Операционное исчисление

Темплин Константин

Апрель 2020

1 Введение

Суть операционного исчисления состоит в том, чтобы функции $f(t)$ действительного переменного t поставить в соответствие функцию $F(p)$ комплексной переменной p.

При некоторых условиях такое отображение будет биекцией.

Оказывается, что операциям дифференцирования и интегрирования функций $f(t)$ соответствуют операции умножения и деления функций $F(p)$ на переменную p.

Таким образом становится возможным свести более трудную задачу (например решение системы ОДУ) к более простой алгебраической задаче.

2 Оригинал и изображение

Определение. ***Оригиналом*** *назовём такую функцию $f(t)$, которая соответствует следующим условиям:*

1. *Определена на $\mathbb{R}$ и $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$*
2. *Кусочно-непрерывна на любом конечном интервале*
3. *$\exists M > 0, s_0 \geq 0$, такие что $\forall t > 0$ $|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}$. Говорят, что функция имеет ограниченный рост.*

Определение. ***Изображением*** *оригинала $f(t)$ назовём функцию:*

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

В правой части этого равенства стоит так называемый **Интеграл Лапласа**. Данное преобразование называются **преобразованием Лапласа**. Его обозначают:

$$f(t) \doteqdot F(p)$$

Такое отображение также называют **L-отображением**.

Теорема. ***Теорема существования*** *Для всякого оригинала $f(t)$ существует изображение $F(p)$, определенное в полуплоскости $s = \Re(p) > s_0$, где s_0 – показатель роста оригинала. В этой полуплоскости функция $F(p)$ является аналитической, имеет производную любого порядка в каждой точке полуплоскости и кроме того, если $\Re(p) = s \to +\infty \implies F(p) \to 0$*

Доказательство

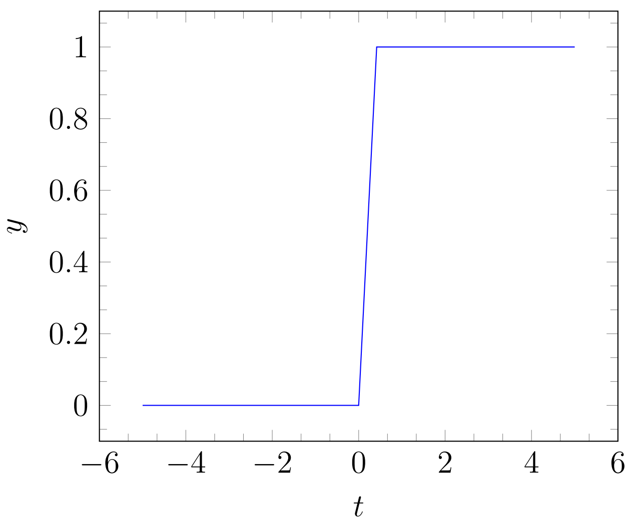
По предположению $f(t)$ - оригинал, а значит $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$. Оценим интеграл Лапласа:

$$\left| \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} \right| \leq \int\limits_0^{+\infty} |f(t)||e^{-pt}| \leq \int\limits_0^{+\infty} Me^{s_0 t}e^{-st} = \frac{M}{s - s_0}$$

Видно, что при $s - s_0 > 0$ интеграл ограничен по модулю. Следовательно, он сходится абсолютно. Это означает, что изображение оригинала существует при $s > s_0$. И более того $F(p) \leq \frac{M}{s-s_0}$. Отсюда видно, что $F(p) \to 0$ при $s = \Re(p) \to +\infty$

Теорема. ***Теорема единственности*** *Если $F(p)$ является изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают во всех точках, в которых они непрерывны.*

Функция $\mathbb{1}(t)$



Определение. ***Функцией Хевисайда*** *называется*

$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Найдём изображение функции Хевисайда:

$$F(p) = L\{\mathbb{1}(t)\} = \int\limits_0^{+\infty} \mathbb{1}(t) e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

Следовательно,

$$\mathbb{1}(t) \doteqdot \frac{1}{p}$$

А также

$$C \doteqdot \frac{C}{p}$$

3 Свойства преобразования Лапласа

Будем предполагать, что рассматриваемые далее функции $f(t), g(t)$, являются оригиналами, а соответствующие им изображения обозначим $F(p), G(p)$

- **Линейность**

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p)$$

- **Подобие**

$$f(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

- **Теорема смещения**

$$e^{bt} f(t) \doteqdot F(p - b)$$

  Примеры использования:

  Для $f(t) = \sin(t)$

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$L[\sin t] = \frac{1}{2i} \left(L[e^{it}] - L[e^{-it}]\right) =$$

$$\frac{1}{2i} \left(\frac{p + i - p + i}{p^2 + 1}\right) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\sin(t) \doteqdot \frac{1}{p^2+1}$$

Для $f(t) = \sin(at)$

По теореме подобия:

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

$$F(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{(\frac{p}{\alpha})^2+1} = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$$

$$\sin(\alpha t) \doteqdot \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$$

Для $f(t) = e^{bt}\sin(at)$

$$e^{bt}f(t) \doteqdot F(p-b)$$

$$e^{bt}\sin(\alpha t) \doteqdot \frac{\alpha}{(p-b)^2+\alpha^2}$$

- **Теорема запаздывания**

$$f(t-\tau) \cdot \mathbb{1}(t-\tau) =\doteqdot e^{-pt}F(p)$$

3.1 Запись кусочно-гладких оригиналов в одну строку

Если у нас есть функция $z(t)$

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \varphi_1(t) & t \in (0;\tau_1) \\ \varphi_2(t) & t \in (\tau_1;\tau_2) \\ \dots \\ \varphi_n(t) & t \in (\tau_{n-1};\tau_n) \\ \varphi_{n+1}(t) & t > \tau_n \end{cases}$$

Тогда справедливо:

$$\mathbb{1}(t) \cdot z(t) = \sum_{k=0}^{n} (\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)) \cdot \mathbb{1}(t-\tau_k)$$

Где $\varphi_0(t) \equiv 0, \tau_0 = 0$

3.2 Изображение периодических оригиналов

Пусть требуется найти изображение периодического оригинала $f(t)$ с периодом T.

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(t) & t \in [0;T) \\ 0 & t \notin [0;T) \end{cases}$$

$$\varphi(t) \cdot \mathbb{1}(t) \doteqdot \Omega(p)$$

Тогда можно получить аналитическую формулу для периодического оригинала в одну бесконечную строку:

$$f(t) \cdot \mathbb{1}(t) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(t - kT)\mathbb{1}(t - kT)$$

Применяя линейность находим изображение оригинала:

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \Omega(p) \cdot e^{-kpt} = \Omega(p) \cdot \frac{1}{1 - e^{-pT}}$$

- **Теорема о дифференцировании оригинала**

  Если функции $f(t), f'(t), f''(t) \dots f^{(n)}(t)$ являются оригиналами и $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0)$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$

- **Теорема о дифференцировании изображения**

  Дифференцирование изображения сводится к умножению на $-t$ оригинала, то есть:

$$F'(p) \doteqdot -t \cdot f(t)$$

$$F^{(n)} \doteqdot (-t)^n \cdot f(t)$$