Теория функций комплексного переменного

Конспект лекций. Автор: Темплин К.Э (qnbhd)

Содержание

1 Основные сведения о комплексных числах

1.1 Введение

Определение. ***Комплексным числом*** *назовем пару* $(x, y) \in \mathbb{R}$, *и обозначим как* $z = x + iy$.

Определение. ***Мнимой единицей*** *назовем такое число* i, *что* $i^2 = -1$.

Определение. ***Действительной частью*** *комплексного числа* $z = x + iy$ *назовем* x *и обозначим как* $\Re(z) = x$

Определение. ***Мнимой частью*** *комплексного числа* $z = x + iy$ *назовем* y *и обозначим как* $\Im(z) = y$

Определение. *Суммой двух комплексных чисел назовем такую бинарную операцию, что*

$$+ \; : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$+ \; : (z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2) \longrightarrow x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

Определение. *Произведением двух комплексных чисел назовем такую бинарную операцию, что*

$$\cdot \; : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$$

$$\cdot \; : (z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2) \longrightarrow x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Определение. ***Модулем*** *комплексного числа назовём* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Определение. ***Сопряженным числом*** *назовём* $z* = x - iy$

▷ Основным свойством сопряженного числа является то, что при умножении z на z^* получаем действительное число. $z^*z = |z|^2$

Предположим, что нам необходимо решить уравнение $zz_1 = z_2$. Домножим обе части на z^*. Тогда

$$zz_1z_1^* = z_2z_1^*$$

Отсюда

$$z = \frac{z_2z_1^*}{|z_1|^2}$$

Такую операцию называют делением комплексных чисел.

Пример. *Поделим два числа* $z_1 = 2 - 5i$ *и* $z_2 = -3 + 4i$

$$\frac{2-5i}{-3+4i} = \frac{(2-5i)(-3-4i)}{25} = \frac{7i-26}{25}$$

1.2 Геометрическая интерпретация

Комплексные числа изображаются на плоскости $(\Re\{z\}, \Im\{z\})$ как радиус-векторы из начала координат. Соотвественно, сложением комплексных чисел соответствует сложению векторов.

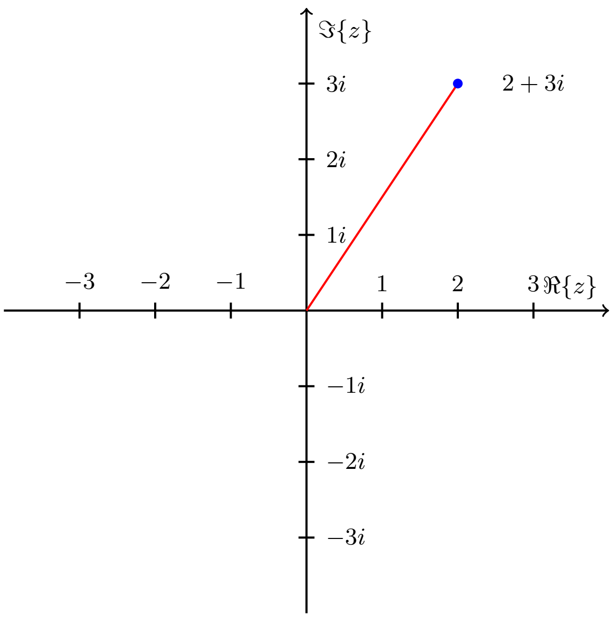

Рис. 1: Изображено комплексное число ***2+3i***

Также комплексные числа записываются в **тригонометрической форме** (переход к полярной системе координат)

1.3 Тригонометрическая форма

Обозначим φ как угол между вектором и положительным направлением $\Re\{z\}$, а r - длиной вектора.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{1}$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Определение. ***Аргументом*** *комплексного числа назовем φ.*

$$\arg z = \varphi \in (-\pi; \pi)$$

Теорема. ***(Формула Муавра)*** *гласит, что:*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Следствие.

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Следствие.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$
$$k = 0, \ldots, n-1$$

- ▷ Отсюда следует, что корней из комплексного числа степени n имеется всего n штук.
- ▷ Эти корни на комплексной области образуют правильный n-угольник.
Также вспомним основную теорему алгебры.

Определение. ***(Основная теорема алгебры)*** *Всякий многочлен, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.*

Следствие. *Любой многочлен $p(z) = a_n z_n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ степени $n > 1, a_n \neq 0$ представим в виде:*

$$p(z) = a_n \prod_{i=0\ k1+\cdots+k_s=n}^{s} (z - z_i)^{k_i}$$

1.4 Экспоненциальная форма

1.4.1 Тождество Эйлера

Рассмотрим такой объект, как мнимая экспонента:

$$f(\theta) = e^{i\theta}$$

Этот объект проще всего понимать, как сумму ряда Тейлора. Данный ряд сходится очень быстро. (по признаку Даламбера)

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$f(x) = 1 + \underset{f'}{i\theta} + \underset{f''}{\frac{i^2\theta^2}{2!}} + \underset{f'''}{\frac{i^3\theta^3}{3!}} + \dots$$

Коэффициенты этого ряда обладают некоторой периодичностью. (Из-за того, что $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, \dots$). Похожей периодичностью обладают функции синуса, косинуса. Сгруппируем действительные и мнимые члены ряда:

$$f(\theta) = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right)$$

Можно заметить что первая скобка соответствует $\cos z$, а вторая $i \sin z$. Остюда получим, что

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

В частности, при $\varphi = \pi$

$$e^{i\pi} = -1$$

Это называется **тождеством Эйлера**.

1.4.2 Запись числа

Из тождества Эйлера следует, что любое комплексное число можно представить в виде:

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Легко определяются операции сложения и умножения комплексных чисел:

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Также из тождества Эйлера следуют формулы:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

2 Множества точек комплексной плоскости

1. **Прямая** задается уравнением $Ax + By + C = 0$

$$z = x + iy,\ \bar{z} = x - iy$$
$$x = \frac{z + \bar{z}}{2},\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

   Подставляя в уравнение окружности, получаем уравнение прямой в комплексной форме:

$$\bar{M}z + M\bar{z} + C = 0$$

   Где $M = \frac{A}{2} + i\frac{B}{2}$

2. **Окружность** задается уравнением $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + F = 0$ В комплексной форме задаётся как:

$$Az\bar{z} + \bar{M}z + M\bar{z} + F = 0$$

   Где $M = \frac{B}{2} + i\frac{C}{2}$

Прямую можно воспринимать как окружность бесконечно-большого радиуса.

3 Решение уравнений

Допустим нам необходимо решить уравнение:

$$z^n = w$$

при $z \neq 0$ решение для $w = \rho e^{i\alpha}$

$$\sqrt[n]{\rho}\exp\left(i\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right)$$

Корень, как можно заметить является функцией - многозначной. Вообще, говоря в данном выражении мы выбираем $k = 0, \ldots, n-1$, хотя можно выбрать любые n подряд идущих чисел.

Будет отделять корень многозначный от обычного фигурными скобками:

$$\{\sqrt[n]{w}\}$$

Рассматривая тригонометрические функции можно выбрать один из способов введения данных функций.

Например, можно просто по определению сказать:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Все формулы тригонометрии для них работают, правда не совсем корректно доказывать в таком случае данные свойства. Но тоже рабочая версия. С другой стороны можно ввести данные понятия просто через сумму ряда Тейлора.

Если нам необходимо решить уравнение вида:

$$e^z = w$$

причем $w = 0$ нас неособо интересует. Применяя экспоненциальное представление, получаем такое решение:

$$z = \ln \rho + i(\alpha + 2\pi k)$$

Будем обозначать комплексный логарифм символом $\operatorname{Ln} z$

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k)$$

4 Дифференцируемость

Вообще, большинство определений в комплексном анализе, связанном с дифференцированием повторяют определения из анализа ФНП. В данном конспекте не будет хорошего доказательства теорем, но будут примерные описания их. Будем концентрироваться на выводах, которые мы получаем для решения задач.

Определение. *Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ называется дифференцируемой, тогда и только тогда, когда дифференцируемы функции u, v а также выполняются так называемые условия* ***Коши-Римана***

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Данное утверждение доказывается в обе стороны. Применяется следующее определение дифференцируемости из анализа:

$$f(z + h) = Ah + O(h),\ h \to 0$$

$$u(x + h, y + k) = u(x, y) + Ah + Bk + O(\sqrt{h^2 + k^2}),\ h, k \to 0$$

Определение. *Функция называется* ***голоморфной*** *(регулярной) в некоторой точке, если она непрерывна и дифференцируема в некоторой окрестности данной точки.*

Определение. *Функция называется* ***голоморфной*** *(регулярной) в некоторой области D - если она голоморфна в каждой точке данной области.*

▷ Область - открытое множество, а следовательно ее границы не включаются.

Если функция голомофорфна, то её лаплассианы вещественной и мнимой части равны нулю. То есть функции удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Или $\Delta u = 0,\ \Delta v = 0$

Интересный пример связан с функцией $f(z) = \bar{z}$. Для неё не выполняются условия Коши-Римана. Более того, с помощь подстановок

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2},\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

Можно убедиться в том, что если в функции содержится $\bar{z}$ тогда функция не будет дифференцируемой.

▷ В заданиях на использование условий Коши-Римана часто необходимо перейти к виду $f(z)$ от вида $u + iv$ для этого также используются данные подстановки. Что примечательно, сопряженные слагаемые должны уйти $\bar{z}$. А если не уйдут функция не удовлетворяет условиям Коши-Римана.

5 Интегрирование

Если каждая функция u, v комплексной функции $f(t) = u(t) + iv(t)$ является зависимой от действительной переменной, а $t \in [a; b]$, то вообще говоря интеграл от данной функции:

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b u(t)dt + i\int\limits_a^b v(t)dt$$

Доказывается оценочное утверждение:

Теорема.

$$\left|\int\limits_a^b f(t)dt\right| \leq \int\limits_a^b |f(t)|dt$$

Но в курсе чаще всего работают с другими интегралами. Это так называемые контурные интегралы.

Пусть у нас есть кусочно-гладкая кривая γ (непрерывная, имеет конечное число участков гладкости, непрерывную производную, которая не обращается в ноль) тогда имеет смысл интеграл:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz$$

Дадим определение данному интегралу. Пусть наша кривая запараметризована. То есть она описывается функцией $z = z(t)$ причём $t \in [\alpha; \beta]$. Тогда:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt$$

И для данного интеграла справедлива следующая оценка:

Теорема.

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \leq \int\limits_{\gamma} |f(z)||dz|$$

Рассмотрим пример:

$$\oint\limits_{\omega_R} \frac{dz}{(z-a)^k}$$

где $\omega_R = \{z : |z-a| = R\}$

$\triangleright$ Если кривая - замкнута, интеграл пишут с кружочком по середине. Также на нем иногда обозначают направление. По умолчанию, будем считать, что направление против часовой стрелки.

Первым делом нужно запараметризовать нашу кривую. Сделаем замену переменной:

$$z = a + Re^{it}$$

где $t \in [0; 2\pi]$. Тогда дифференциал:

$$dz = Rie^{it}dt$$

Значит, наш интеграл равен интегралу

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}dt}{(Re^{it})^k} = \frac{i}{R^{k-1}} \int_0^{2\pi} e^{it(k-1)}dt$$

при k=1 этот интеграл равен $2\pi i$, а иначе он равен 0.

Рассмотрим также ещё один пример:

$$I = \oint_{C_R} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}dz$$

Где $C_R = \{z : |z| = R\}$. А $m \geq n + 2$. Докажем, что он стремится к нулю при $R \to +\infty$. Для начала заметим, что корни знаменателя могут попасть на границу контура. Но мы всегда можем найти такую окружность, которая накроет все корни знаменателя, ведь их конечное число.

Используя оценку:

$$|I| \leq \int_{C_R} \frac{|P_n(z)|}{|Q_m(z)|}|dz|$$

Используя свойство $|a + b| \geq ||a| - |b||$. А также, зная что $z \leq R$. В пределе при $R \to +\infty$ будем получать ноль, так как степень знаменателя как минимум на 2 больше степени знаменателя.

Справедливо следующее утверждение:

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z - a} = 2\pi ik, \ k \in \mathbb{Z}$$

6 Интегральная теорема Коши

Данная теорема является одной из фундаментальных теорем комплексного анализа. Теорема доказывается постепенно, начиная с простых случаев, например сначала рассматривается выпуклая область, а в ней рассматривается контур, представляющий собой треугольник (**Лемма Гурса (Goursat)**). Рассматриваются оценки и интеграл по абсолютной величине всегда становится меньше некоторого произвольного ε. Сформулируем теорему без доказательств:

Теорема. *Если функция $f(z)$ голоморфна в односвязной области γ, ограниченной замкнутым контуром L, а также в точках этого контура, тогда:*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

7 Теорема об обратной функции

Теорема. *Если $f(z)$ голоморфна в области D, $f'(z)$ непрерывна в данной области, а также $f'(z_0) \neq 0$. А $f(z_0) = w_0$. Тогда $\exists O_\delta(w_0) : f^{-1}(w), \exists O_\varepsilon(z_0)$. Тогда $\forall w \in O_\delta(w_0)$ $g(w) \in O_\varepsilon(z_0)$. Где*

$$g(w) = f^{-1}(w)$$
$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

Рассмотрим пример:

Пусть $f(z) = z^2$ а наша область - $1 < |z| < 2$ - кольцо. Посмотрим во что переходит данная область при таком отображении f. Изначально, $z = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho \in (1; 2)$, а $\varphi \in [0; 2\pi]$. При отображении:

$$z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi}$$
$$\rho^2 \in (1; 4),\ 2\varphi \in [0; 4\pi]$$

Как видим, область также перешла в кольцо, но оно как было пройдено 2 раза. Значит, нет взаимной однозначности. Пример

$$\left(\frac{3}{2}i\right)^2 = -\frac{9}{4} = \left(-\frac{3}{2}i\right)^2$$

Определение. *Функция $f(z)$ называется* ***однолистной*** *в области G, если $\forall z_1, z_2 \in G$ причём $z_1 \neq z_2$ выполняется $f(z_1) \neq f(z_2)$*

В предыдущем примере, как видно, функция таковой не является.