Теория функций комплексного переменного

Конспект лекций. Автор: Темплин К.Э (qnbhd)

Содержание

1 Основные сведения о комплексных числах

1.1 Введение

Определение. ***Комплексным числом*** *назовем пару* $(x, y) \in \mathbb{R}$, *и обозначим как* $z = x + iy$.

Определение. ***Мнимой единицей*** *назовем такое число* i, *что* $i^2 = -1$.

Определение. ***Действительной частью*** *комплексного числа* $z = x + iy$ *назовем* x *и обозначим как* $\Re(z) = x$

Определение. ***Мнимой частью*** *комплексного числа* $z = x + iy$ *назовем* y *и обозначим как* $\Im(z) = y$

Определение. *Суммой двух комплексных чисел назовем такую бинарную операцию, что*

$$+ \ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$+ \ : (z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2) \longrightarrow x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

Определение. *Произведением двух комплексных чисел назовем такую бинарную операцию, что*

$$\cdot \ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$$

$$\cdot \ : (z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2) \longrightarrow x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Определение. ***Модулем*** *комплексного числа назовём* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Определение. ***Сопряженным числом*** *назовём* $z* = x - iy$

▷ Основным свойством сопряженного числа является то, что при умножении z на z^* получаем действительное число. $z^*z = |z|^2$

Предположим, что нам необходимо решить уравнение $zz_1 = z_2$. Домножим обе части на z^*. Тогда

$$zz_1z_1^* = z_2z_1^*$$

Отсюда

$$z = \frac{z_2z_1^*}{|z_1|^2}$$

Такую операцию называют делением комплексных чисел.

Пример. *Поделим два числа* $z_1 = 2 - 5i$ *и* $z_2 = -3 + 4i$

$$\frac{2-5i}{-3+4i} = \frac{(2-5i)(-3-4i)}{25} = \frac{7i-26}{25}$$

1.2 Геометрическая интерпретация

Комплексные числа изображаются на плоскости $(\Re\{z\}, \Im\{z\})$ как радиус-векторы из начала координат. Соотвественно, сложением комплексных чисел соответствует сложению векторов.

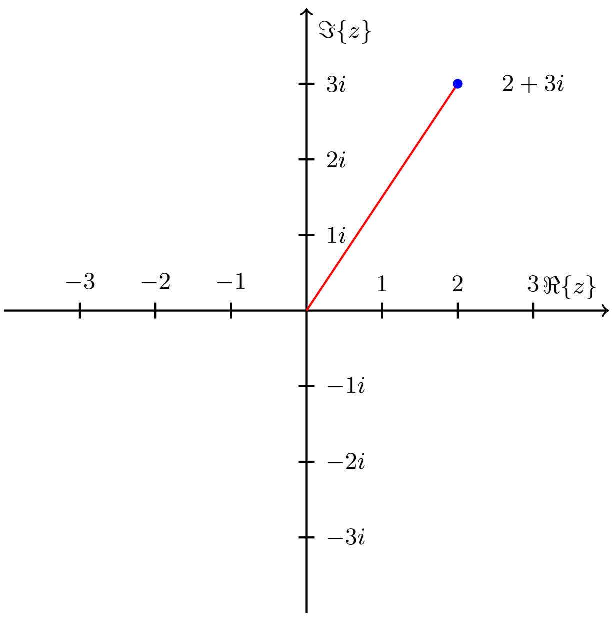

Рис. 1: Изображено комплексное число $\boldsymbol{2{+}3i}$

Также комплексные числа записываются в **тригонометрической форме** (переход к полярной системе координат)

1.3 Тригонометрическая форма

Обозначим φ как угол между вектором и положительным направлением $\Re\{z\}$, а r - длиной вектора.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{1}$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Определение. ***Аргументом*** *комплексного числа назовем φ.*

$$\arg z = \varphi \in (-\pi;\pi)$$

Теорема. ***(Формула Муавра)*** *гласит, что:*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Следствие.

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Следствие.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$
$$k = 0,\dots,n-1$$

- ▷ Отсюда следует, что корней из комплексного числа степени n имеется всего n штук.
- ▷ Эти корни на комплексной области образуют правильный n-угольник.
  Также вспомним основную теорему алгебры.

Определение. ***(Основная теорема алгебры)*** *Всякий многочлен, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.*

Следствие. *Любой многочлен $p(z) = a_n z_n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ степени $n > 1, a_n \neq 0$ представим в виде:*

$$p(z) = a_n \prod_{i=0\ k1+\dots+k_s=n}^{s} (z-z_i)^{k_i}$$

1.4 Экспоненциальная форма

1.4.1 Тождество Эйлера

Рассмотрим такой объект, как мнимая экспонента:

$$f(\theta) = e^{i\theta}$$

Этот объект проще всего понимать, как сумму ряда Тейлора. Данный ряд сходится очень быстро. (по признаку Даламбера)

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$f(x) = 1 + \underset{f'}{i\theta} + \underset{f''}{\frac{i^2\theta^2}{2!}} + \underset{f'''}{\frac{i^3\theta^3}{3!}} + \dots$$

Коэффициенты этого ряда обладают некоторой периодичностью. (Из-за того, что $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, \dots$). Похожей периодичностью обладают функции синуса, косинуса. Сгруппируем действительные и мнимые члены ряда:

$$f(\theta) = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right)$$

Можно заметить что первая скобка соответствует $\cos z$, а вторая $i \sin z$. Остюда получим, что

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

В частности, при $\varphi = \pi$

$$e^{i\pi} = -1$$

Это называется **тождеством Эйлера**.

1.4.2 Запись числа

Из тождества Эйлера следует, что любое комплексное число можно представить в виде:

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Легко определяются операции сложения и умножения комплексных чисел:

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Также из тождества Эйлера следуют формулы:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

2 Множества точек комплексной плоскости

1. **Прямая** задается уравнением $Ax + By + C = 0$

$$z = x + iy,\ \bar{z} = x - iy$$

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2},\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Подставляя в уравнение окружности, получаем уравнение прямой в комплексной форме:

$$\bar{M}z + M\bar{z} + C = 0$$

Где $M = \frac{A}{2} + i\frac{B}{2}$

2. **Окружность** задается уравнением $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + F = 0$ В комплексной форме задаётся как:

$$Az\bar{z} + \bar{M}z + M\bar{z} + F = 0$$

Где $M = \frac{B}{2} + i\frac{C}{2}$