Операционное исчисление

Темплин Константин

Апрель 2020

1 Введение

Суть операционного исчисления состоит в том, чтобы функции $f(t)$ действительного переменного t поставить в соответствие функцию $F(p)$ комплексной переменной p.

При некоторых условиях такое отображение будет биекцией.

Оказывается, что операциям дифференцирования и интегрирования функций $f(t)$ соответствуют операции умножения и деления функций $F(p)$ на переменную p.

Таким образом становится возможным свести более трудную задачу (например решение системы ОДУ) к более простой алгебраической задаче.

2 Оригинал и изображение

Определение. ***Оригиналом*** *назовём такую функцию* $f(t)$, *которая соответствует следующим условиям:*

1. *Определена на* $\mathbb{R}$ *и* $f(t) \equiv 0$ *при* $t < 0$
2. *Кусочно-непрерывна на любом конечном интервале*
3. $\exists M > 0, s_0 \geq 0$, *такие что* $\forall t > 0\ |f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}$. *Говорят, что функция имеет ограниченный рост.*

Определение. ***Изображением*** *оригинала* $f(t)$ *назовём функцию:*

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

В правой части этого равенства стоит так называемый **Интеграл Лапласа**. Данное преобразование называются **преобразованием Лапласа**. Его обозначают:

$$f(t) \doteqdot F(p)$$

Такое отображение также называют **L-отображением**.

Теорема. ***Теорема существования*** *Для всякого оригинала $f(t)$ существует изображение $F(p)$, определенное в полуплоскости $s = \Re(p) > s_0$, где s_0 – показатель роста оригинала. В этой полуплоскости функция $F(p)$ является аналитической, имеет производную любого порядка в каждой точке полуплоскости и кроме того, если $\Re(p) = s \to +\infty \implies F(p) \to 0$*

Доказательство

По предположению $f(t)$ - оригинал, а значит $|f(t)| \le Me^{s_0 t}$. Оценим интеграл Лапласа:

$$\left| \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} \right| \le \int\limits_0^{+\infty} |f(t)||e^{-pt}| \le \int\limits_0^{+\infty} Me^{s_0 t}e^{-st} = \frac{M}{s - s_0}$$

Видно, что при $s - s_0 > 0$ интеграл ограничен по модулю. Следовательно, он сходится абсолютно. Это означает, что изображение оригинала существует при $s > s_0$. И более того $F(p) \le \frac{M}{s-s_0}$. Отсюда видно, что $F(p) \to 0$ при $s = \Re(p) \to +\infty$

Теорема. ***Теорема единственности*** *Если $F(p)$ является изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают во всех точках, в которых они непрерывны.*

3 Свойства оригиналов и изображений