

Тренировка 1

qnbhd

Октябрь 2020

Задача 1. Найти все матрицы второго порядка с ненулевыми элементами, квадрат которых равен нулевой матрице.

Задача 2. Пусть A и B – ненулевые квадратные матрицы. Доказать, что если $AB = 0$, где O – нулевая матрица, то $\det A = \det B = 0$.

Задача 3. Пусть A, E, O – матрицы размера $n \times n$ (E – единичная, O – нулевая) и $A^k = 0$ при некотором $k > 0$. Доказать, что $E - A$ обратима и выразить $(E - A)^{-1}$ через A .

Задача 4. Доказать, что если A и B – квадратные матрицы одинакового порядка, то собственные значения AB и BA совпадают.

Задача 5. В пространстве V многочленов степени не выше 5 найти два различных подпространства размерности 3, сумма которых не совпадает с V .

Задача 6. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[0; 1]$ и

$$\int_0^1 f(x) dx = 0$$
$$\int_0^1 x f(x) dx = 0$$

доказать, что $|f(x)|$ в некоторой точке принимает значение 4.

Задача 7. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0; 1]$. Доказать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

Задача 8. Пусть X вещественная матрица размера $n \times n$, такая, что $X + X^T = I_n$ (I_n — единичная матрица, X^T — транспонированная матрица). Докажите, что $\det X \leq \frac{1}{2^n}$

Задача 9. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b) = 0$. Доказать, что существует $c \in (a, b)$ такое, что

$$f'(c) + f(c) = 0$$

Задача 10. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$$

Задача 11. Пусть $P(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, A — линейный оператор в вещественном линейном пространстве L , λ — вещественное собственное число оператора A , являющееся корнем многочлена $P(x)$. Доказать, что в L существует ненулевой вектор a со свойством $P(A)a = 0$.

Задача 12. Вычислить

$$\int_{-1}^1 x d\left(\frac{1}{x}\right)$$

Задача 13. Указать какое-либо значение m , при котором частичная сумма S_m ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{n}}$ больше 1000.

Задача 14. Можно ли найти такие числа a, b, c , что на отрезке $[-4, 4]$ функция $f(x) = a \sin 2x + b \cos 3x + c \sin 4x$ принимает только положительные значения?

Задача 15. Найдите такое векторное поле A , что

$$\operatorname{div} A = 2x - y, \operatorname{rot} A = -zi$$