Листок 3. Разнобой III

Задача 3.1. Пусть $f(y) = \dfrac{1+y}{3+y^2}$. Построить графики функций

$$M(x) = \sup_{x<y<\infty} f(y), \quad m(x) = \inf_{x<y<\infty} f(y)$$

Задача 3.2. Доказать, что определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & * & 0 & * & 0 & \dots & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & \dots & 0 & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & * & 0 & * & 0 & \dots & * & 0 \end{vmatrix}$$

равен нулю. Звездочками обозначены произвольные числа.

Задача 3.3. Построить функцию, определенную при всех значениях $x \in \mathbb{R}$, разрывную всюду, кроме точек $x = 1$ и $x = -1$, и непрерывную в этих точках.

Задача 3.4. Два парохода идут по морю с постоянными скоростями по фиксированным прямолинейным направлениям. В 9 ч расстояние между ними было равно 20 км, в 9 ч 35 мин - 15 км, а в 9 ч 55 мин - 13 км. В какой момент времени расстояние между пароходами будет минимально и каково это расстояние?

Задача 3.5. Можно ли утверждать, что, если $f(x)$ дифференцируема, то графики функций $f(x)$ и $f(x)\sin ax$ касаются друг друга в общих точках?

Задача 3.6. Найти решение уравнения $(y^{'}+1)^3 = 27\cdot(x+y)^2$, удовлетворяющее условиям $y(-1) = 0, y(3) = 5$.

Задача 3.7. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на (a, b), а $x_1, x_2, ..., x_n$ - произвольные точки из (a, b). Доказать, что существует $x_0 \in (a, b)$ такое, что

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

Задача 3.8. Найдите многочлен $f(x)$ наибольшей степени такой, что для подходящих многочленов $g(x)$, $h(x)$ с вещественными коэффициентами имеем

$$x^{1992} - 1 = f(x)\cdot g(x), \quad x^{1995} - 1 = f(x)\cdot h(x)$$

Задача 3.9. Найти расстояние между двумя точками на плоскости, если известны их полярные координаты: $M_1(\rho_1, \varphi_1), M_2(\rho_2, \varphi_2)$.

Задача 3.10. Город построен на островах, некоторые из которых соединены мостами. Мост между двумя островами максимум один, по мосту можно ехать только в одну сторону, но с любого острова на любой другой можно попасть не более, чем по двум мостам. Один мост закрыли на ремонт, но с каждого острова всё ещё можно добраться на каждый. Докажите, что для любой пары островов попасть с одного на другой можно не более, чем по трём мостам.

Задача 3.11. При $x > 0$ докажите справедливость неравенства

$$(e^x - 1) \cdot \ln(1 + x) > x^2$$

Задача 3.12. Даны два уравнения:

$$x^6 + mx^3 + n = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 7x - 10^{2017} = 0$$

Известно, что оба корня второго уравнения являются также корнями первого. В поле ответа укажите последние три цифры в десятичной записи числа m. Если m не целое, то укажите три цифры перед запятой.

Задача 3.13. Доказать, что если A и B — квадратные матрицы одина- кового порядка, то собственные значения AB и BA совпадают.

Задача 3.14. Доказать что неравенство

$$\alpha\left(\vec{a}, \vec{a}\right) + \beta\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \gamma\left(\vec{b}, \vec{b}\right) \geq 0$$

имеет место для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad 4\alpha\gamma \geq \beta^2$$

Задача 3.15. Пусть $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$ - собственные значения матрицы A размера 2×2. Доказать, что A^4 приводится к диагональному виду.

Задача 3.16. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ - параллелепипед. Найти длину отрезка AC, если $|AB| = 13\,, |AD| = 5\,, |AA'| = 3\,, |DA'| = \sqrt{6}\,, |BA'| = \sqrt{126}\,, |BD| = 2 \cdot \sqrt{129}$

Задача 3.17. Найти хотя бы одно однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными и целыми коэффициентами, решением которого являлась бы функция

$$y = e^{(1+\sqrt[3]{2})x}$$