : أن يكون مدى الدالة هـ(س) مجموعة جزئية من مجال الدالة د(س)</u>

مثال: إذا كانت د(س)=٣س+١ و هـ(س) = ٤س، أوجد (د O هـ)(٣)، (هـ O د)(٣) ، (د O د)(٣)

الحل:

(د O هـ)(٣)=د(هـ(٣))=د(٤×٣)=د(١٢)=٣×١٢+١=٣٧

(هـ O د)(٣)=هـ(د(٣))=هـ(٣×٣+١)=هـ(١٠)=٤×١٠=٤٠

(د O د)(٣)=د(د(٣))=د(٣×٣+١)=د(١٠)=٣×١٠+١=٣١

تمرين: إذا كانت د(س)=س^{٢}−١ و هـ(س)=٣س، أوجد (د O هـ)(٢)، (هـ O د)(١) ، (د O د)(٠)

مثال: إذا كانت د(س)=٤س−١ و هـ(س)=س^{٢}، أوجد (د O هـ)(س)، (هـ O د)(س)

الحل:

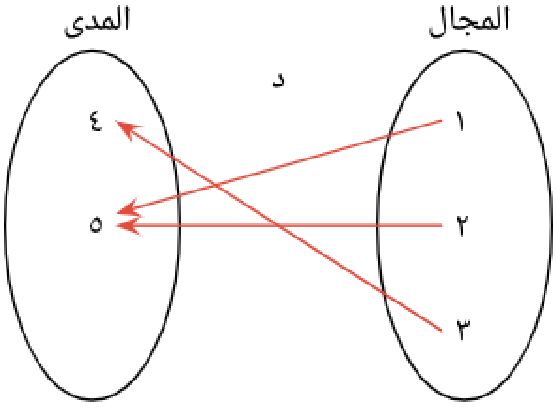
(د O هـ)(س)=د(هـ(س))=٤(هـ(س))−١=٤(س^{٢})−١=٤س^{٢}−١

(هـ O د)(س)=هـ(د(س))=(د(س))^{٢}=(٤س−١)^{٢}

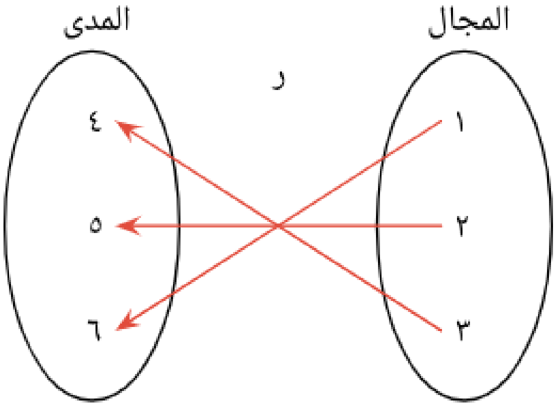
تمرين: إذا كانت د(س)=٢س و هـ(س)=$\sqrt{\text{س} - ٣}$ ، أوجد(د ∘ هـ)(س)، (هـ ∘ د)(س)

<u>الدالة واحد لواحد:</u>

تكون الدالة أحادية، أو دالة واحد لواحد، إذا كان كل عنصر من عناصر مدى الدالة يناظر عنصرًا واحدًا فقط من عناصر مجالها.



غير أحادية



أحادية

وهذا يعني أنه إذا كانت د(أ) ≠ د(ب) فإن أ ≠ ب وإن كانت د(أ) = د(ب) فإن أ = ب

مثال ١: وضّح إن كانت الدالة د(س)=٣س−٢ تمثل دالة واحد لواحد

الحل:

نفرض أن د(أ) = د(ب)

٣أ−٢ = ٣ب−٢ بإضافة النظير الجمعي ٢ للطرفين

٣أ = ٣ب بالقسمة على ٣

أ = ب

إذاً الدالة تكون واحد لواحد حسب التعريف .

مثال٢: وضّح إن كانت الدالة د(س)=٣س^{٢}−٢ تمثل دالة واحد لواحد

الحل:

نفرض أن د(أ) = د(ب)

٣أ^{٢}−٢ = ٣ب^{٢}−٢ بإضافة النظير الجمعي ٢ للطرفين

٣أ^{٢} =٣ب^{٢} بالقسمة على ٣

أ^{٢} = ب^{٢}

أ^{٢} − ب^{٢}= ٠ نحلل فرق بين مربعين

(أ−ب)(أ+ب)=٠

أ − ب = ٠ أو أ + ب = ٠

أ = ب أو أ = −ب

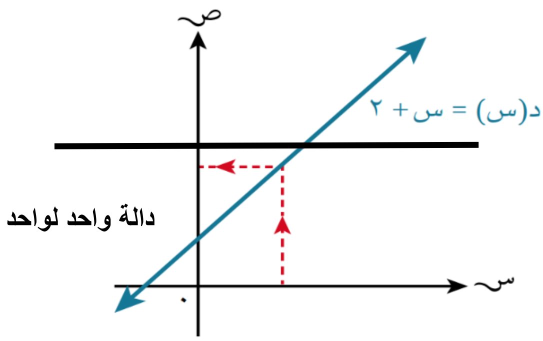
بما أنه يوجد للعنصر أ قيمتين، إذا الدالة ليست واحد لواحد

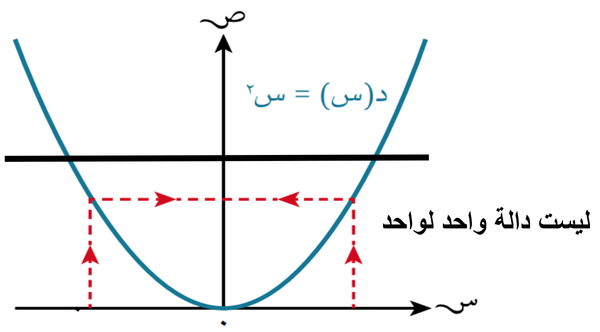
تمرين: بيّن إن كانت الدوال التالية هي دوال واحد لواحد أو لا:

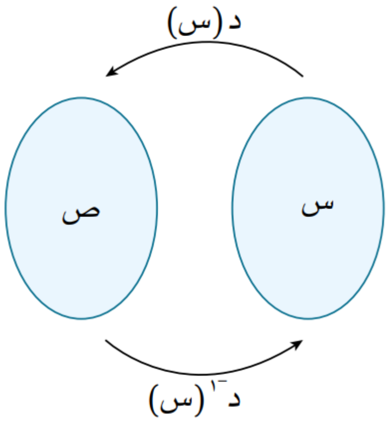
١) د(س)= $\sqrt{٢س −٤}$

٢) د(س)= س^{٣}+٢

ملاحظة: يمكن تحديد إن كانت الدالة واحد لواحد أم لا باستخدام (اختبار الخط الأفقي) حيث أنه إذا تقاطع الخط الأفقي مع منحنى الدالة في نقطة واحدة فإن الدالة تكون واحد لواحد و إلا فالدالة ليست كذلك.







الدالة العكسية:

الدالة العكسية (Inverse Function) للدالة د(س) هي:

الدالة التي تعكس ما تقوم به الدالة د(س)

تكتب الدالة العكسية للدالة د(س) في صورة د$^{-1}$(س)

ملاحظة:

توجد الدالة العكسية د$^{-1}$(س) إذا كانت الدالة د(س) دالة واحد لواحد فقط.

لإيجاد الدالة د$^{-1}$(س) نفترض أن ص=د(س) $\leftrightarrow$ د$^{-1}$(ص) = د$^{-1}$(د(س)) $\leftrightarrow$ د$^{-1}$(ص) = س

مثال: أوجد الدالة العكسية للدالة د(س)= ٢س−١

الحل:

نفرض أن د(س) = ص

ص= ٢س−١ نبدل ص مع س

س= ٢ص−١ نرتب الدالة لتكون ص بدلالة س

س+١ = ٢ص

ص = $\frac{\text{س} + ١}{٢}$ وعليه فإن الدالة العكسية هي د$^{-1}$(س)= $\frac{\text{س} + ١}{٢}$

تمرين: أوجد الدالة العكسية للدالة د(س)= $\sqrt{\text{س}-٥}$

خاصية الدالة العكسية: يقال عن الدالتان أنهما عكسيتان لبعض إذا تحقق الشرط التالي:

إذا كانت الدالة د هي دالة واحد لواحد و كان مجالها (أ) و مداها (ب) فإن

$د^{-1}(د(س)) = س$ لكل س ∈ أ ، إذا وفقط إذا $د(د^{-1}(س)) = س$ لكل س∈ ب

مثال: وضّح إن كان كل من الدالة د(س) = ٣س−١ و $هـ(س) = \frac{س + ١}{٣}$

دالتان عكسيتان لبعضهما.

الحل: لإثبات ذلك يجب أن نثبت أن د(هـ(س)) = هـ(د(س)) = س

أولاً: د(س)=٣س−١

د(هـ(س))=٣هـ(س)−١

$د(هـ(س)) = ٣(\frac{س + ١}{٣}) - ١$

د(هـ(س)) = س

ثانيا: $هـ(س) = \frac{س + ١}{٣}$

$هـ(د(س)) = \frac{د(س) + ١}{٣}$

$هـ(د(س)) = \frac{٣س - ١ + ١}{٣}$

هـ(د(س)) = س

بما أن د(هـ(س)) = هـ(د(س)) = س ، إذاً هما عكسيتان لبعض.

تمرين: وضّح إن كان كل من الدالة $د(س) = ٢س^{٣} - ٣$ و $هـ(س) = \sqrt[٣]{\frac{س + ٣}{٢}}$

دالتان عكسيتان لبعضهما.

تمارين:

تمرين١: إذا كانت د(س) = س^{٢}–٦ و هـ(س) = $\frac{\text{س - ٤}}{٢}$ فأوجد كلاً من:

١) (د O هـ)(٤)

٢) (هـ O د)(٤)

٣) (د O د)(٤)

٤) (د O هـ)(س)

٥) (هـ O د)(س)

تمرين٢: وضح إن كانت أي دالة من الدوال التالية تمثل دالة واحد لواحد:

١) د(س)= $\frac{\text{س - ٢}}{٣}$

٢) د(س)= $\sqrt[٣]{\text{٢س – ١}}$

٣) د(س)= ٢س^{٣} + ٢

تمرين٣: أوجد الدالة العكسية للدوال المذكورة في التمرين السابق إن أمكن.

تمرين٤: وضح إن كان كل من الدالة د(س) = ٥س+٣ و الدالة د(س)= $\frac{\text{س - ٣}}{٥}$

رسم الدوال:

الأهداف: ١) رسم الدالة عن طريق تحديد النقاط

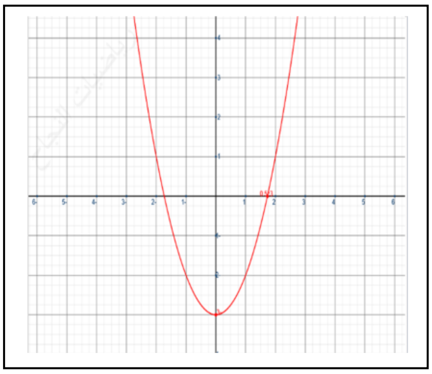
٢) التعرف على أشكال بعض الدوال الرئيسة

٣) توظيف التحويلات الهندسية في رسم الدوال.

مثال (١): ارسم الدالة د(س) = س^٢ −٣

الحل: نكون الجدول التالي ونرسم الدالة:

س	−٢	−١	٠	١	٢
د(س)	١	−٢	−٣	−٢	١

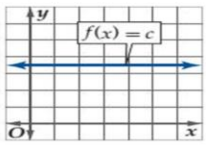


الدوال الرئيسة

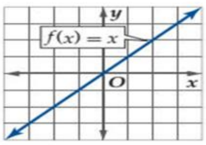
الدوال الرئيسة (الأم): عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها بصفة أو أكثر. وتُعرَّفُ **الدالة الرئيسة (الأم)** على أنها أبسط دالة في العائلة، إذ يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها لإيجاد باقي دوال العائلة.

مفهوم أساسي — **الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية و دوال كثيرات الحدود**

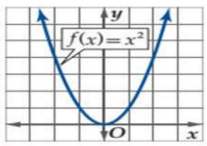
تكتب **الدالة الثابتة** على الصورة $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي وتُمثَّل بمستقيم أفقي.



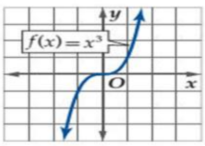
تمر **الدالة المحايدة** $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a).



يأخذ منحنى **الدالة التربيعية** $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.



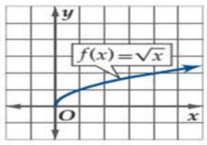
الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



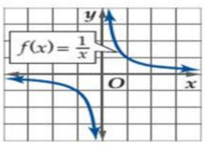
كما ستدرسُ أيضًا منحنيات دوال الجذر التربيعي ودوال المقلوب.

مفهوم أساسي — **الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍ من: دالتي الجذر التربيعي والمقلوب**

تكتب **دالة الجذر التربيعي** على الصورة $f(x) = \sqrt{x}$.



تكتب **دالة المقلوب** على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}$.



كما تُعَدُّ دالة القيمة المطلقة إحدى الدوال الرئيسة (الأم).

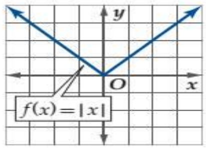
مفهوم أساسي **دالة القيمة المطلقة الرئيسة (الأم)**

التعبير اللفظي: يُرمز لدالة القيمة المطلقة، بالرمز $f(x) = |x|$، ويأخذ منحناها شكل الحرف V، وتعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

أمثلة: $|-5| = 5, \ |0| = 0, \ |4| = 4$

النموذج



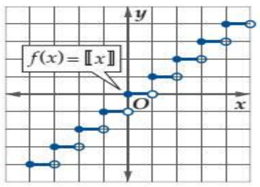
أما **الدالة الدرجية** فهي دالة متعددة التعريف يُشبهُ تمثيلها البياني الدرج، ومن الأمثلة المشهورة على هذا النوع دالة أكبر عدد صحيح.

مفهوم أساسي **دالة أكبر عدد صحيح**

التعبير اللفظي: يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x) = [\![x]\!]$، وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x.

أمثلة: $[\![-4]\!] = -4, \ [\![-1.5]\!] = -2, \ [\![\frac{1}{3}]\!] = 0$

النموذج



التحويلات الهندسية: تؤثر **التحويلات الهندسية** في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم). فبعضُ التحويلات تغيّر موقع المنحنى فقط ولا تغير أبعاده أو شكله وتسمى تحويلات قياسية. وبعضها الآخر يغير شكل المنحنى وتسمى تحويلات غير قياسية .

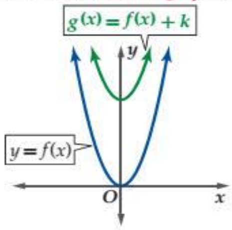
الإزاحة (الانسحاب) أحد التحويلات القياسية التي تنقل منحنى الدالة. فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة f إلى الأعلى أو الأسفل، على حين ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو اليسار.

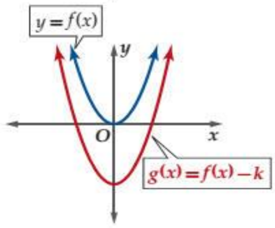
مفهوم أساسي **الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي**

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- k وحدة إلى الأعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

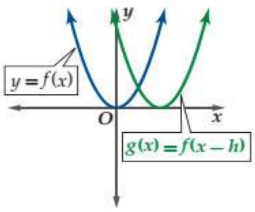


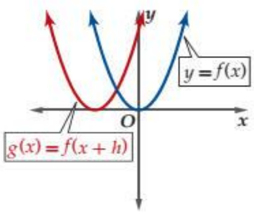


الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.



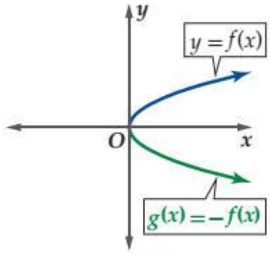


من التحويلات القياسية الأخرى **الانعكاس** والذي يُكوّن لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدّد.

مفهوم أساسي: الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

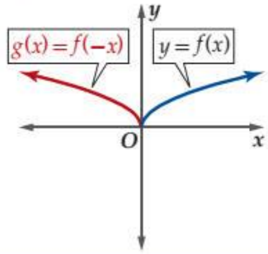
الانعكاس حول المحور x

منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x.



الانعكاس حول المحور y

منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y.



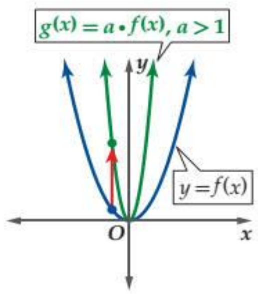
التمدد هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسعة (مط) منحنى الدالة رأسيًا أو أفقيًا.

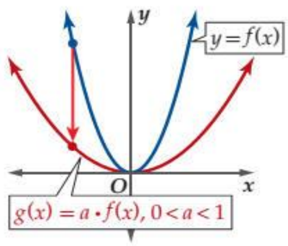
مفهوم أساسي: التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$، هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

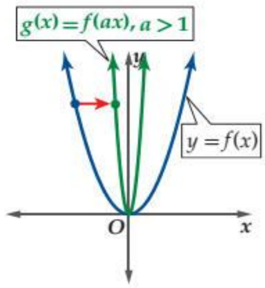


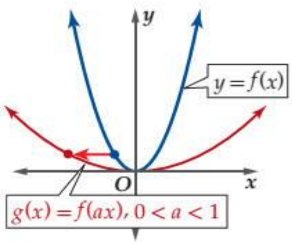


التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$، هو:

- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$



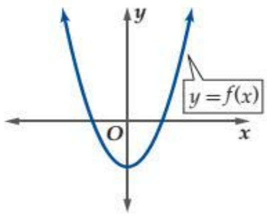


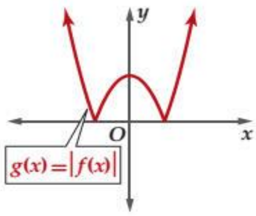
تُستعمَلُ تحويلات هندسية أخرى غير قياسية تتضمن القيمة المطلقة .

مفهوم أساسي **التحويلات الهندسية على دوال القيمة المطلقة**

$g(x) = |f(x)|$

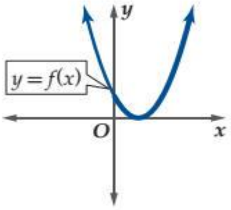
يعكس هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه.

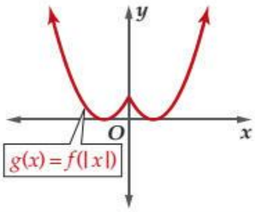




$g(x) = f(|x|)$

يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .





تدريب (١): باستخدام منحنيات الدوال الرئيسة ارسم منحنى الدوال:-

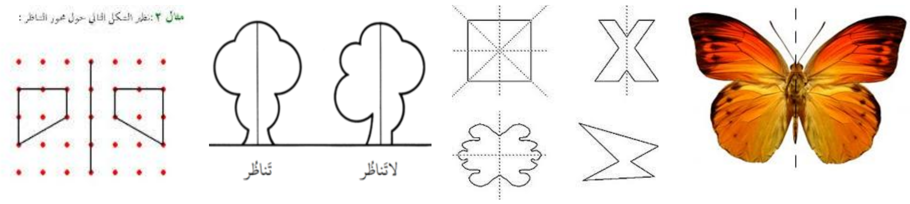
أ) د(س) = س^{٢} +٢	ب) د(س) = س^{٢} −٢
ج) هـ(س) = $\sqrt{س}$ + ٣	د) ص = −س^{٣}
هـ) ص = | س − ٣ |	و) د(س) = س^{٣} + ٢

التماثل:

التماثل: يتضمن جزأين متزنين حول خط يسمى خط التماثل.

خط التماثل: هو الخط الذي يقسم الشكل إلى نصفين متساويين (بحيث تناظر أي نقطة في الجانب الأيمن نقطة أخرى في الجانب الأيسر).

ملاحظة (أسهل طريقة للحصول على خط التماثل هو تخيل الموضع الذي يمكنك عنده طي الورقة إلى جزئيين بحيث ينطبق كل جزء تماما على الجزء الأخر.

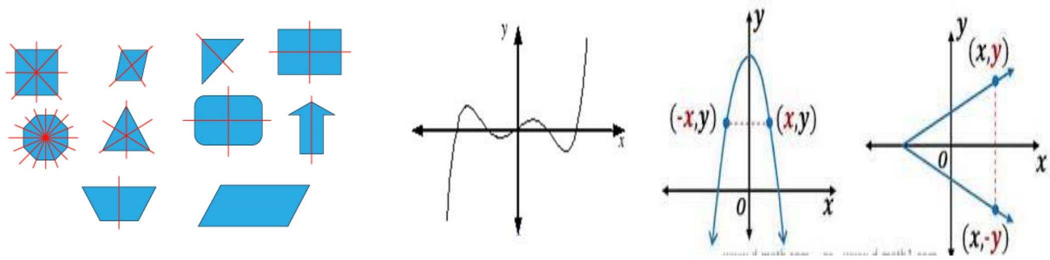


اختبار التناظر في الدوال:

التماثل حول محور السينات	ضع ص = −ص في الدالة: ⟵ متماثلة إذا لم تتغير الدالة.
التماثل حول محور الصادات	ضع س = −س في الدالة: ⟵ متماثلة إذا لم تتغير الدالة.
التماثل حول محور نقطة الأصل	ضع ص = −ص ، س = −س في الدالة: ⟵ متماثلة إذا لم تتغير الدالة.
التماثل حول المحور ص = س	ضع ص = س ، س = ص في الدالة: ⟵ متماثلة إذا لم تتغير الدالة.

مثال (١):

الأشكال التالية توضح التماثل:



مثال(٢): اختبر تماثل الدالة ص = س^{٢} + ٢ .

الحل : *بوضع ص = −ص ← −ص = س^{٢} +٢ ← تغيرت الدالة

← إذن الدالة غير متماثلة حول محور السينات.

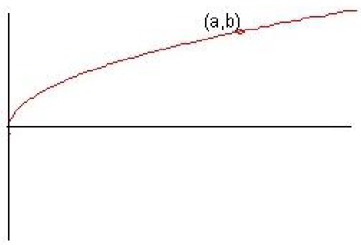
- وبوضع س= −س ← ص = (−س)^{٢} +٢ ← ص = س^{٢} +٢
  ← لم تتغير الدالة ← إذن الدالة متماثلة حول محور الصادات.
- وبوضع ص= −ص ، س= −س ← −ص = (−س)^{٢} + ٢ ← −ص = س^{٢} +٢
  تغيرت الدالة ← إذن الدالة غير متماثلة حول محور نقطة الأصل.

تدريب(٣): اختبر تماثل الدوال التالية:

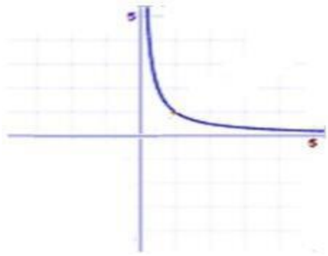
١) ص= ٢س +٢	٢) ص = ١ − س^{٢}	٣) ص= $\sqrt{\text{س} + ٥}$
٤) ١٢٥ص= س^{٣}	٥) ص= | ٣− س |	٦) ص= س^{٢} +| س |
٧) س^{٢}ص^{٢} − س ص =١	٨) س ص = ص^{٢} − س^{٢}	٩) ص = $\sqrt{\text{س}}$ + ١٠

تدريب(٤): أكمل الرسم باستخدام خصائص التماثل:

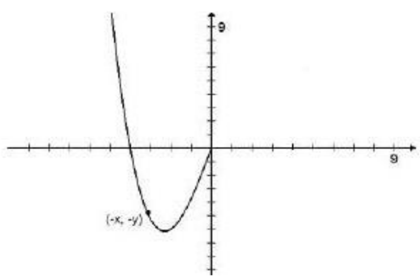
أ) متماثل حول محور السينات



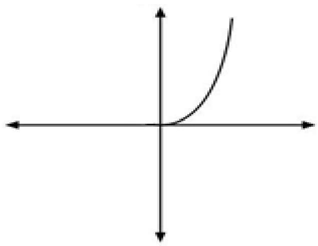
ب) متماثل حول نقطة الأصل



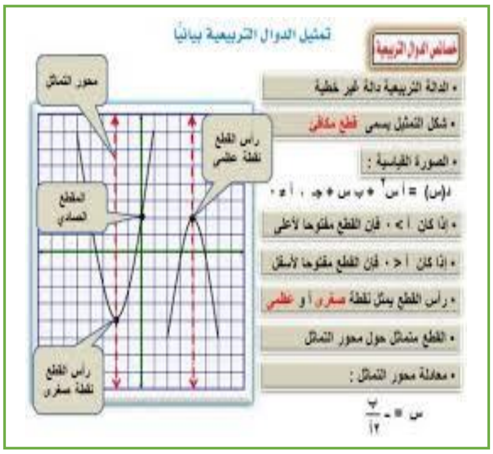
ج) متماثل حول نقطة الأصل

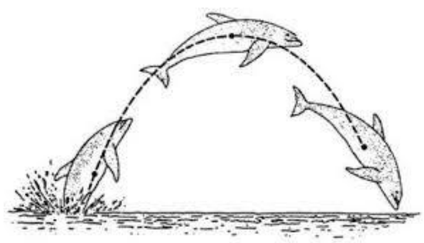


د) متماثل حول محور الصادات



الوحدة الثانية: الدالة التربيعية





الوحدة الثانية : الدالة التربيعية

الأهداف:

١) تحديد أصفار الدالة والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

٢) تحديد مجال ومدى الدالة التربيعية.

٣) حل تطبيقات على الدالة التربيعية.

٤) رسم الدالة التربيعية.

٥) حل المتباينات التربيعية.

تعريف الدالة التربيعية (Quadratic Function) هي دالة من الدرجة الثانية ، صورتها العامة

د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ   حيث أ ، ب ، جـ ∋ ح ، أ ≠ صفر .

أمثلة:

١) د(س) = ٥ س^{٢} + ٣ س −٤   ، أ= ٥ ، ب= ٣ ، جـ = −٤

٢) د(س) = س^{٢} + ٢ س   ، أ= ١ ، ب= ٢ ، جـ = ٠

٣) د(س) = س^{٢} ، أ= ١ ، ب= ٠ ، جـ= ٠

لرسم الدالة التربيعية د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ ، حيث أ ، ب ، جـ ∋ ح ، أ ≠ صفر :

١) شكل المنحنى على شكل قطع مكافئ Parabola .

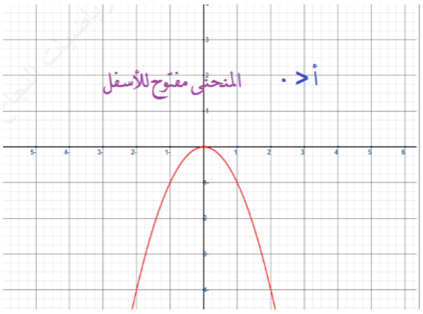
٢) إذا كانت أ > ٠ فإن المنحنى مفتوح للأعلى ، وأما إذا كانت أ < ٠ فإن المنحنى مفتوح للأسفل.

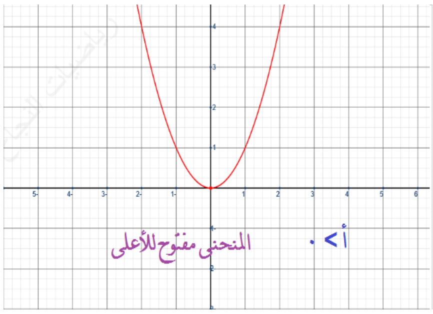
٣) رأس المنحنى عند س = $\frac{-ب}{٢أ}$

٤) المنحنى متماثل حول المستقيم العمودي الذي يمر برأس المنحنى.

٥) مجال الدالة التربيعية هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

٦) ضع س = ٠ لتحصل على نقاط تقاطع المنحنى مع المحور الصادي، بينما ضع ص=٠ لتحصل على نقاط التقاطع مع المحور السيني.





مثال(١) : أوجد نقاط تقاطع المنحنى د(س) = س^{٢} – ٨ س مع محوري السينات والصادات.

الحل: ضع س =٠ لإيجاد نقاط تقاطع المنحنى مع محور الصادات :

د(٠) = (٠)^{٢} – ٨×٠ = ٠ ← نقطة التقاطع هي (٠،٠)

ضع ص =٠ لإيجاد نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات:

٠ = س^{٢} – ٨ س ← ٠ = س(س – ٨)

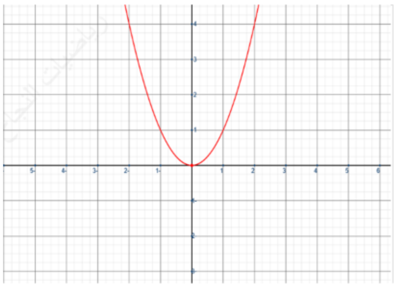
← إما س = ٠ أو س = ٨ ← نقاط التقاطع هي (٠،٠) ، (٨ ، ٠)

مثال(٢) : عين رأس منحنى الدالة د(س) = س^{٢} – ٢ س + ٥

الحل: رأس المنحنى عند س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-(-٢)}{٢×١}$ = ١

د(١) = (١)^{٢} – ٢×١ +٥ = ١ –٢ +٥ = ٤

رأس المنحنى عند النقطة (١ ، ٤)



مثال(٣): الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د(س) = س^{٢}

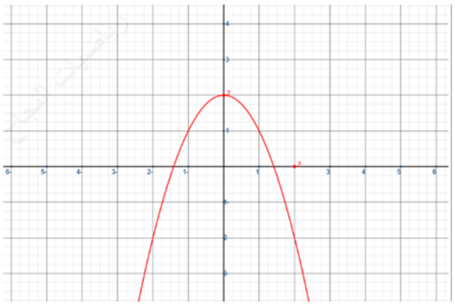
رأس المنحنى هو (٠ ، ٠)

المنحنى متماثل حول محور الصادات

مجال الدالة هو الأعداد الحقيقية ح أو يمكن التعبير عنه بـ – ∞ > س > ∞

مدى الدالة هو الأعداد الحقيقية الموجبة ص ≥ ٠

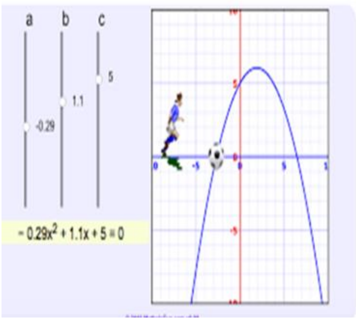
<u>تدريب(١):</u> ارسم منحنى الدالة التربيعية د(س) = − س^{٢} + ٥ وحدد رأسها ومحور تماثلها ومجالها ومداها.



<u>تدريب(٢):</u> الشكل المجاور يمثل منحنى لدالة تربيعية عين رأسها ونقاط تقاطعها مع المحور السيني ومحور تماثلها ومجالها ومداها.

تطبيقات حياتية

مثال(١): قذف لاعب كرة قدم فأخذت مسارا يعبر عنه بالدالة ف = −٢ ن^{٢} + ٢ ن + ٢٨ ، حيث ف المسافة التي تقطعها الكرة بالمتر ، ن الزمن بالثانية. جد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.



الحل: بما أن معامل ن^{٢} سالب (أ < ٠)

إذن فتحة المنحنى للأسفل ⟵ رأس المنحنى يمثل أقصى نقطة تصل لها الكرة

أقصى ارتفاع للكرة = ف ($\frac{-ب}{٢أ}$) = ف ($\frac{-٢}{٢\times-٢}$) = ف ($\frac{١}{٢}$)

= −٢ × ($\frac{١}{٢}$)^{٢} + ٢× $\frac{١}{٢}$ +٢٨ = ٢٨,٥ متر

مثال (٢): عددان حاصل جمعهما ٧٨ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن . جد هذين العددين.

الحل: نفرض العددان س ، ص

س + ص = ٧٨ ← ص = ٧٨ – س

حاصل الضرب ح(س) = س × ص = س × (٧٨ – س) = ٧٨ س – س^{٢}

لاحظ أ < ٠ ← الدالة لها قيمة عظمى عند رأس المنحنى

س = (- ب) / (٢أ) = (- ٧٨) / (٢× -١) = ٣٩

ص = ٧٨ – س = ٧٨ – ٣٩ = ٣٩

العددان هما ٣٩ ، ٣٩

مثال (٣): إذا كانت الدالة ص = ٢٠٠ – ٥س تمثل دالة سعر البيع لأحد منتجات المصانع بالريال العماني ، س تمثل عدد الوحدات من المنتج (في اليوم الواحد). جد أعلى مستوى من الانتاج يحصل عليه المصنع وحدد قيمة الإيراد الكلي له (علما بأن الإيراد الكلي = الكمية × سعر بيع الوحدة).

الحل : الإيراد الكلي = س × ص = س × (٢٠٠ – ٥س) = ٢٠٠ س – ٥ س^{٢}

بما أن أ = –٥ < ٠ ← منحنى الدالة مفتوح للأسفل ، وبالتالي يمثل رأس المنحنى أقصى قيمة .

س = (- ب) / (٢أ) = (-٢٠٠) / (٢×-٥) = ٢٠ ← أعلى مستوى للإنتاج ٢٠ وحدة

مجموع الإيرادات = ٢٠ × (٢٠٠ – ٥×٢٠) = ٢٠٠٠ ريال عماني.

حل المتباينات من الدرجة الثانية

لحل المتباينة من الدرجة الثانية:

١) حول المتباينة إلى دالة صفرية وجد أصفار الدالة.

٢) ارسم خط الأعداد وخذ قيمة من كل فترة وعوض بها في المتباينة (إن حققت المتباينة ففترتها الواقعة فيها تعتبر حلا للمتباينة).

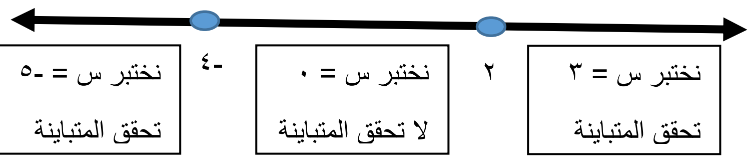
مثال(٤): حل المتباينة س^٢ + ٢ س − ٨ ≥ ٠

الحل: نحول المتباينة إلى دالة صفرية ونجد أصفار الدالة:

س^٢ + ٢ س − ٨ = ٠ ← (س − ٢) (س + ٤) =٠

← س = ٢ أو س = −٤

نرسم خط الأعداد :



مجموعة الحل هي]−∞ ، −٤] ∪ [٢ ، ∞ [

تذكر : لمعرفة أصفار الدالة التربيعية نستخدم القانون العام

س = (- ب ± √(ب^٢ - ٤ أ جـ)) / ٢ أ ، أ ≠ ٠

كما يمكن استخدام تحليل الحدوديات لإيجاد أصفار الدالة

تمارين على الوحدة الثانية

١) جد رأس المنحنيات الآتية :

د(س) = −٣ س^{٢} + ٦ س + ٣   هـ(س) = ٤ س^{٢} − ٤ س +١

ص = ٢ س^{٢} − ١٢ س + ٢٦   د(ن) = −٧ ن^{٢} −٢ ن +٩

د(س) = ١ − ٥ س − س^{٢} ص = س^{٢} − ٧س

٢) جد نقاط تقاطع المنحنى مع كل من المحورين السيني والصادي فيما يلي :

د(س) = ٣ س^{٢} +٢ س − ٥   هـ(س) = −٤ س^{٢} − ١٥ س +٣

ص = ٢ س^{٢} + ٨ س   د(ن) = − ن^{٢} +٦ ن − ٥

د(س) = ٥ (س − ١)^{٢} − ٢٠   ص = (س + ٤)^{٢} − ٣

٣) حدد فيما للمنحنى قيمة عظمى أو قيمة صغرى وجدها :

د(س) = −٢ س^{٢} + ٢٤ س − ٦٤   هـ(س) = س^{٢} + ٨ س +٥

ص = − س^{٢} + ٦ س −١٦   د(ن) = ٤ ن^{٢} +١٦ ن

د(س) = س^{٢} − ٨   ص = ٢٥ س^{٢} +١٠ س + ١

٤) جد المجال والمدى للدوال التربيعية التالية:

د(س) = س^{٢} + ٦ س +٧   هـ(س) = −٣ س^{٢} + ٦ س +٥

ص = − ٣س^{٢} + ٦ س −٢   د(ن) = − ن^{٢} − ٤ ن +١١

٥) عددان حاصل جمعهما ٢٤ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن . جد هذين العددين.

٦) قذف لاعب كرة قدم فأخذت مسارا يعبر عنه بالدالة ف = −١٦ ن^{٢} + ١٦ ن + ٤ ، حيث ف المسافة التي تقطعها الكرة بالمتر ، ن الزمن بالدقيقة. جد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة ومقدار الزمن المستغرق لتصل لأعلى نقطة.

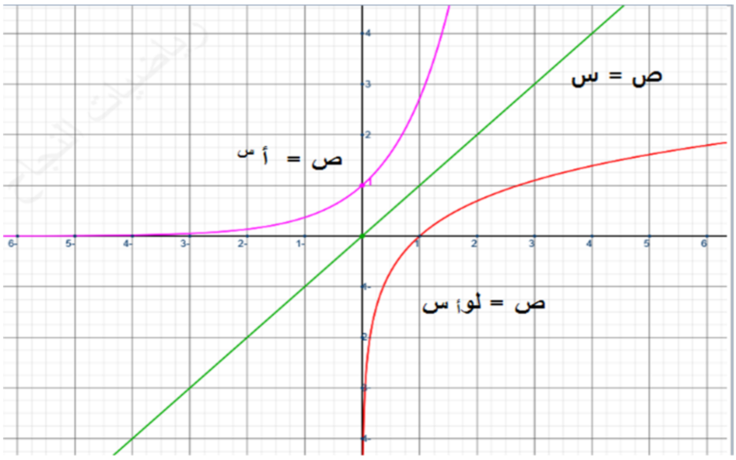
٧) إذا كانت الدالة ص = ١٢٠٠ − ٣س تمثل دالة سعر البيع لأحد منتجات المصانع بالريال العماني ، س تمثل عدد الوحدات من المنتج (في اليوم الواحد). جد أعلى مستوى من الانتاج يحصل عليه المصنع وحدد قيمة الإيراد الكلي له (علما بأن الإيراد الكلي = الكمية × سعر بيع الوحدة).

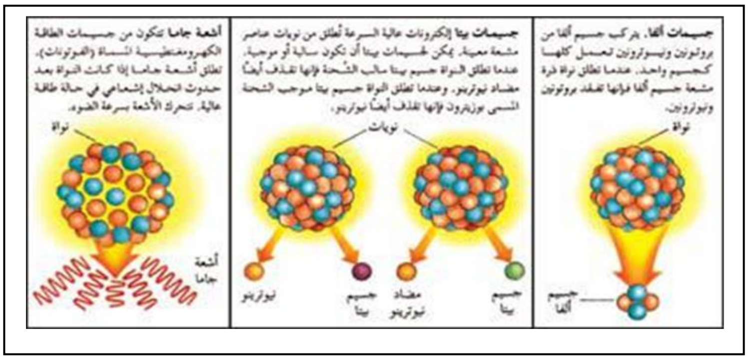
٨) حل المتباينات التالية :

− س^{٢} + س + ٢ $\geq$ ٠   (س − ٥) (س + ٤) $\leq$ ٠

س^{٢} + ٥ س +٦ $<$ ٠   س^{٢} − س − ٦ $>$ ٠

الوحدة الثالثة: الدوال الأسية والدوال اللوغارتمية





الوحدة الثالثة : الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية

الأهداف:

٦) التعرف على الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية
٧) فهم العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية
٨) حل تطبيقات على الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية

تعريف الدالة الأسية (Exponential Function) هي دالة يكون المتغير فيها أسا وتكتب:
ص = أ$^{\text{س}}$ حيث أ > ٠ ، أ $\neq$ ١ .

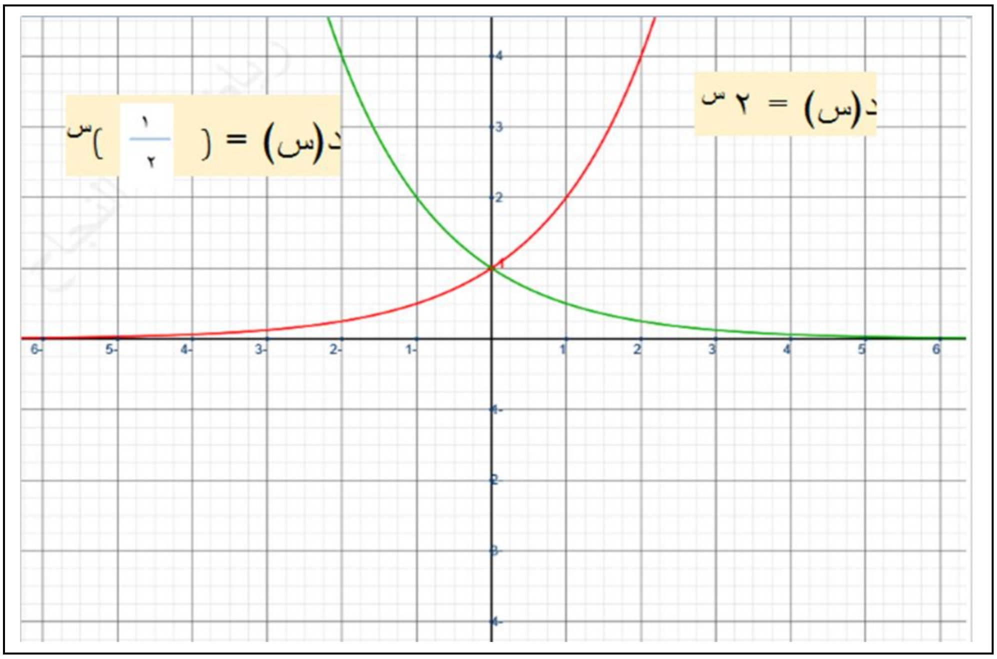
مثال(١) : إذا كانت د(س) = ٤$^{\text{س}}$ ، جد د(٣) ، د(٠.٥) ، د(− ٥).

الحل: د(٣) = ٤^{٣} = ٤ × ٤ × ٤ = ٦٤

د (٠.٥) = ٤$^{٠.٥}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

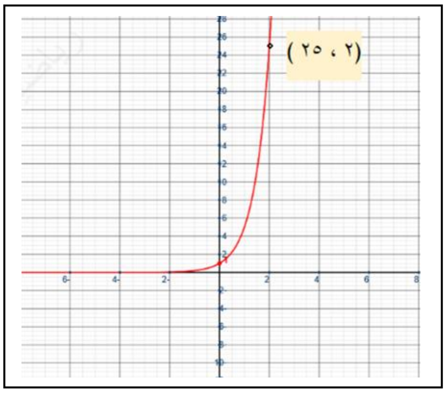
د (− ٥) = ٤$^{-٥}$ = $\frac{١}{٤^{٥}}$ = $\frac{١}{٤×٤×٤×٤×٤}$ = $\frac{١}{١٠٢٤}$

مثال(٢) : ارسم الدالتين د(س) = ٢$^{\text{س}}$ ، د(س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{س}}$



خواص الدالة الأسية :-

١) منحنى الدالة $أ^{س}$ يقطع المحور الصادي عند النقطة (٠ ، ١)
٢) مجال الدالة $أ^{س}$ هو ح
٣) مدى الدالة $أ^{س}$ هو] ٠ ، ∞ [
٤) الدالة $أ^{س}$ متزايدة عندما أ > ١ ، ومتناقصة عندما ٠ < أ < ١



مثال(٣) : جد الدالة الأسية التي تمثل المنحنى المجاور.

الحل :-

$$د(س) = (أ)^{س}$$

$$٢٥ = (أ)^{٢}$$

$$(٥)^{٢} = (أ)^{٢}$$

أ = ٥ إذن الدالة هي $د(س) = ٥^{س}$

الفائدة المركبة Compound interest

في الاقتصاد، **الفائدة المركبة** (Compound interest) تنشأ عندما تجمع الفائدة إلى المبلغ الأصلي، ومن تلك اللحظة يحق للفائدة بالإضافة إلى المبلغ الأصلي principal تجميع فائدة خلال فترة لاحقة. وتسمى إضافة الفائدة إلى المبلغ الأصلي **تركيب** compounding الفائدة مع المبلغ الأصلي.

الفائدة	ع
سنويا	١
نصف سنوي	٢
ربع سنوي	٤
شهريا	١٢
يوميا	٣٦٥

تستخدم المعادلة التالية لحساب الفائدة المركبة:

$$ج(ن) = م\left(١ \quad \frac{ر}{ع}\right)^{ن ع}$$ حيث:

ج : جملة المبلغ مع الفائدة (الفائدة المركبة)

م : المبلغ المستثمر ، ر : نسبة الفائدة

ن : عدد السنوات ع : عدد مرات احتساب الفائدة في السنة

مثال(٤) : استثمر مبلغ ١٠٠٠ ريال عماني بمعدل فائدة سنوية ١٢٪ . جد جملة المبلغ بعد ٣ سنوات إذا كانت الفائدة تحسب: سنويا، نصف سنويا، ربع سنويا، شهريا، يوميا.

المعطيات :

م : المبلغ المستثمر (١٠٠٠ ريال عماني) ، ر : نسبة الفائدة (١٢٪ = ٠.١٢)

ن : عدد السنوات (٣ سنوات) ، ع : عدد مرات احتساب الفائدة في السنة (سنويا، نصف سنوي، ربع سنوي، شهري، يومي)

القانون :

$$\text{جـ(ن)} = \text{م} \left(1 + \frac{\text{ر}}{\text{ع}}\right)^{\text{ن ع}} = 1000\left(1 + \frac{0,12}{\text{ع}}\right)^{3\text{ع}}$$

إذا كانت الفائدة تحسب سنويا: ع =١ فإن جملة المبلغ بعد ٣ سنوات هو:

$$\text{ج}(3) = 1000\left(1 + \frac{0,12}{1}\right)^{3\times1} = 1404,93 \text{ ريال عماني}$$

إذا كانت الفائدة تحسب نصف سنوي: ع =٢ فإن جملة المبلغ بعد ٣ سنوات هو:

$$\text{ج}(3) = 1000\left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{3\times2} = 1418,52 \text{ ريال عماني}$$

إذا كانت الفائدة تحسب ربع سنوي: ع =٤ فإن جملة المبلغ بعد ٣ سنوات هو:

$$\text{ج}(3) = 1000\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{3\times4} = 1425,76 \text{ ريال عماني}$$

إذا كانت الفائدة تحسب شهريا: ع =١٢ فإن جملة المبلغ بعد ٣ سنوات هو:

$$\text{ج}(3) = 1000\left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{3\times12} = 1430,77 \text{ ريال عماني}$$

إذا كانت الفائدة تحسب يوميا: ع =٣٦٥ فإن جملة المبلغ بعد ٣ سنوات هو:

$$\text{ج}(3) = 1000\left(1 + \frac{0,12}{365}\right)^{3\times365} = 1433,24 \text{ ريال عماني}$$

تمارين

تمرين (١): استخدم الحاسبة في إيجاد قيمة الدوال الأسية التالية عند النقاط المحددة:–

١) د(س) = $٤^{س}$ ، د(٠.٥) ، د(٥) ، د($\sqrt{٢}$) ، د(−٢)

٢) د(س) = $٣^{س+١}$ ، د(−١.٥) ، د($\frac{١}{٣}$) ، د(٣)

٣) د(س) = $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{س^{٢}}$ ، د(٢) ، د(٠.٧) ، د($\frac{٢}{٣}$)

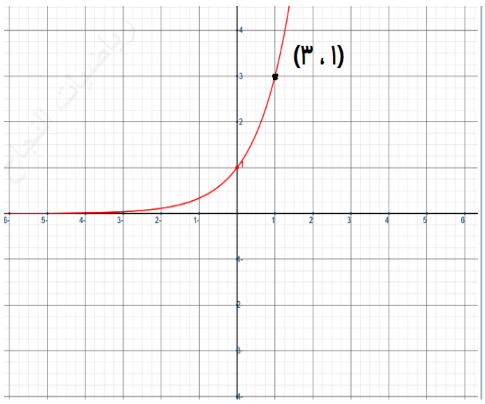
تمرين (٢): ارسم كل زوج من الدوال الأسية التالية في نفس المحور الإحداثي:–

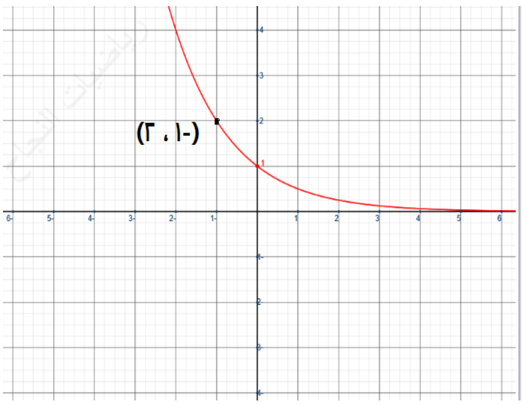
١) د(س) = $٣^{س}$ ، هـ(س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

٢) د(س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$ ، هـ(س) = $\left(\frac{٤}{٣}\right)^{س}$

٣) د(س) = $٥^{س}$ ، هـ(س) = $٧^{س}$

تمرين (٣): أكتب الدالة الأسية التي تمثل كل منحنى من المنحنيات التالية:–



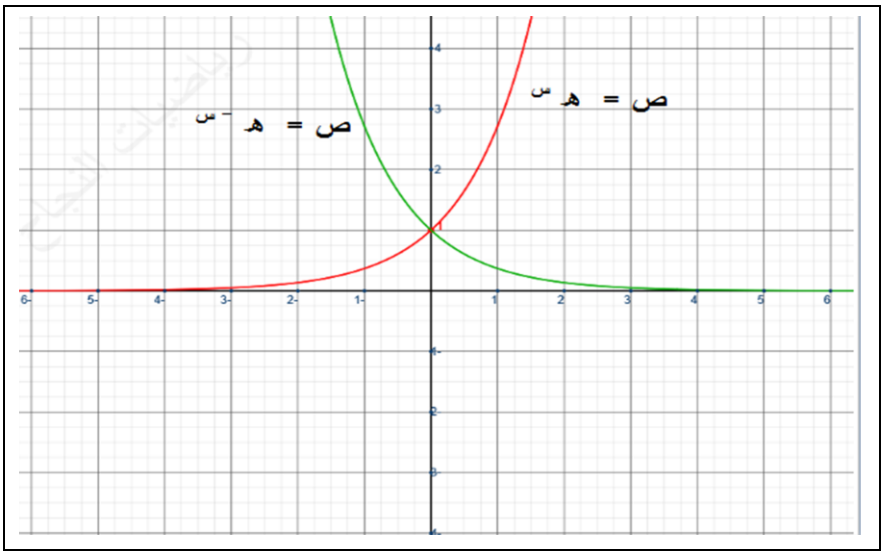


تمرين (٤): استثمر مبلغ ٢٠٠٠ ريال عماني بمعدل فائدة سنوية ٣٪ . جد جملة المبلغ بعد ١٠ سنوات إذا كانت الفائدة تحسب نصف سنويا.

تمرين (٥): استثمر سالم مبلغ ٣٥٠٠ ريال عماني بمعدل فائدة سنوية ٤,٥٪ . جد جملة المبلغ بعد ٥ سنوات إذا كانت الفائدة تحسب شهريا.

الدالة الطبيعية الأسية

تعريف الدالة الطبيعية الأسية (Natural Exponential Function) هي دالة أسية يكون الأساس فيها هـ ، حيث هـ = ٢,٧ وتكتب ص = $هـ^{س}$ حيث هـ > ٠ ، هـ $\neq$ ١ .



تدريب : إذا كانت د(س) = $هـ^{س}$ ، جد د(٣) ، د(٠.٥) ، د(– ٥).

تمرين (١): استخدم الحاسبة في إيجاد قيمة الدالة الأسية الطبيعية التالية عند النقاط المحددة:–

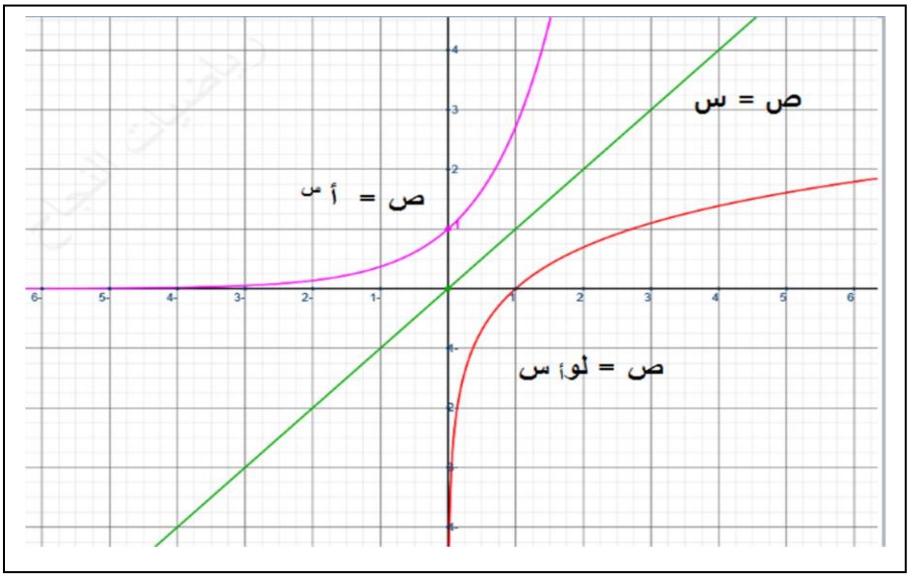
د(س) = ٢$هـ^{-٣س}$ د(١) ، د(٥) ، د($\sqrt{٢}$) ، د($\frac{١}{٣}$)

الدالة اللوغاريتمية

الدالة الطبيعية اللوغاريتمية (Logarithmic Function) تعتبر معكوس الدالة الأسية ويمكن توضيح العلاقة بينهما ص = أ ^{س} ⟺ س = لو$_{أ}$ ص حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١ .

مثال (١) : الجدول التالي يوضح العلاقة بين الصورة الأسية والصورة اللوغاريتمية :-

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
ص = أ ^{س}	لو$_{أ}$ ص = س
٢ ^{٥} = ٣٢	لو$_{٢}$ ٣٢ = ٥
(١٠) $^{-٢}$ = ٠.٠١	لو$_{١٠}$ (٠.٠١) = -٢



خصائص الدالة اللوغاريتمية :

١) لو$_{أ}$ ١ = ٠

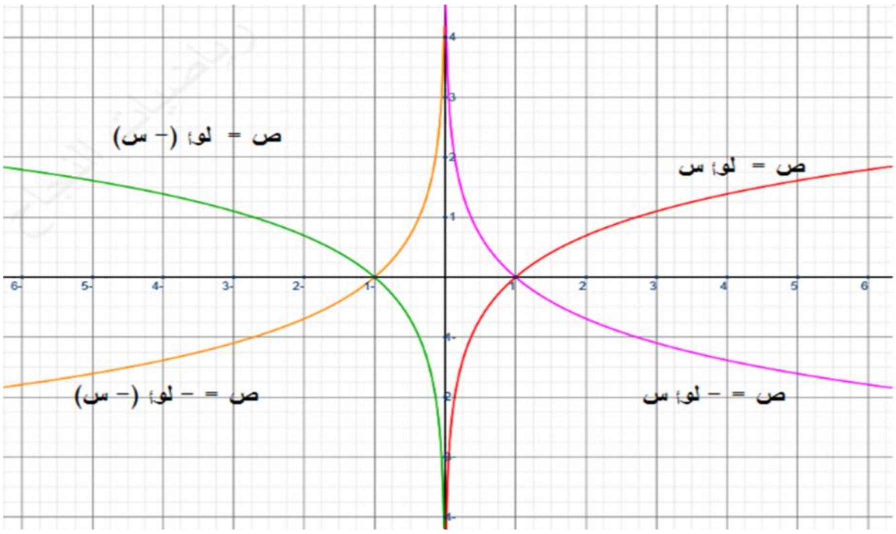
٢) لو$_{أ}$ أ = ١

٣) لو$_{أ}$ (أ)^{س} = س

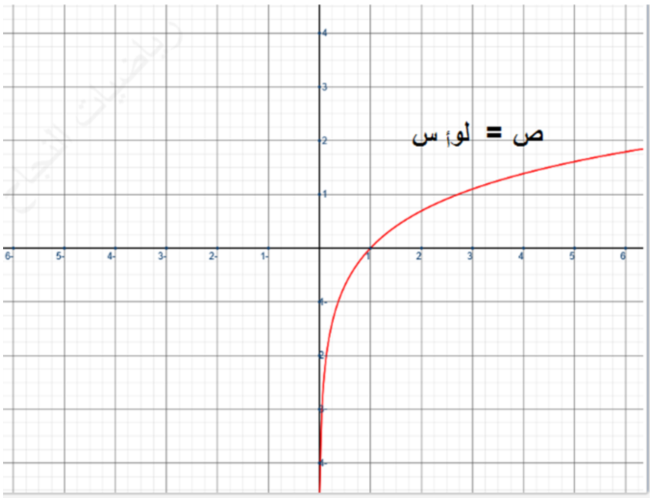
٤) (أ)$^{لو_{أ} س}$ = س

٥) (س)$^{لو_{أ} أ}$ = س

الشكل التالي يوضح منحنيات الدوال اللوغارتيمية التالية :-



تدريب (١) : باستخدام التحويلات الهندسية ارسم منحنى الدالتين التاليتين :



أ) ص = − لو½ س

ب) ص = لو½ (− س)

اللوغاريتم العشري	اللوغاريتم الطبيعي
أساسه ١٠ (لا يكتب الأساس غالبا) $لو_{١٠}$ س = لو س	أساس العدد الطبيعي هـ $لو_{هـ}$ س = لط س
خصائصه :	
لو ١ = ٠	لط ١ = ٠
لو ١٠ = ١	لط هـ = ١
لو $١٠^{س}$ = س	لط $هـ^{س}$ = س
$١٠^{(لو\ س)}$ = س	$هـ^{(لط\ س)}$ = س

مثال (٢) : جد قيمة كل مما يلي

لو$_٤$ ٦٤ ، لو $\sqrt{١٠}$ ، لو$_٣$ $\left(\frac{١}{٢٧}\right)$ ، لو$_٣$ ١ ، لط هـ ، ١٠$^{(لو ٥)}$ هـ$^{لط \pi}$

الحل : لو$_٤$ ٦٤ = لو$_٤$ (٤)^٣ = ٣ × لو$_٤$ ٤ = ٣×١ = ٣

لو $\sqrt{١٠}$ = لو (١٠)$^{١/٢}$ = $\frac{١}{٢}$ × لو ١٠ = $\frac{١}{٢}$ × ١ = $\frac{١}{٢}$

لو$_٣$ $\left(\frac{١}{٢٧}\right)$ = لو$_٣$ $\left(\frac{١}{٣}\right)^٣$ = ٣ × لو$_٣$ $\left(\frac{١}{٣}\right)$ = ٣ × لو$_٣$ (٣)$^{-١}$

= ٣×−١ = −٣

لو$_٣$ ١ = صفر   باستخدام لو$_أ$ ١ = ٠

لط هـ = ١   باستخدام لط هـ = ١

هـ^{لط} π = π باستخدام هـ$^{(لط س)}$ = س

١٠$^{(لو ٥)}$ = ٥   باستخدام ١٠$^{(لو س)}$ = س

مثال (٣) : باستخدام التعريف الذي يوضح العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية في إيجاد قيمة س في المعادلة اللوغاريتمية لو$_٥$ س = ٤ .

الحل :- التعريف هو ص = لو$_أ$ س ⟺ س = أ^{ص}

لو$_٥$ س = ٤ ⟺ س = (٥)^٤ ← س = ٦٢٥

تدريب (١) : حل المعادلات اللوغاريتمية التالية :

١) لو$_٢$ ١٦ = س   ٢) لو$_س$ ٦ = $\frac{١}{٢}$

تمارين

تمرين (١): عبر عن الصيغ اللوغاريتمية التالية بالصيغة الأسية:

١) لو$_{٥}$ ٢٥ = ٢
٢) لو$_{ه}$ ١ = ٠
٣) لو$_{٢}$ ($\frac{١}{٨}$) = −٣
٤) لو$_{٨}$ ٤ = $\frac{٢}{٣}$
٥) لط (س +١) = ٢
٦) لط ص =٥

تمرين (٢): عبر عن الصيغ الأسية التالية بالصيغة اللوغاريتمية:

١) (٨١)$^{٠.٥}$ = ٩
٢) (١٠)$^{-٤}$ = ٠,٠٠٠١
٣) ٢$^{-٣}$ = $\frac{١}{٨}$
٤) هـ$^{٠.٥ س}$ = ص
٥) هـ^{س} = ٢
٦) هـ^{٣} = ص

تمرين (٣): جد قيمة ما يلي:

١) لو$_{٣}$ ٩
٢) لو$_{٥}$ (٠,٢)
٣) لو$_{٥}$ ١٢٥
٤) لط ($\frac{١}{هـ}$)
٥) لط (هـ)^{٤}
٦) ٢$^{(لو_{٢} ٣٢)}$

تمرين (٤): باستخدام التعريف جد قيم س فيما يلي:

١) لو$_{٢}$ س = ٥
٢) لو$_{٣}$ (٢٤٣) = س
٣) لو$_{٤}$ س = ٢
٤) لو ٠,١ = س
٥) لو$_{س}$ ١٠٠٠ = ٣
لو$_{س}$ ١٦ = ٤

تمرين (٥): باستخدام الآلة الحاسبة جد قيمة ما يلي:

١) لو ٥٠
٢) لط ٢٥,٣

قوانين اللوغاريتمات

توجد عدة قوانين للوغارتيمات تساهم في حل كثير من المسائل اللوغارتيمية منها:−

القانون الأول : $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{ب}}\,\text{ص} = \text{لو}_{\text{ب}}\,(\text{س}\times\text{ص})$

أي حاصل جمع لوغارتيمين لهما نفس الأساس يساوي لوغارتيم حاصل ضربهما

مثال : $\text{لو}\,٥ + \text{لو}\,٤ = \text{لو}\,(٥\times٤) = \text{لو}\,٢٠$

القانون الثاني : $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س} - \text{لو}_{\text{ب}}\,\text{ص} = \text{لو}_{\text{ب}}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$

أي حاصل طرح لوغارتيمين لهما نفس الأساس يساوي لوغارتيم ناتج قسمتهما

مثال : $\text{لط}\,١٢ - \text{لط}\,٢ = \text{لط}\,٦$

القانون الثالث : $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س}^{\text{م}} = \text{م}\ \text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س}$

مثال : $\text{لو}_{٤}\,٥^{٣} = ٣\times\text{لو}_{٤}\,٥$

قانون تغيير الأساس : $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{م}}\,\text{س}}{\text{لو}_{\text{م}}\,\text{ب}}$

مثال : $\text{لو}_{٥}\,١٢٥ = \frac{\text{لو}\,١٢٥}{\text{لو}\,٥} = \frac{\text{لو}\,(٥)^{٣}}{\text{لو}\,٥} = \frac{٣\times\text{لو}\,٥}{\text{لو}\,٥} = \frac{٣\times١}{١} = ٣$

مثال آخر : $\text{لو}_{٤٩}\,٧ = \frac{\text{لو}_{٧}\,٧}{\text{لو}_{٧}\,٤٩} = \frac{١}{\text{لو}_{٧}\,(٧)^{٢}} = \frac{١}{٢\times\text{لو}_{٧}\,٧} = \frac{١}{٢\times١} = \frac{١}{٢}$

=

تدريب (١): باستخدام قوانين اللوغاريتمات جد قيمة ما يلي:

١) لو$_٤$ ١٩٢ – لو$_٤$ ٣

٢) لو$_{١٢}$ ٩ + لو$_{١٢}$ ١٦

٣) لو$_٢$ $(٨)^{٣٣}$

٤) ٢ لو ٥ + لو ٨ – لو ٢

تدريب (٢): حل المتباينات اللوغاريتمية التالية:

١) لو$_٣$ (٥ س +٢) > لو$_٣$ (٦س)

٢) لو$_٣$ (لو$_٢$ (٢س +٢)) > لو$_٣$ (لو$_٢$ (س +٦))

حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية

أحيانا نلجأ إلى استخدام قوانين اللوغاريتمات لحل بعض المعادلات الأسية باعتبارها الطريقة الأيسر للحل.

مثال (١) : حل المعادلة $١٠^{س} = ٤$.

نأخذ اللوغاريتم للطرفين: لو $١٠^{س}$ = لو ٤

ومنها س لو ١٠ = لو ٤ ← $\frac{\text{لو ٤}}{\text{لو ١٠}}$ = ٠.٦٠٢١ (باستخدام الالة الحاسبة)

مثال (٢) : حل المعادلة $هـ^{-س} = ٧$.

نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين: لط $هـ^{-س}$ = لط ٧

ومنها – س لط هـ = لط ٧ ← س = – $\frac{\text{لط ٧}}{\text{لط هـ}}$ = –١,٩٤٦ (باستخدام الالة الحاسبة)

مثال (٣) : حل المعادلة ٤ + ٣ ^٥ س^ = ٨ .

نجعل المتغير في طرف والأعداد في طرف آخر : ٣ ^٥ س^ = ٨ −٤ = ٤

نأخذ اللوغاريتم للطرفين: لو (٣)^٥ س^ = لو ٤ ومنها ٥ س لو٣ = لو٤

س = لو٤ / ٥ لو٣ = ٠,٢٥٣٨ (باستخدام الالة الحاسبة)

مثال (٤) : حل المعادلة هـ^٣ − ٥ س^ = ١٦ .

نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين: لط هـ^٣ − ٥ س^ = لط ١٦

ومنها ٣ − ٥ س = ٢,٧٧٢٦ ← س = ٠,٠٤٥٤٨

مثال (٥) : حل المعادلة لو٢ ٣ + لو٢ س = لو٢ ٥ + لو٢ (س −٢) .

باستخدام قوانين اللوغاريتمات : لو٢ ٣ س = لو٢ ٥(س −٢)

ومنها ٣ س = ٥ (س −٢) ← ٣ س = ٥ س − ١٠ ← س = ٥

تدريب (١): حل المعادلات الأسية التالية:

١) ٢ ^(٣ س+١)^ = ٣ ^(س −٢)^ ٢) هـ ^١٢ س^ = ١٦

٣) ٥ ^س^ = ٤ ^(س +١)^ ٤) هـ ^(١ −٦ س)^ = ٢

تدريب (٢): حل المعادلات اللوغاريتمية التالية:

١) لو ٤ + لو٥ = لو١٠ + لو س ٢) لو٣٠ − لو٥ ^٢^ = لو س

تطبيقات حياتية

معدل النمو النسبي (Relative Growth Rate) هو معدل النمو النسبي للحجم. ويسمى أيضا معدل النمو الأسي، أو معدل النمو المستمر. ويعطى بالمعادلة

ع(ن) = ع٠ هـ^(ر ن) حيث: ع٠ : الحجم الابتدائي للمجتمع

ر : معدل النمو النسبي ، ن : الزمن

مثال (١) : تتكاثر بكتيريا بمعدل ٥٠٪ لكل ساعة . فإذا كان حجم البكتيريا الابتدائي ٧٠٠ :

أ) اكتب معادلة معدل النمو النسبي للبكتيريا

ب) كم العدد المتوقع للبكتيريا بعد ١٢ ساعة ؟

ت) ما الزمن التي تحتاجه البكتيريا ليصل عددها ١٠٠٠٠٠٠ ؟

الحل : المعطيات: ع = ٧٠٠ ، ر = ٥٠٪ = ٠,٥

الدالة هي: د(ن) = ٧٠٠ هـ^(٠,٥ ن)

العدد المتوقع بعد ١٢ ساعة هو: د(١٢) = ٧٠٠ × هـ^(٠,٥ × ١٢) = ٢٨٢٤٠٠,١٥

لإيجاد الزمن التي تحتاجه البكتيريا ليصل عددها ١٠٠٠٠٠٠ نعوض في الدالة:

١٠٠٠٠٠٠ = ٧٠٠ هـ^(٠,٥ ن) (بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين)

ن = ٩,٩٦٢ ساعة

تدريب : تتكاثر عينة من الأسماك بمعدل ١,٨٪ لكل سنة . فإذا كان حجم الأسماك في عام ٢٠١٠ يساوي ١٠ مليون :

أ) اكتب معادلة معدل النمو النسبي للأسماك بعد ن من السنوات من بعد عام ٢٠١٠.

ب) كم العدد المتوقع للأسماك عام ٢٠٢٠ ؟

الانحلال الإشعاعي (Radio Active Decay) (المعروف أيضا باسم الانحلال النووي أو النشاط الإشعاعي) هو العملية التي تفقد فيها النواة الذرية غير المستقرة الطاقة (من حيث الكتلة في إطارها الباقي) عن طريق إطلاق الإشعاع ، مثل جسيم ألفا أو جسيمات بيتا مع النيوترونات أو نيوترونات فقط في حالة التقاط الإلكترون أو أشعة جاما أو الإلكترون في حالة التحويل الداخلي .

وتحسب الكمية المتبقية بالمعادلة

ك(ن) = ك$_{١}$ هـ$^{(-\text{ر ن})}$ حيث: ك$_{١}$: كتلة المادة الابتدائية

ر = $\frac{\text{لط ٢}}{\text{م}}$ ، م مدة نصف عمر المادة ، ن : الزمن

مثال (٢) : إذا كان البلونيوم–٢١٠ يتميز بنصف عمر قدره ١٤٠ يوم. فإذا كانت الكتلة الابتدائية لعينة منه ٥٠٠ ملليجرام :

أ) اكتب الدالة التي توضح الكمية المتقية من المادة بعد مرور ن من الأيام .

ب) كم الكمية المتبقية بعد مرور يومان ؟

ت) كم الوقت التي تحتاجه المادة لانحلالها الإشعاعي حتى تصل كتلتها ١٠٠ ملليجرام؟

الحل : ر = $\frac{\text{لط ٢}}{\text{م}}$ = $\frac{\text{لط ٢}}{١٤٠}$ = ٠,٠٠٤٩

الدالة هي : ك(ن) = ٥٠٠ هـ$^{(-\ ٠,٠٠٤٩\ \text{ن})}$

الكمية المتبقية بعد يومان: ك(ن) = ٥٠٠ × هـ$^{(-\ ٠,٠٠٤٩\ \times\ ٢)}$ = ٤٩٥,١٦ ملجم.

نحسب الوقت التي تحتاجه المادة لانحلالها الإشعاعي حتى تصل كتلتها ١٠٠ ملليجرام عن طريق الدالة:

١٠٠ = ٥٠٠ هـ$^{(-\ ٠,٠٠٤٩\ \text{ن})}$ (بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين)

ن = ٣٢٨,٤٥٧ يوم .

تدريب : إذا كان الراديوم – ٢٢٦ يتميز بنصف عمر قدره ١٦٠٠ سنة. فإذا كانت الكتلة الابتدائية لعينة منه ١٩ ملليجرام :

أ) اكتب الدالة التي توضح الكمية المتقية من المادة بعد مرور ن من السنوات .

ب) كم الكمية المتبقية بعد مرور ٣٠٠٠ سنة ؟

ت) كم الوقت التي تحتاجه المادة لانحلالها الإشعاعي حتى تصل كتلتها ١٥ ملليجرام؟

قانون نيوتن للتبريد (Newton's Law of Cooling) ينص قانون نيوتن للتبريد على أن معدل تغير درجة حرارة جسم ما يتناسب مع الفرق بين درجة الحرارة الخاصة به ودرجة الحرارة المحيطة . وتحسب درجة حرارة الجسم بالمعادلة

$د(ن) = د_س + د_١ هـ^{(-ك ن)}$ حيث: $د_س$: درجة حرارة الوسط المحيط

، $د_١ = د. - د_س$ حيث $د.$: حرارة الجسم الابتدائية

ك = ثابت يعتمد على نوع الجسم ، ن : الزمن

مثال (٣) : كأس من القهوة حرارته ٣٠٠ درجة فهرنهايتية ، وضع وسط خارجي درجة حرارته ٨٠ درجة فهرنهايتية. بعد ٢٠ دقيقة أصبحت درجة حرارة كأس القهوة ١٧٠ درجة فهرنهايتية :

أ) اكتب الدالة التي توضح درجة حرارة كأس القهوة بعد مرور ن من الأيام .

ب) جد درجة حرارة كأس القهوة بعد ٢٥ دقيقة .

ج) متى تصل درجة حرارة كأس القهوة إلى ١٢٠ درجة فهرنهايتية ؟

الحل : المعطيات : $د_س = ٨٠$ ، $د_١ = د. - د_س = ٣٠٠ - ٨٠ = ٢٢٠$

أ) الدالة هي : $د(ن) = ٨٠ + ٢٢٠ هـ^{(-ك ن)}$

لإيجاد قيمة الثابت ك : من المعطيات بعد ٢٠ دقيقة تصبح حرارة القهوة ١٧٠ درجة فهرينهاتية

إذن $١٧٠ = ٨٠ + ٢٢٠ هـ^{(-ك × ٢٠)}$ ومنها $٢٢٠ هـ^{(-ك × ٢٠)} = ١٧٠ - ٨٠ = ٩٠$

$لط (٢٢٠ هـ^{(-ك × ٢٠)}) = لط ٩٠$

$-٢٠ ك = -٠,٩١٦٢$ ومنها $ك = ٠,٠٤$

ب) درجة حرارة كأس القهوة بعد ٢٥ دقيقة: د(٢٥) = ٨٠ + ٢٢٠ هـ $^{(-٠,٠٤ \times ٢٥)}$

= ١٦٠,٩ درجة فهرينهايتية

ج) المعطيات د(ن) = ١٢٠

١٢٠ = ٨٠ + ٢٢٠ هـ $^{(-٠,٠٤ \times ن)}$

هـ $^{(-٠,٠٤ \times ن)}$ = ٤٠ (بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين)

−٠,٠٤ ن = − ١,٧١٤٨ ومنها ن = ٤٢,٨٦

<u>تدريب :</u> إناء من الحساء الحار في إحدى حفلات العشاء بدأ يبرد وفق قانون نيوتن للتبريد وفق المعادلة

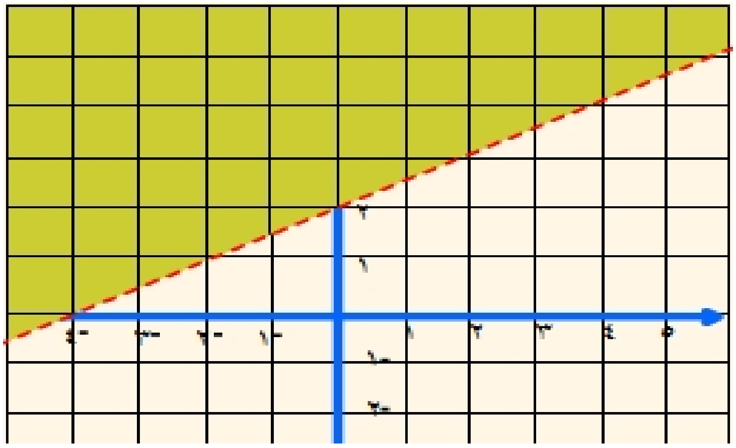
د(ن) = ٨٠ + ٢٢٠ هـ $^{(-٠.٠٤ ن)}$ حيث الزمن (ن) مقاسا بالدقائق ودرجة الحرارة مقاسة بالدرجة الفهرنهايتية .

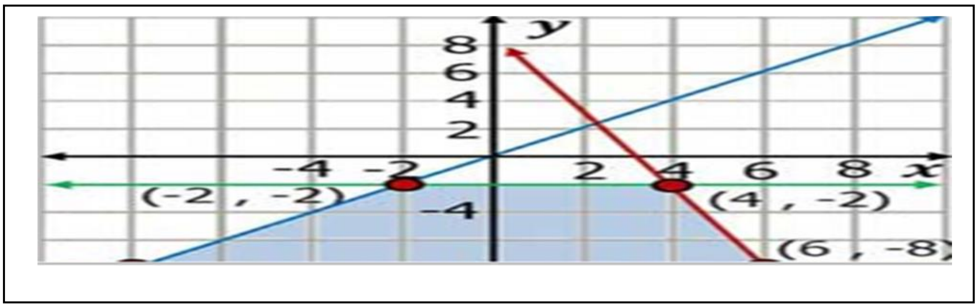
أ) احسب الحرارة الابتدائية لإناء الحساء .

ب) جد درجة حرارة الحساء بعد ١٥ دقيقة .

ت) متى تصل درجة حرارة الحساء إلى ٩٠ درجة فهرنهايتية ؟

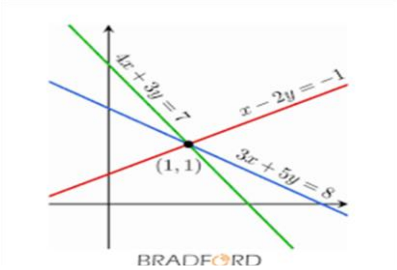
الوحدة الرابعة: نظام المعادلات الخطية والمتباينات في متغيرين





الوحدة الرابعة : نظام المعادلات الخطية والمتباينات في متغيرين

الأهداف:



٩) حل المعادلات الخطية في متغيرين جبريا وبيانيا.
١٠) حل المتباينات في متغيرين .
١١) تحديد مناطق الحل لثلاث متباينات بيانيا.

نظام المعادلات الخطية في متغيرين يمكن كتابته كالآتي:-

أ س + ب ص = جـ

د س + هـ ص = و

حيث أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ∋ ح ، معاملات المتغيرين س ، ص يمكن أن تساوي الصفر بشرط يبقى متغير واحد على الأقل بكل معادلة .

نظام المعادلات الخطية في متغيرين:-

١) يمكن أن يكون ليس له حل، وإما أن يكون له حل واحد وإما أن يكون له عدد لا نهائي من الحلول.
٢) يمكن إيجاد الحل جبريا (عن طريق الحذف أو التعويض)، وإما بيانيا (عن طريق تمثيل المعادلات الخطية بيانيا.

مثال(١) : حل المعادلتين التاليتين آنيا :-

٣ س − ص = ٧ (١)

٢ س + ٣ ص = ١ (٢)

الحل:– **<u>باستخدام التعويض</u>** (نعوض س بدلالة ص أو العكس)

من المعادلة الأولى يمكن كتابة ص = ٣ س – ٧ ، ونعوض بها في المعادلة الثانية .

إذن المعادلة (٢) تصبح : ٢ س + ٣ (٣ س –٧) = ١

٢ س + ٩ س – ٢١ = ١

١١ س = ٢٢ ومنها س = ٢

بالتعويض عن قيمة س في أي من المعادلتين السابقتين ولتكن المعادلة رقم (١) نجد أن

٣ × ٢ – ص = ٧ ومنها ص = –١

<u>مثال(٢) :</u> حل المعادلتين التاليتين آنيا :–

ص = ٢ س + ٤

ص = ٣ س + ٢

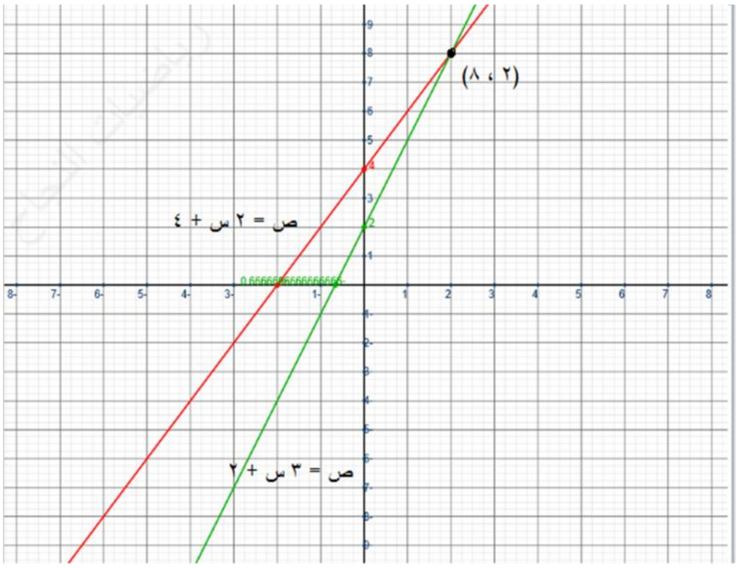
الحل :– نرسم الدالتين بيانيا :

ص = ٢ س + ٤

س	٢	٠	–١
ص	٨	٤	٢

ص = ٣ س + ٢

س	٢	٠	–١
ص	٨	٢	–١



نلاحظ نقطة تقاطع الخطين الممثلين للدالتين في النقطة (٢ ، ٨) ويعتبر مجموعة الحل لهما

أي أن س = ٢

، ص = ٨

<u>تدريب (١) :</u> حل المعادلتين التاليتين جبريا :-

١)
س − ص = ١
٤ س + ٣ ص = ١٨

٢)
٣ س + ص = ١
٥ س + ٢ص = ١

٣)
٢ س + ص = ٧
س + ٢ ص = ٢

٤)
٢ س − ٣ ص = −٢
٤ س + ص = ٢٤

<u>تدريب (٢) :</u> حل المعادلتين التاليتين بيانيا :-

١)
٢س − ص = ٤
٣ س + ص = ٦

٢)
٢ س + ٦ص = ٠
−٣س + ٩ص = ١٨

٣)
س − ص = ٤
٢س + ص = ٢

٤)
س − ص = ٢
٢ س + ٣ص = ٩

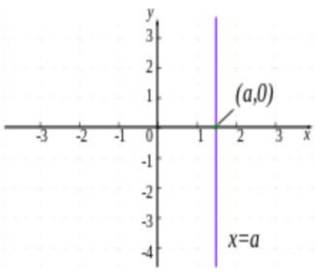
المتباينات الخطية في متغيرين

يمكن لأي متباينة خطية في متغيرين أن تكتب على شكل صورة من الصور التالية:

أ س + ب ص > جـ ، أ س + ب ص < جـ ، أ س + ب ص ≥ جـ ،

أ س + ب ص ≤ جـ حيث أ ، ب ، جـ ∋ ح ، أ ، ب ≠ ٠ في نفس الوقت.

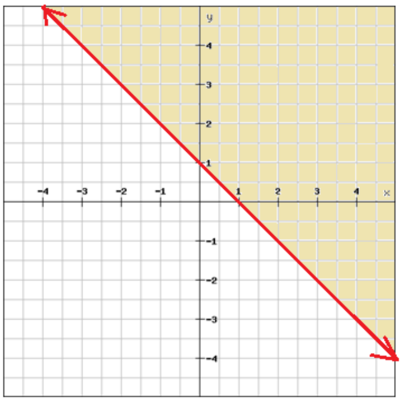
ملاحظة: كل متباينة تقسم المستوى الإحداثي إلى قسمين؛



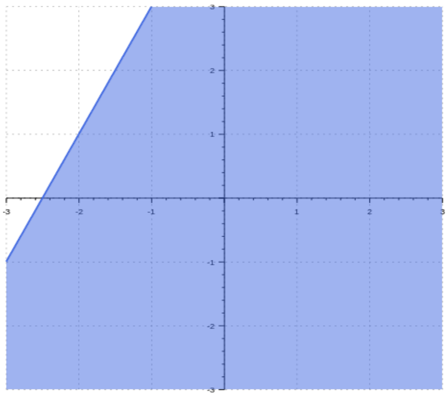
- القسم الأعلى يكون حلا للمتباينة ص > م س + ب
- القسم الأسفل يكون حلا للمتباينة ص < م س + ب
- بالنسبة للمتباينة س > أ فإن يمين المستقيم س = أ يكون حلا للمتباينة ، بينما الجانب الأيسر يكون حلا للمتباينة س < أ .
- عندما توجد إشارة (=) فإن الخط متصل وبدونه يكون الخط متقطع.

مثال (١) : الرسم الآتي يوضح مجموعة الحل للمتباينات التالية :-

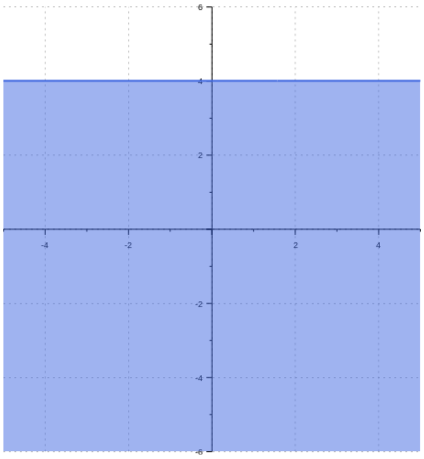
١) ص ≥ − س + ١



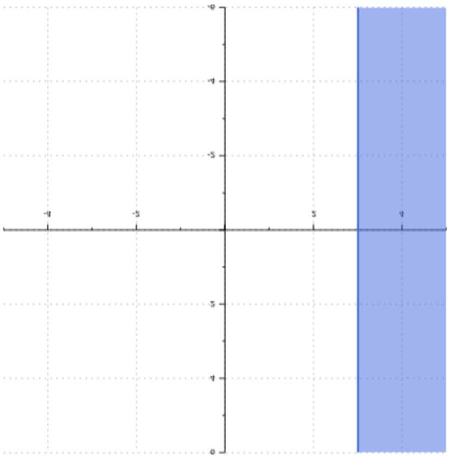
٢) ص < ٢ س + ٥



٣) ص ≤ ٤



٤) س ≥ ٣



نظام المتباينات الخطية في متغيرين:-

١) لإيجاد مجموعة الحل لعدة متباينات خطية نجد أولا مجموعة الحل لكل متباينة بيانيا ونظلل مجموعة الحل لها.

٢) مجموعة التقاطع للمتباينات هي مجموعة الحل لنظام المتباينات الخطية المعطى.

مثال (٢) : جد مجموعة الحل للمتباينات التالية :-

ص ≥ −٢ س + ١٠

ص ≥ س − ٢

الحل :-

أولاً نجد مجموعة حل المتباينة ص ≤ −٢ س + ١٠

عن طريق رسم الدالة ص = −٢ س + ١٠

وتكون المنطقة التي فوق الخط هي مجموعة الحل

ص = − ٢ س + ١٠

س	١	٠	−١
ص	٨	١٠	١٢

ثم نجد مجموعة حل المتباينة ص ≤ س − ٢

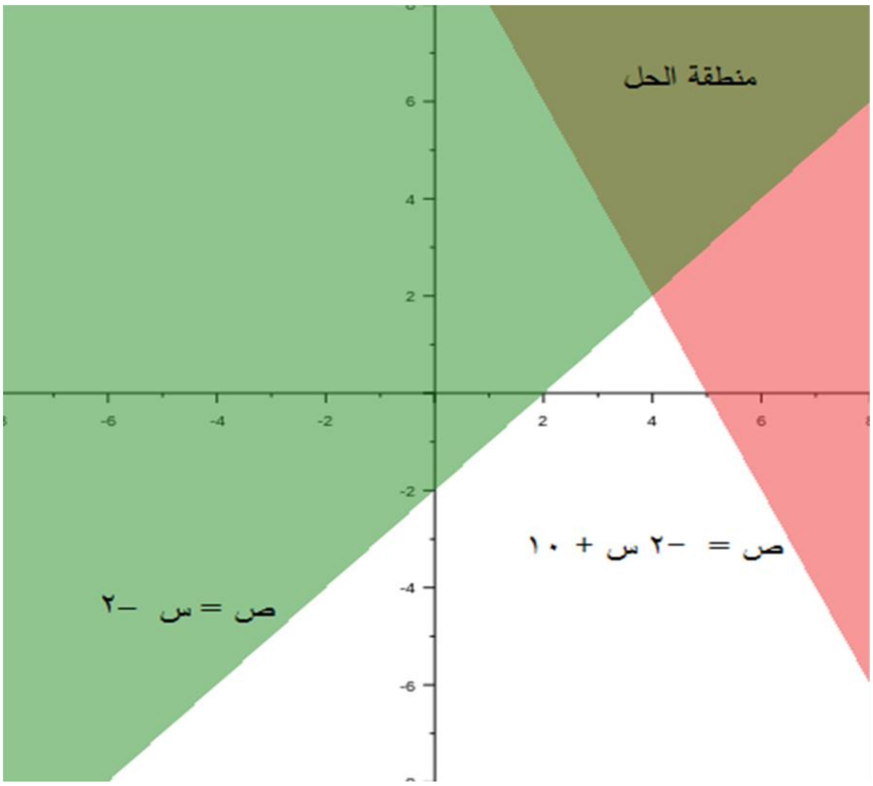
عن طريق رسم الدالة ص = س − ٢

وتكون المنطقة التي فوق الخط هي مجموعة الحل

ص = س − ٢

س	١	٠	−١
ص	−١	−٢	−٣

وبرسم المتباينتين معا في المستوى الإحداثي :



مثال (٣) : جد مجموعة الحل للمتباينات التالية :-

س + ٣ ص ≤ ١٢

س + ص ≤ ٨

س ≥ ٤

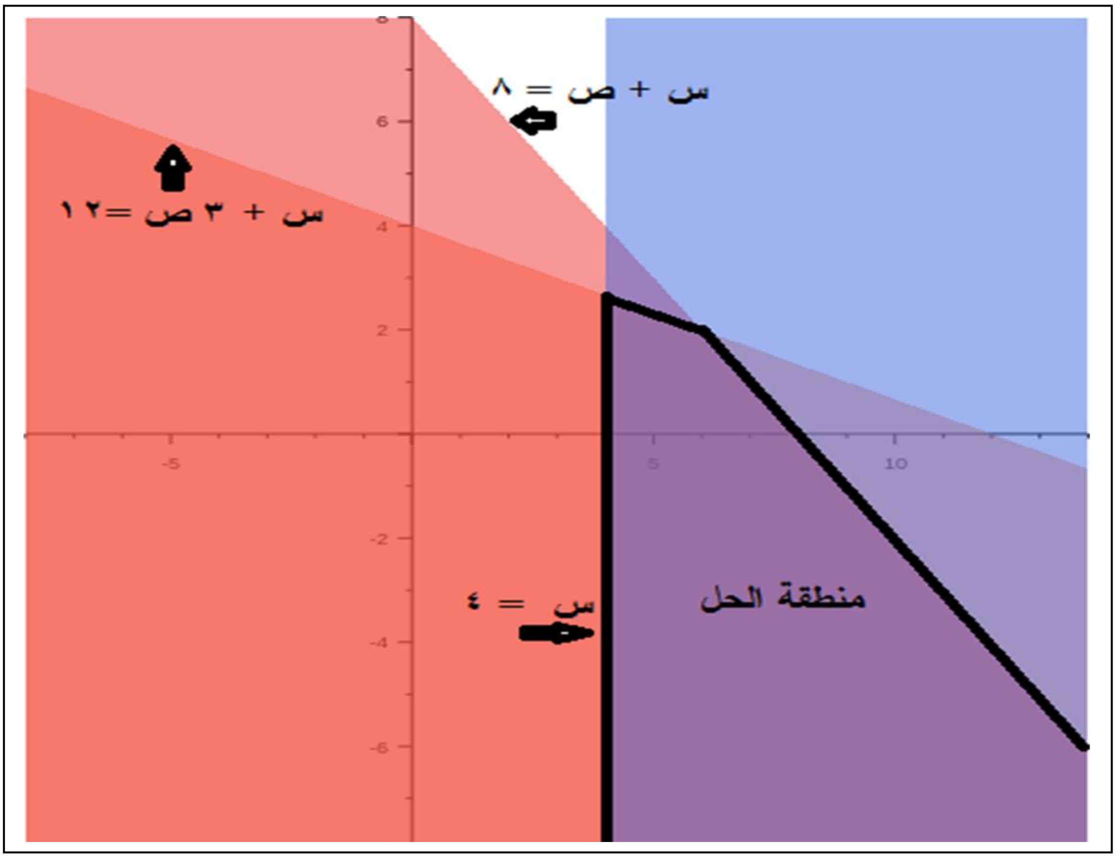
الحل:- نعمل نفس الخطوات السابقة ، مع ملاحظة ما يلي :-

مجموعة حل المتباينة س + ٣ ص ≤ ١٢ هي المنطقة أسفل المستقيم س + ٣ ص =١٢

مجموعة حل المتباينة س + ص ≤ ٨ هي المنطقة أسفل المستقيم س + ص = ٨

مجموعة حل المتباينة س ≥ ٤ هي المنطقة يمين المستقيم س = ٤

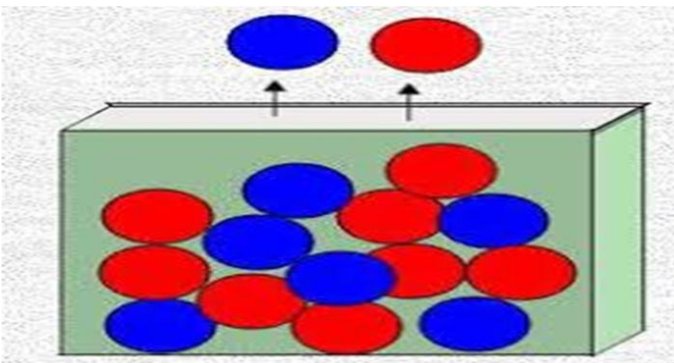
وعليه يمكن تمثيل مجموعة الحل كما هي موضحة في الشكل التالي:



تدريب (١) : حل المتباينات الخطية التالية :−

(١	٣ س + ٤ ص < ٢	(٢	٣ س + ٥ ص ≤ ١٢
(٣	٢ س + ٣ ص < −٦ ٣ س − ص > ٦	(٤	٢ س + ٣ ص ≥ ٦ س ≤ ٠
(٥	س − ص < ٤ س > ٢ ص < −٥٤	(٦	ص > ٢ س + ٤ س ≤ −٢ ص > ١

الوحدة الخامسة: الإحصاء والاحتمالات



الوحدة الخامسة : الإحصاء والاحتمالات

الأهداف:

١) التعرف على المفاهيم الأساسية في الإحصاء الوصفي كالمتوسط والوسيط والمنوال والانحراف المعياري.

٢) تمثيل البيانات في جداول وأشكال بيانية.

٣) التعرف على المفاهيم الأساسية في الاحتمالات.

الإحصاء (Statistics) هو أحد فروع الرياضيات الهامة ذات التطبيقات الواسعة. يهتم علم الإحصاء بجمع وتلخيص وتمثيل وايجاد استنتاجات من مجموعة البيانات المتوفرة.

مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال):-

في كثير من المواقف في حياتنا اليومية نحتاج لوصف مجموعة من البيانات الخام (مجموعة من الأرقام غير المرتبة) برقم معين نستطيع من خلاله التعرف على بعض خواص هذه البيانات الخام. من هذه الأرقام الممثلة لتلك البيانات ما يدعى مقاييس النزعة المركزية، وأكثرها شيوعا منها هو المتوسط الحسابي.

المتوسط الحسابي (The Mean) ويسمى المعدل (The Average) :-

بالنسبة لمجموعة القيم:

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{س_1+س_2+س_3+ \ldots\ldots +س_ن}{ن}$$

بالنسبة لبيانات في جدول تكراري:

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{\sum س_ن \times ت_ن}{\sum ت_ن}$$

الوسيط (The Median): هو القيمة التي تتوسط الأرقام بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا.

فإذا كان عدد القيم فردي فإن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{\text{ن} + 1}{2}$

وأما إذا كان عدد القيم زوجي فإن الوسيط هو متوسط القيمتين اللتان تتوسطان القيم واللتان ترتيبهم $\frac{\text{ن}}{2}$ ، $\frac{\text{ن}}{2} + 1$

المنوال (The Mode) : هو القيمة الأكثر تكرارا ، ويمكن وجود أكثر من منوال في التوزيع الواحد.

مثال (١) جد المتوسط الحسابي لمجموعة القيم ٢٣ ، ٢٥ ، ٧٦ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ .

الحل:

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{13+12+11+76+25+23}{6} = \frac{160}{6} = 26.7$$

مثال (٢) الجدول التكراري التالي يمثل درجات طلبة ما في اختبار الرياضيات (من ٦٠ درجة).
جد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات:

الفئات	١٠ –٢٠	٢٠ – ٣٠	٣٠ – ٤٠	٤٠ – ٥٠	٥٠ – ٦٠
التكرار	١٢	١٤	٨	٦	١٠

الحل: في حالة وجود فئات لا بد من تعيين مركز كل فئة لتمثل درجات تلك الفئة

$$\frac{\text{الحد الأعلى للفئة + الحد الأدنى للفئة}}{2}$$

فمثلا مركز الفئة (١٠ – ٢٠) يساوي $\frac{10 + 20}{2} = \frac{30}{2} = 15$

الفئات	١٠ –٢٠	٢٠ – ٣٠	٣٠ – ٤٠	٤٠ – ٥٠	٥٠ – ٦٠
مركز الفئة	١٥	٢٥	٣٥	٤٥	٥٥
التكرار	١٢	١٤	٨	٦	١٠

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\sum \text{س} \times \text{ت}}{\sum \text{ت}} = \frac{55\times10+45\times6+35\times8+25\times14+15\times12}{10+6+8+14+12} = \frac{1630}{50} = 32.6$$

مثال (٣) جد الوسيط والمنوال لمجموعة القيم ١٢، ١٥، ٦٧، ٥٥، ٢٣، ٤٥، ٤٥، ٣، ١٣، ٤٥

الحل:

لإيجاد الوسيط لا بد من ترتيب القيم (تصاعديا أو تنازليا) :

القيم مرتبة تصاعديا: ٣، ١٢، ١٣، ١٥، ٢٣، ٤٥، ٤٥ ، ٤٥، ٥٥، ٦٧

توجد قيمتان في الوسط وبالتالي الوسيط = متوسط القيمتين = $\frac{٢٣ + ٤٥}{٢}$ = $\frac{٦٨}{٢}$ = ٣٤

المنوال هو المفردة الأكثر شيوعا أو تكرارا، وهنا يساوي ٤٥ (لأنها أكثر تكرارا).

تمارين

١) جد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لمجموعة القيم التالية :

أ) ٣، ٧، ٠، ١، ٩، ٢، ١١،٧

ب) ١٢، ١٥، ٦٧، ٥٥، ٢٣، ٤٥، ٤٥، ٣، ١٣، ٤٥

٢) الجدول التكراري التالي يمثل الأجور الأسبوعية ل ٥٠ عاملا في مصنع معين ما. جد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات:

الأجور الأسبوعية بالريال	١٠٠ – ١٢٠	١٢٠ – ١٤٠	١٤٠– ١٦٠	١٦٠ – ١٨٠	١٨٠ – ٢٠٠
التكرار	١٢	١٤	٨	٦	١٠

مقاييس التشتت (التباين والانحراف المعياري):-

يعرف التشتت هو تباعد أو انتشار قيم مجموعة من المفردات عن بعضها البعض، أو عن قيمة معينة ثابتة (كالوسط الحسابي مثلا)، والهدف من دراسة التشتت هو تكوين فكرة عن مدى تجانس قيم مجموعة من المفردات، ويفيد التشتت في إجراء المقارنة بين قيم مجموعتين أو أكثر من البيانات عن ظاهرة معينة. ويعتبر الانحراف المعياري أكثر مقاييس التشتت انتشارا.

التباين (Variance) والانحراف المعياري (The Standard Deviation) :-

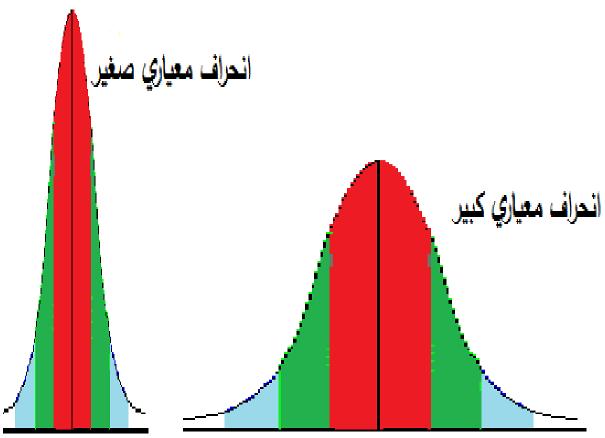
<u>بالنسبة لمجموعة القيم:</u>

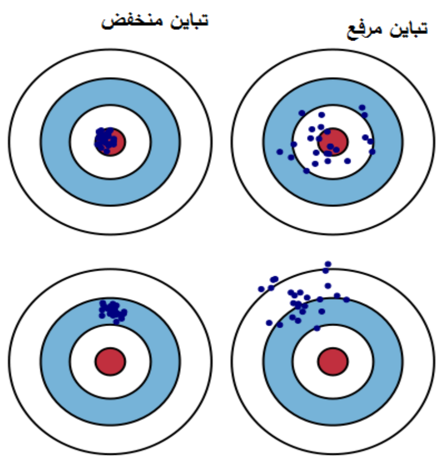
التباين $$\frac{\sum (س_ن - \overline{س})^٢}{ن}$$

الانحراف المعياري (ع) = $$\sqrt{\frac{\sum (س_ن - \overline{س})^٢}{ن}}$$

يعني أولا لا بد من إيجاد المتوسط الحسابي للقيم، ثم نطرح المتوسط الحسابي من كل قيمة وبعدها نجد مجموع هذه الانحرافات ونربعها ونقسمها على عدد القيم لنحصل على التباين. وبإيجاد الجذر التربيعي للتباين نحصل على الانحراف المعياري.

الشكل الموضح يوضح مفهوم التباين والانحراف المعياري:-





مثال(٤) جد الانحراف المعياري لمجموعة القيم: ٣٥، ٤١، ٣٩، ٤٩، ٤٣، ٤٠، ٤٧

الحل : أولا نجد المتوسط الحسابي للقيم:

المتوسط الحسابي ($\bar{س}$) = $\frac{\sum س_ن \times ت_ن}{\sum ت_ن}$ = $\frac{٣٥+٤١+٣٩+٤٩+٤٣+٤٠+٤٧}{٧}$ = ٤٢

($س_ن - \bar{س}$)^٢	($س_ن - \bar{س}$)	القيم ($س_ن$)
٤٩	٧−	٣٥
١	١−	٤١
٩	٣−	٣٩
٤٩	٧	٤٩
١	١	٤٣
٤	٢−	٤٠
٢٥	٥	٤٧
$\sum (س_ن - س)^٢$ = ١٣٨	$\sum (س_ن - س)$ = ٠	$\sum س_ن$ = ٢٩٤

التباين = $\frac{\sum (س_ن - س)^٢}{ن}$ = $\frac{١٣٨}{٧}$ = ١٩,٧١٤

الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$ = $\sqrt{١٩,٧١٤}$ = ٤,٤٤

تمارين

١) جد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لمجموعة القيم التالية :

أ) ٤، ١٠، ٨، ٢

ب) ٣، ١٥، ٦، ٩

جـ) ٢، ٢، ٢، ٢، ٢، ٢

٢) التوزيع الآتي يمثل أطوال طلبة في صف ما: ١٦٣، ١٥٨، ١٦٧، ١٧٤، ١٤٨. جد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه الدرجات.

٣) التوزيع الآتي يمثل درجات طلبة في امتحان الإحصاء: ٤٥، ٧٢، ٦٣، ٥٩، ٧٨، ٦٤، ٥١، ٦٧. جد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه الدرجات.

تمثيل البيانات الإحصائية: –

أولاً: التمثيل بالقطاعات الدائرية :

القطاع الدائري هو جزء من دائرة يحده نصفا قطر وقوس. لذلك تعتمد طريقة عرض البيانات بالقطاعات الدائرية على زاوية القطاع الدائري المركزية بحيث يتناسب قياس زاوية القطاع مع عدد العناصر في مجموعته.

مثال(١) الجدول التالي يمثل مساحات قارات مختلفة في العالم بملايين الكليومترات المربعة :

القارات	أ	ب	ج	د
المساحة	٣٠	٢٥	٥	٢٠

لتمثيل البيانات بالقطاع الدائري:

نحسب زاوية القطاع الدائري لكل قارة عن طريق القانون: $\frac{\text{مساحة القارة}}{\text{مجموع المساحات}} \times ٣٦٠$

القارة	المساحة	زاوية القطاع الدائري
أ	٣٠	(٣٠/٨٠) × ٣٦٠ = ١٣٥°
ب	٢٥	(٢٥/٨٠) × ٣٦٠ = ١١٢.٥°
ج	٥	(٥/٨٠) × ٣٦٠ = ٢٢.٥°
د	٢٠	(٢٠/٨٠) × ٣٦٠ = ٩٠°
المجموع	٨٠	٣٦٠°

وعليه يكون التمثيل بالقطاع الدائري كما هو موضح بالشكل الآتي:-

تدريب(١) الجدول التالي يمثل مصروفات شخص ما خلال الشهر الواحد :

جهة الصرف	الإيجار	التغذية	الملبس	التعليم	أقساط سيارة	الادخار
المبلغ	٢٠٠	٣٠٠	٢٨٠	١٨٠	٢٤٠	٢٠٠

مثل البيانات السابقة بالقطاعات الدائرية.

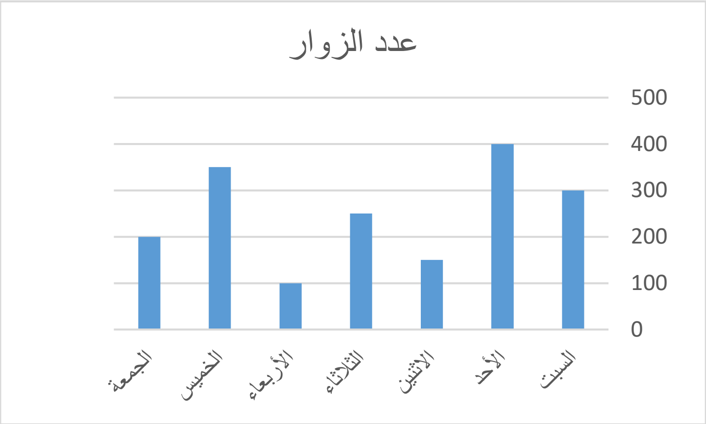
ثانياً: التمثيل بالأعمدة:

التمثيل بالأعمدة هي طريقة تستخدم للمقارنة باستعمال أعمدة وأطوالها لتمثيل بيانات معينة.

مثال(٢) الجدول التالي يمثل زوار متحف ما :

أيام الأسبوع	السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
عدد الزوار	٣٠٠	٤٠٠	١٥٠	٢٥٠	١٠٠	٣٥٠	٢٠٠

لتمثيل البيانات بالأعمدة:



تلاحظ عرض كل الأعمدة متساوي، والمسافة بين كل عمودين متساوية. بينما ارتفاع كل عمود يمثل عدد الزوار.

تدريب(١) الجدول التالي يمثل عدد الطلبة الذين يمارسون رياضات معينة في صف ما. مثل هذه البيانات بالأعمدة :

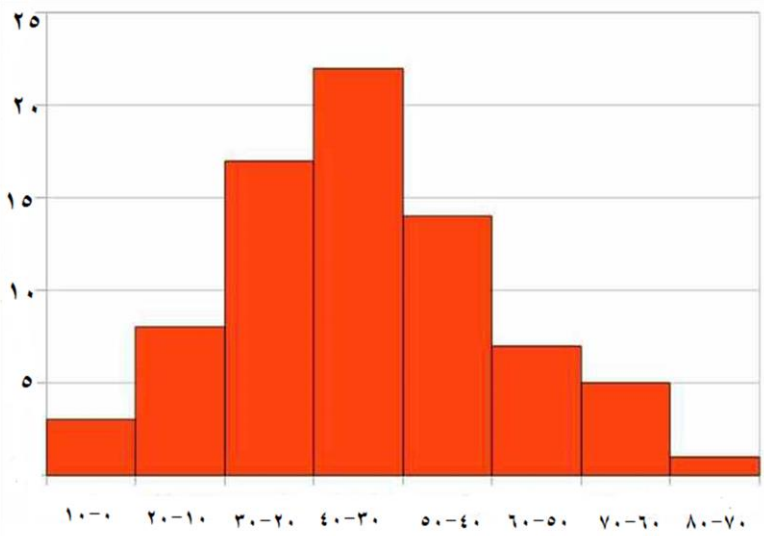
الهواية	كرة القدم	التنس الأرضي	كرة الطائرة	تنس الطاولة	البلياردو
عدد الطلبة	٣٥	٢٠	١٥	١٠	١٢

ثالثاً: التمثيل بالمدرج التكراري:

المدرج التكراري هو أحد الرسومات البيانية التي تعطي معلومات غزيرة في شكل بسيط. فهو يمكنك من فهم البيانات وتوزيعها وبالتالي يمكننا من تحليل البيانات والوصول إلى قرارات إدارية مهمة. وهو يشبه الأعمدة إلا أنه لا يوجد فاصل بينها.

مثال(٣) الجدول التالي يمثل أعمار مجموعة من الناس خرجوا في رحلة جماعية وكان عددهم ٤٠ شخصا. مثل البيانات التالية في مدرج تكراري.

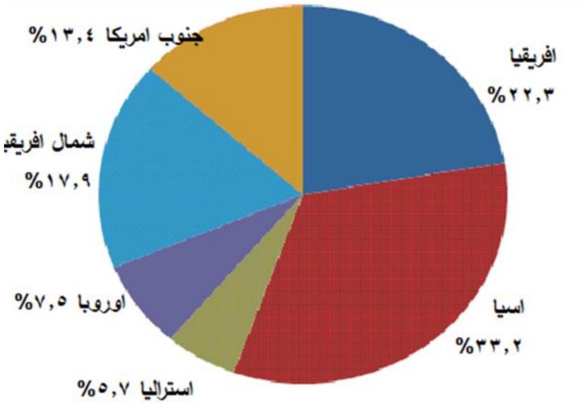
الفئة العمرية	٠–١٠	١٠–٢٠	٢٠–٣٠	٣٠–٤٠	٤٠–٥٠	٥٠–٦٠	٦٠–٧٠	٧٠–٨٠
العدد	٣	٨	١٧	٢٢	١٤	٧	٥	١



تدريب(٣) يبين الجدول التالي درجات طلبة أحد الصفوف في الاختبار النهائي لمادة الرياضيات التطبيقية مثل هذه البيانات بالمدرج التكراري :

الدرجات	٢٤–٣٠	٣٠–٣٦	٣٦–٤٢	٤٢–٤٨	٤٨–٥٤	٥٤–٦٠
العدد	٥	٦	٨	٥	١٠	٤

تدريب(٤) القطاع الدائري التالي يمثل نسب مساحة كل قارة من القارات الست، فإذا كان إجمالي مساحة القارات الست ١٣٤ مليون متر مربع فأوجد ما يلي :

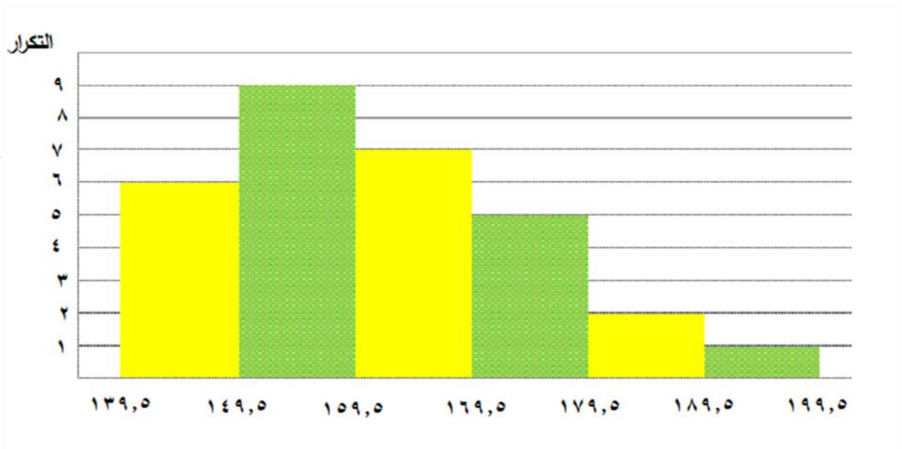


١) مساحة آسيا بالكيلو متر المربع ؟

٢) مساحة أوروبا بالكيلو متر المربع ؟

٣) كم تزيد مساحة افريقيا عن مساحة أوروبا؟

تدريب(٥) المدرج التكراري التالي يمثل أطوال توزيع من الطلبة (بالسنتيمتر) عددهم ٣٠ طالبا. فأوجد ما يلي:



١) كم عدد الطلبة الذين تتراوح أطوالهم بين ١٥٩.٥سم ، ١٦٩.٥سم ؟

٢) كم عدد الطلبة الذين تقل أطوالهم عن ١٥٩.٥ سم ؟

٣) كم عدد الطلبة الذين أعمارهم عن ١٦٩.٥ سم ؟

٤) كم نسبة الطلبة الذين تتراوح أعمارهم بين ١٤٩.٥ سم ، ١٧٩.٥سم ؟

مقدمة في الاحتمالات

الاحتمال فرع من فروع الرياضيات يتعامل مع حساب أرجحية أو فرصة حدوث حدث معين.

وتتراوح قيمة الاحتمال بين صفر ، ١ (٠ ≤ ل ≤ ١) ، ويسمى الحدث إذا كان احتماله يساوي ١ حدث أكيد ، بينما الحدث الذي احتماله صفر يسمى حدث مستحيل.

مسلمات الإحتمال
ل (Ω) = 1
ل (ϕ) = صفر
صفر ≤ ل(ح) ≤ 1

التجربة العشوائية:

هي التجربة التي يُمكننا معرفة جميع نواتجها الممكنة قبلَ إجرائها ولكننا لا نستطيع تحديد أياً من هذه النتائج سيتحقق فعلاً قبل اجراء التجربة. مثلاً: إذا رميت قطعة نقدٍ معدنية مرة واحدة، فما هي النواتج الممكنة؟ إما صورة أو كتابة، ولا توجد نواتج أخرى، لأنه لا يوجد لقطعة النقد المعدنية إلا وجهان.

وكذلك إذا رميتَ حجرَ نردٍ مرةً واحدةً، فما هي النواتج الممكنة؟

إما ظهور العدد ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦

الفضاء العيني:

نُسمَّي النواتج الممكنة عندَ إجراء تجربةٍ ما بـ المشاهدات أو الفضاء العيني ونرمز له بالرمز Ω .

مثلاً: الفضاء العيني لتجربة رَمي قطعة نقد معدنية مرة واحدةً هو مجموعة كل النواتج الممكنة:

Ω = { صورة ، كتابة } ، وعدد النواتج الممكنة هنا = ٢

وكذلك لو لديكَ كيس يحتوي على أربع كرات: كرة حمراء، كرة زرقاء، كرة خضراء، كرة سوداء. فإذا قُمتَ بسحبِ كرة واحدة من الكيس دون النظر فيه فإن النواتج الممكنة هي: كُرة حمراء، كُرة زرقاء، كُرة خضراء، كُرة سوداء،

فإن Ω = { كُرة حمراء ، كُرة زرقاء ، كُرة خضراء ، كُرة سوداء } ، وعدد النواتج الممكنة هنا = ٤.

مثال(١) احسب احتمال ظهور صورة في تجربة رمي قطعة نقدٍ معدنية مرة واحدة .

الحل : الفضاء العيني Ω = { صورة ، كتابة }

احتمال ظهور صورة = $\frac{\text{عدد مرات ظهور الحدث}}{\text{عدد النواتج الممكنة}}$ = $\frac{١}{٢}$

مثال(٢) في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة احسب:

١) احتمال ظهور العدد ٦ ٢) احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على ٢

الحل : الفضاء العيني Ω = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ }

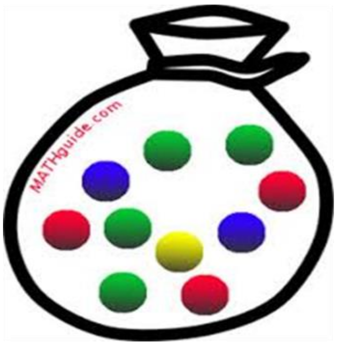
١) احتمال ظهور العدد ٦ = $\frac{\text{عدد مرات ظهور الحدث}}{\text{عدد عناصر } \Omega}$ = $\frac{١}{٦}$

٢) الأعداد التي تقبل القسمة على ٢ هي ٢، ٤، ٦

احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على ٢ = $\frac{\text{عدد مرات ظهور الحدث}}{\text{عدد النواتج الممكنة}}$ = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

هل لاحظت هنا أنّ فرص :

احتمال وقوع الحادث ، تزداد كلما زاد عدد عناصر الحادث"



مثال(٣) إذا سحبت كرةً واحدة من الكيس المجاور الذي يحتوي على كرة صفراء وكرتان زرقاوان وأربع كرات خضراء وثلاث كرات حمراء دونَ النظر إليها . ما احتمال سحب كرة صفراء؟ وما احتمال سحب كرة حمراء؟ وما احتمال سحب كرة سوداء؟

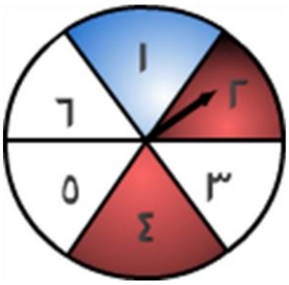
الحل : الفضاء العيني Ω = { صفراء، حمراء ، زرقاء، خضراء }

احتمال سحب كرة صفراء = $\frac{١}{١٠}$ ، واحتمال سحب كرة حمراء = $\frac{٣}{١٠}$

وأما احتمال سحب كرة سوداء = صفر (حدث مستحيل) لعدم وجود كرة سوداء داخل الكيس.

مثال(٤) في الشكل إذا تم تدوير القرص حول محوره فما :

١) احتمال ظهور العدد ٢ أو ٤ ٢) احتمال ظهور عدد أكبر من الصفر



الحل :

احتمال ظهور العدد ٢ أو ٤ = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

وأما احتمال ظهور عدد أكبر من الصفر = ١ (حدث أكيد)

لأن كل الأعداد الموجودة أكبر من الصفر. أي أن

عدد عناصر الحدث = عدد عناصر الفضاء العيني Ω

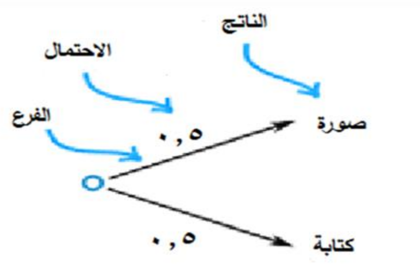
مثال(٥) إذا كان احتمال إصابة أحمد للهدف يساوي ٠,٦٥ ، فما احتمال أن يخطئ أحمد الهدف؟

الحل: احتمال أن يخطئ أحمد الهدف = ١ – احتمال إصابة أحمد للهدف

= ١ – ٠,٦٥ = ٠,٣٥

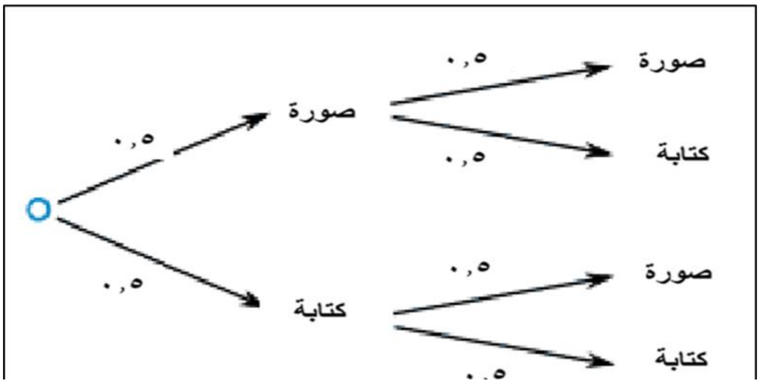
مخطط الشجرة في الاحتمالات

يعتبر مخطط الشجرة من أبسط الطرق لتمثيل الأحداث المتتالية. ويتكوّن من فروع ونهاية هذه الفروع يوضّح النتائج المحتملة إلى الأسفل.



فمثلا مخطط الشجرة الآتي يمثل رمي قطعة نقود مرة واحدة

بينما المخطط التالي يمثل رمي قطعة النقود مرتين متتاليتين

صورة ، صورة صورة ، كتابة كتابة ، صورة كتابة ، كتابة	

من الشكل: الفضاء العيني Ω = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

احتمال ظهور (صورة ، صورة) = ٠,٥ × ٠,٥ = ٠,٢٥

احتمال ظهور صورة على الأقل = ٠,٢٥ + ٠,٢٥ + ٠,٢٥ = ٠,٧٥

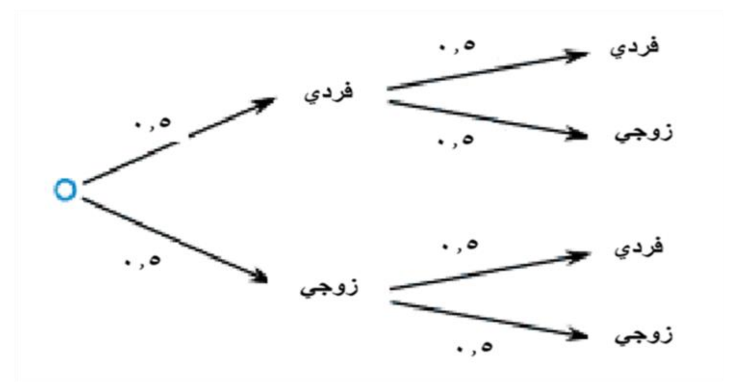
(صورة على الأقل يعني (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص))

مثال(٦) عند رمي حجري نرد معا باستخدام مخطط الشجرة احسب احتمال ظهور عدد فردي والآخر زوجي.

الحل : هناك احتمال ظهور الأعداد التالية على كل حجر نرد = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

الأعداد الفردية هي ١، ٣، ٥ وتمثل نصف العدد. أي أن احتمال ظهور عدد فردي في كل نرد = ٠,٥

وكذلك الأعداد الزوجية هي ٢، ٤، ٦ فإن احتمال ظهور عدد زوجي في كل نرد = ٠,٥



٠,٥ × ٠,٥ = ٠,٢٥

٠,٥ × ٠,٥ = ٠,٢٥

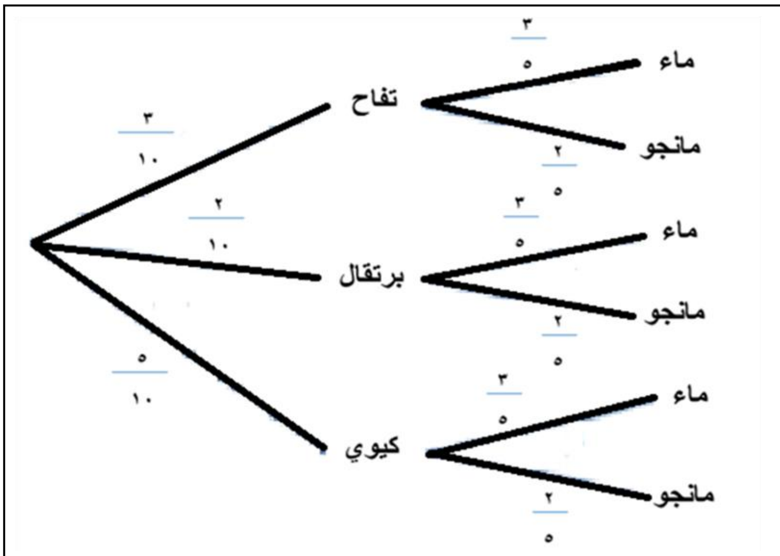
٠,٥ × ٠,٥ = ٠,٢٥

٠,٥ × ٠,٥ = ٠,٢٥

إذن احتمال ظهور عدد فردي والآخر زوجي = ٠,٢٥ + ٠,٢٥ = ٠,٥

مثال(٧) يحتوي صحن الفاكهة على ٣ تفاحات ، وبرتقالتين و٥ حبَّات من فاكهة الكيوي. وتحتوي صينيَّة المشروبات على ٣ زجاجات مياه وزجاجتين من عصير المانجو. قرَّر أحمد أن يغلق عينيه ويختاربطريقة عشوائيَّة. ارسم مخطَّط الشَّجرة (مع الاحتمالات) لإظهار خيارات أحمد.

مثلا من المخطط يتبين احتمال أن يختار أحمد برتقال مع ماء = $\frac{٢}{١٠} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٦}{٥٠}$



$\frac{٣}{١٠} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٩}{٥٠}$

$\frac{٣}{١٠} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٦}{٥٠}$

$\frac{٢}{١٠} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٦}{٥٠}$

$\frac{٢}{١٠} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٤}{٥٠}$

$\frac{٥}{١٠} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{١٠}$

$\frac{٥}{١٠} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٢}{١٠}$

تدريب: فاز فريق كرة القدم في إحدى المدارس بجائزة ستقدَّم لقائد الفريق أو نائبه خلال اجتماع لمجلس المدرسة. فإذا كان قائد الفريق يحضر في الاجتماعات بنسبة ٩٥٪ من المرَّات. ونائب قائد الفريق بنسبة ٩٣٪ من المرَّات الَّتي كان قائد الفريق حاضرًا فيها. وفي حال غياب قائد الفريق، كان نائب القائد حاضرًا في ٧٣٪ من المرَّات. ولا يعلم أفراد الفريق بأنَّه سيتمُّ منح الجائزة للفريق.

أرسم مخطَّط الشَّجرة واستخدمه لإيجاد:

أ) احتمال حضور كلٍّ من القائد ونائبه في يوم تقديم الجائزة.

ب) احتمال عدم حضور كلٍّ من القائد ونائبه في يوم تقديم الجائزة.

التباديل والتوافيق

العد من المهارات الاساسية في الرياضيات، فكثيراً ما تواجهنا مسائل يحتاج حلها الى اجراء عمليات عد بطرق مختلفة، و من ذلك مثلا معرفة عدد طرق ترتيب اربعة كتب مختلفة على رف، او معرفة عدد طرق اختيار فريق لكرة السلة مكون من خمسة لاعبين من بين اثنى عشر لاعباً، او معرفة عدد طرق اختيار عينة خماسية من مجتمع احصائى مكون من ٢٠٠ شخص او ....الخ.

التباديل: هو عدد تباديل (ن) من العناصر مأخوذة (ر) في كل مرة بحيث ٠≤ ر ≤ ن

ويرمز له بالرمز ${}^{ن}ل_{ر}$ ويقرأ " ن لام راء" ويعطى بالعلاقة :

$${}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

مثال(١) يراد اختيار (رئيس ونائب رئيس) لمجلس إدارة جماعة طلابية من بين أربعة طلاب. بكم طريقة يمكن ذلك؟

الحل: تلاحظ أن الرئيس يمكن أن يختار من بين ٤ طلاب (له ٤ فرص اختيار) ، وبعد اختيار الرئيس سيتبقى ٣ طلاب (أي أن نائب الرئيس سيكون لديه ٣ فرص للاختيار فقط) ، وبالتالي

عدد اختيار رئيس ونائب رئيس = ${}^{٤}ل_{٢}$ = ٤ × ٣ = ١٢

أو بتطبيق القانون ${}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!} = \frac{٤×٣×٢×١}{٢!} = \frac{٤!}{(٤-٢)!} = \frac{٤×٣×٢×١}{٢×١} = ١٢$

ملاحظة : تلاحظ أن الترتيب مهم في التباديل

مثال(٢) إذا كانت لدينا مجموعة تضم ٨ طلاب ويراد اختيار لاعب تنس ولاعب كرة مضرب ولاعب كرة ريشة. بكم طريقة يمكن ذلك؟

الحل: عدد الطرق = $^{٨}ل_{٣}$ = ٨×٧×٦ = ٣٣٦ طريقة

تدريب(١) بكم طريقة يمكن لخمسة أشخاص الجلوس على تسعة مقاعد موضوعة على استقامة واحدة؟

التوافيق: تغيير ترتيب العناصر يؤثر في التباديل بينما لا يؤثر في حالة التوافيق، ويرمز للتوافيق $\binom{ن}{ر}$ ويقرأ " ن فوق راء" ويعطى بالعلاقة :

$$\binom{ن}{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!} = \frac{ن!}{(ن-ر)!\times ر!}$$

مثال(٣) يراد اختيار فريق لكرة القدم بالمدرسة مكونا من ١١ لاعبا من بين ١٤ لاعبا. بكم طريقة يمكن ذلك؟

الحل : هنا الترتيب غير مهم .

$\binom{١٤}{١١}$ إذن عدد الطرق $= \frac{ن!}{(ن-ر)!\times ر!} = \frac{١٤!}{(١٤-١١)!\times ١١!} =$ ٣٦٤ طريقة

مثال(٤) في أحد اختبارات الرياضيات طلب من الطلبة الإجابة على ٨ أسئلة من بين ١٠ أسئلة. بكم طريقة يمكن للطالب اختيار الأسئلة؟

الحل : هنا الترتيب غير مهم . إذن $\binom{١٠}{٨}$ عدد الطرق $= \frac{ن!}{(ن-ر)!\times ر!} = \frac{١٠!}{(١٠-٨)!\times ٨!} =$ ٤٥ طريقة

تدريب(٢) بكم طريقة يمكن توزيع ٧ ألعاب على ٣ أطفال ؟

انتهى