Листок VII. Алгебра

qnbhd

Апрель 2020

Задача 1. Найдите множество многочленов P (x) с целыми коэффициентами, удовлетворяющих условиям $P(2) = 3, P(8) = 6$

Задача 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y \end{cases} \tag{1}$$

Задача 3. Даны два уравнения:

$$x^6 + px^3 + q = 0 \text{ и } x^2 + 7x - 10^2 017 = 0$$

Известно, что оба корня второго уравнения являются также корнями первого. В поле ответа укажите последние три цифры в десятичной записи числа p. Если p не целое, то укажите три цифры перед запятой.

Задача 4. Дана квадратная матрица 3×3, у которой сумма квадратов всех элементов не превосходит единицу. Найдите максимальное возможное значение определителя данной матрицы.

Задача 5. Найти кратность корня $x = x_0$ многочлена $f(x)$:

$$f = x^5 + 8x^4 + 21x^3 + 14x^2 - 20x - 24, \quad x_0 = -2$$

Задача 6. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6y - 6x \\ y - 2x \end{pmatrix}$$

Задача 7. Найти наименьшее целое число k, при котором уравнение

$$x^2 - 2(k+2)x + 12 + k2 = 0$$

имеет два различных действительных корня.

Задача 8. Линейный оператор A в базисе $(e_1; e_2; e_3)$ имеет матрицу . Найти его матрицу A' в базисе (e'_1, e'_2, e'_3), если:

$$\begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$$

А также $e'_1 = e_1 - 2e_2 + e_3, e'_2 = 3e_1 - e_2 + 2e_3, e'_3 = 2e_1 + e_2 + 2e_3$

Задача 9. Вычислить определитель порядка n, элементы которого заданы условиями $a_{ij} = |i - j|$

Задача 10. Вычислить приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Задача 11. Вычислить выделением линейных множителей:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$$

Задача 12. Вычислить методом реккурентных соотношений:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Задача 13. Вычислить методом представления в виде суммы определителей:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

Задача 14. Найти ранг следующих матриц при различных значениях параметра λ:

$$\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}$$

Задача 15. Пусть A и B — матрицы с вещественными элементами с одинаковым числом строк. Доказать, что:

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix} = \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(B)$$

Задача 16. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - z \equiv 1 \\ x + 2y + z \equiv 2 \pmod 5 \\ x + y - z \equiv -1 \end{cases}$$

Задача 17. Доказать, что квадратная матрица X порядка 2 является решением уравнения:

$$X^2 - (\operatorname{tr} X)X + \det X = 0.$$

Задача 18. Чему равен определитель целочисленной матрицы A, если матрица A^{-1}также целочисленная?

Задача 19. Доказать, что если матрица $E + AB$ обратима, то матрица $E + BA$ также обратима.

Задача 20. Доказать, что:

- если матрицы A и B ортогональны, то матрицы A^{-1} и AB также ортогональны
- если комплексные матрицы A и B унитарны, то матрицы A^{-1} и AB также унитарны.

Задача 21. Решить уравнение $AX + X + A = 0$, где A — нильпотентная матрица.

Задача 22. При каком условии произведение двух эрмитовых или косоэрмитовых матриц является эрмитовой матрицей?

Задача 23. Найти наибольший общий делитель многочленов:

- $x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 1$ и $x^3 + x^2 - x - 1$
- $x^6 + 2x^4 - 4x^3 - x^2 + 8x - 5$ и $x^5 + x^2 - x$