Теория графов

1 Введение. Базовые понятия теории графов

Определение 1 *Граф - двойка $G = (V, E)$, где V - множество вершин, а E - множество рёбер (отношение).*

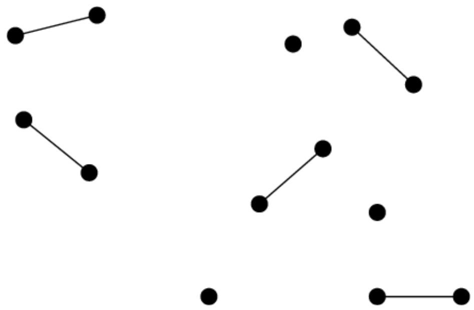

Рис. 1: Пример графов

▷ Пример: Города и наличие путей между ними. Люди в аудитории и связь между двумя людьми обозначает то, что у них день рождения в один день.

Определение 2 *Граф называется **ориентированным**, когда отношение E не симметрично. То есть из $(x, y) \in E$ не следует $(y, x) \in E$.*

Определение 3 *Если из одной вершины в другую существует несколько рёбер, то такие рёбра называются **кратными**.*

Определение 4 *Граф, содержащий кратные рёбра называется **мультиграфом**.*

Определение 5 *Вершина x, такая что $(x, x) \in E$ называется **петлёй**.*

Определение 6 *Граф, который содержит петли называется **псевдографом**.*

▷ Обычный (простой) граф является неориентированным, без петель и без кратных ребер.

Определение 7 *Последовательность вида $v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_n e_n v_{n+1}$ называется **маршрутом в графе**, где v_1 , v_{n+1} являются концами маршрута, а $e_i = (v_i, v_{i+1})$ - соединяющими рёбрами.*

Определение 8 *Маршрут замкнут, если $v_1 = v_{n+1}$*

Определение 9 *Если в пути все рёбра различны, и если маршрут замкнут, тогда маршрут называется **циклом**, а если не замкнут - **цепью**.*

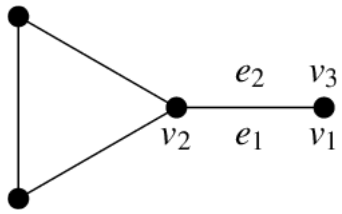

Рис. 2: Пример пути

▷ Если дополнительно все вершины различны, кроме, возможно первой и последней, цикл (цепь) называется простым(ой).

Определение 10 *Граф называется* ***связным****, если между двумя любыми вершинами существует маршрут.*

Определение 11 ***Компонентной связности графа*** *называется часть графа (подграф), являющаяся связной.*

Определение 12 *Подграф* $G' = (V', E')$, *где* $V' \subseteq V$, $E = \{(x, y) \in E \mid x, y \in V'\}$

Определение 13 *Две вершины соединены ребром* $\Leftrightarrow$ *две вершины* ***инцедентные*** *(смежные).*

Определение 14 ***Степенью вершины*** v *называется количество ребёр, инцедентных ей и обозначается* $\deg v$

Замечание

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2 \cdot |E|$$

Определение 15 ***Деревом*** *называется связный, ацикличный граф.*

Утверждение *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *G - дерево*
2. *Между любыми двумя вершинами в графе G существует единственная простая цепь*
3. *G - связен, а $|E| = |V| - 1$*
4. *G - ацикличен, а $|E| = |V| - 1$*

2 Эквивалентные определения дерева. Планарные графы

Докажем утверждение (1) из предыдущей лекции. Необходимо провести следующую цепочку импликаций:

$$1 \implies 2 \implies 3 \implies 4 \implies 1$$

1. Наше предположение: G - ацикличный, связный граф. Так как граф - связный, то всегда существует простая цепь между любыми двумя вершинами. Предположим, что существует две простые цепи из одной вершины в другую. Очевидно, тогда в графе есть цикл, что противоречит исходному условию.

2. Дан граф G, в котором есть ровно 1 простая цепь между двумя любыми вершинами. Очевидно, что тогда граф связен. Утверждение о количестве рёбер докажем индукцией по числу вершин.

   База индукции очевидна. При $n = 1$ не может быть рёбер. Могли бы быть петли, но это простой граф. Предположим, что наше утверждение верно для $k \leq n$. Осталось доказать справедливость для $k > n + 1$.

   Рассмотрим граф G в котом ровно $n + 1$ вершина. Конечно, в G есть рёбра. Рассмотрим одно из этих рёбер. Удалим ребро (x, y) из G - получится граф G'. В нём две компоненты связности H_1, H_2. Пусть у H_1 ровно n_1 вершины. Совершенно точно знаем, что $n_1 < n$. (равно не может быть, потому что мы выкинули одно ребро и вместе с ним ушла также одна вершина). В H_1 между любыми двумя вершинами есть ровно одна простая цепь. Следовательно, у графа H_1 есть $n_1 - 1$ рёбер. Для H_2 аналогично.

   Мы знаем, что $n_1 + n_2 = n + 1$. А что с рёбрами?

   $$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n$$

   Шаг индукции выполнен.

3. G - связен, n - число вершин, $n - 1$ - число рёбер. Давайте предположим, что в графе G есть цикл. Обозначим k - количество вершин в цикле, конечно $k \leq n$. Вне цикла располагается $n - k$ вершин $v_1 v_2 \dots v_{n-k}$. Так как граф связный, следовательно, $\forall i \, v_i$ - соединена с циклом минимум одним маршрутом. Выберем для v_1 самый короткий маршрут до цикла, для v_2 и т.д аналогично. В каждом таком маршруте возьмём первые рёбра. Все эти рёбра, конечно, различны. У нас есть $n - k$ таких первых рёбер. Но тогда $n - 1 \geq n - k + k = n$, чего не может быть. Противоречие.

4. G - ацикличен, n - вершин, $n - 1$ ребро. Обозначим числом k количество компонент связности графа. Пусть $n_1, n_2, \dots, n_k$ - количества вершин в компонентах связности графа G.

   $$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

А $G_1, G_2, \dots, G_k$ - сами компоненты связности. Знаем, что $\forall i\, G_i$ - связен, ацикличен. Учитывая $1 \implies 3$ число рёбер в G_i равно $n_i - 1$. Тогда число рёбер в исходном графе G

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) = n_1 + n_2 + \dots + n_k - k$$

С другой стороны, мы знаем что количество рёбер в графе равно $n - 1$. Тогда

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k - k = n - 1$$
$$n - k = n - 1 \implies k = 1$$

2.1 Планарные графы

Определение 16 *Граф $G = (V, E)$ называется* ***планарным****, если можно так нарисовать его на плоскости, чтобы не было пересечений рёбер этого графа на картинке не по вершинам.*

Примером непланарных графов может послужить K_5, $K_{3,3}$.

Задача *Задача о раскраске карты: Каким наименьшим числом красок можно обойтись при раскраске карты, чтобы соседние государства на ней были разных цветов.*

Доказали, что наименьшим количеством цветов является число четыре.

Определение 17 *Два графа G_1, G_2 называются* ***гомеоморфными****, если $\exists$ граф H, такой что и G_1, и G_2 получаются из H путём добавления вершин на некоторых рёбрах.*

▷ C_5, C_7 - гомеоморфны.

Теорема ***(Критерий Куратовского, 1932)*** *Граф G - планарен тогда и только тогда, когда в нём нет подграфов гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.*

3 Некоторые сведения для программирования (I)

Определение 18 ***Взвешенный граф*** *это тройка $G = (V, E, F)$, где V, E - множества ребёр и вершин соответственно. А $F : E \mapsto \mathbb{R}$ - весовая функция, заданная на множестве рёбер.*

▷ Часто веса интерпретируются как длины рёбер, а длиной пути считается сумма весов, составляющих его рёбер.

Определение 19 *Граф называется* ***регулярным****, если степени всех его вершин одинаковы. Также граф называется полным, если степень каждой его вершины равна $n - 1$.*

Определение 20 *В ориентированном графе* ***полустепенью захода*** *вершины называется число рёбер, оканчивающихся в этой вершине, а* ***полустепенью исхода*** *- число рёбер, начинающихся в вершине.*

Определение 21 *Граф называется* ***двудольным****, если его вершины можно раскрасить в два цвета, так чтобы цвета любых двух соседних вершин были различны.*

3.1 Способы представления графа

1. Списки смежности. В этом случае каждой вершине x сопоставляется список смежности, включающий вершины, соединенные с x ребром.

   Списки смежности удобно хранить в массиве векторов, который объявлен следующим образом:

   ```
   std::vector<int> adj[N];
   ```

   Неориентированные графы можно хранить аналогично, только каждое ребро нужно учитывать в двух списках смежности.

   Для взвешенных графов структуру следует дополнить:

   ```
   std::vector<pair<int,int>> adj[N];
   ```

2. **Матрица смежности** показывает, какие рёбра есть в графе. С ее помощью можно эффективно проверить, существует ли ребро между двумя вершинами. Матрицу можно хранит в виде массива (матрицы).

   ```
   int adj[N][N];
   ```

   A - матрица размером $n \times n$, где $A_{ij} = 1 \Leftrightarrow \exists\,(i, j) \in E$, иначе $A_{ij} = 0$.

   Пример:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. **Список рёбер** содержит все рёбра графа в некотором порядке. Это представление удобно, если алгоритм обрабатывает все ребра и не требует находить ребра, начинающиеся в заданной вершине.

   Список ребер можно хранить в векторе:

   ```
   std::vector<pair<int,int>> edges;
   ```

   Где наличие пары (x, y) значит, что $(x, y) \in E$.

   Для взвешенного:

   ```
   std::vector<tuple<int,int,int>> edges;
   ```

4 Формула Эйлера

Определение 22 *Планарный граф назовём* ***плоским****, если он изображён на плоскости без пересечения рёбер не по вершинам.*

Обозначим v - число вершин, e - число рёбер, $\mathfrak{f}$ - число "граней"графа.

Теорема *(Эйлер) Пусть G - связен. Тогда*

$$v - e + \mathfrak{f} = 2$$

Доказательство. Поскольку граф G - связен, то $e \geq v-1$, причём если $e = v-1 \implies G$ - дерево. Если $e = v - 1 \implies \mathfrak{f} = 1$. Тогда

$$v - e + \mathfrak{f} = v - (v - 1) + 1 = 2$$

Имеем базу индукции по числу рёбер e. Предположим, что для всех $e \leq k - 1$, еще знаем что $k \geq v - 1$ утверждение доказано.

Шаг индукции: рассмотрим произвольное $v, e = k+1, \mathfrak{f}$ и любой плоский граф G с этими характеристиками. Поскольку $k + 1 \geq v \implies e \geq v$. Значит в нашем графе есть хотя бы один цикл. Значит, есть грани, которые ограничены. Возьмём любую циклическую грань. Удалим из цикла одно ребро.

$$G = (v, e, \mathfrak{f}) \mapsto G' = (v, e - 1, \mathfrak{f} - 1)$$

$$v - (e - 1) + \mathfrak{f} - 1 = 2 \Leftrightarrow v - e + \mathfrak{f} = 2$$

Теорема *(Следствие) Если $v \geq 3 \implies e \geq 3v - 6$*

Доказательство

Пусть размер грани - количество рёбер в её границе плюс удвоенное количество внутренних рёбер.

Рассмотрим произвольную грань. Если её размер не превосходит 2, то это - бесконечная грань (не ограничена циклом). Ясно, что и внутренних рёбер в этой грани не больше одного. Следовательно, весь граф - одно ребро. Но это противоречит условию. Значит размер каждой грани не меньше трёх. Найдем сумму размеров всех граней.
С одной стороны, получается $2e$. С другой стороны, не меньше чем $3\mathfrak{f}$

$$2e \geq 3\mathfrak{f}$$

Подставляя в формулу Эйлера, получаем искомое.

Теорема *(Следствие следствия) K_5 не планарен. Если бы она был планарен, значит $v \geq 3 \implies e \leq 3v - 6$, но $10 \geq 3 \cdot 5 - 6$, что неверно. Значит K_5 не планарен.*

Определение 23 ***Хроматическим числом*** *графа называется минимальное количество цветов, в которые можно покрасить граф так, чтобы любые две соседние вершины были разных цветов.*

$$\chi(G) = \min\{\chi \ : \ V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \cdots \sqcup V_\chi \ : \ \forall i \quad \forall x, y \ \in V_i \ (x, y) \notin E\}$$

Проблема *Хроматическое число любого плоского графа* ≤ 4

Мы же докажем более слабое утверждение.

Теорема *Хроматическое число любого плоского графа* ≤ 6

Доказательство

Если $v \geq 3 \implies e \leq 3v - 6$
Докажем, что отсюда следует, что при ≥ 3 есть вершина степени ≤ 5. Допустим степень каждой вершины ≥ 6. Тогда

$$\sum_{\omega \in V} \deg \omega \geq 6 \cdot v = 2e$$

Но мы знаем, что

$$e \leq 3v - 6$$

Подставляя в первое выражение, получим противоречие.
Мы доказали, что при данных условиях есть вершины со степенью не большей 5. Теперь докажем теорему индукцией по v.

База индукции. Очевидно, что граф с $v \leq 6$ красится в 6 цветов нужным нам образом. Предположим, что любой плоский граф на $v \leq k$ красится в 6 цветов.

Шаг индукции. Берём произвольный граф на $k + 1$ вершине. Рассмотрим вершину ω этого графа, такую что $\deg \omega \leq 5$. Рассмотрим G' в котором она находится. В нём k вершин и к нему применимо предположение индукции. Следовательно,

$$\chi(G') \leq 6$$

Но концов, исходящих из ω - 5, а цветов - 6. Значит есть цвет, в который не покрашен ни один из двух концов рёбер, выходящих из ω. Покрасим ω в этот цвет. Получим, что весь граф покрашен в 6 цветов, и G' также верно покрашен.
Следовательно,

$$\chi(G) \leq 6$$