# Линейная алгебра

Краткие заметки. Автор: Темплин К.Э

# Содержание

# 1 Векторное пространство

Линейное пространство является группой по сложению. Про умножение вектора на число можно сказать, что:

- $\forall l \in L$ можно умножить на любое число $a$. И также получится вектор из линейного пространства $\mathcal{L}$. То есть умножение:

$$\cdot\ :\ \mathbb{C} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$$

- $1 \cdot l = l,\ l \in \mathcal{L}$
- Умножение должно быть ассоциативным
- Свойство дистрибутивности

**Определение.** ***Линейным пространством*** *называется множество векторов, являющееся группой по сложению и такое, что умножение обладается свойствами ассоциативности, дистрибутивности. Также при умножении вектора на единицу вектор получается тот же вектор.*

## 1.1 Линейное подпространство

**Определение.** *Пусть некоторое множество $\mathcal{M}$ является подмножеством некоторого линейного пространства $\mathcal{L}$ также является линейным пространством. Тогда $\mathcal{M}$ называют линейным подпространством $\mathcal{L}$.*

Чтобы подмножество $\mathcal{M}$ было линейным подпространством необходимо и достаточно, чтобы операции умножения и сложения для всех элементов $\mathcal{M}$ переводили их в элементы $\mathcal{M}$.

# 2 Линейное отображение

**Определение.** *Отображение $f: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ называется* ***линейным****, если выполнены следующие свойства:*

- $f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2)$
- $\forall l \in \mathcal{L},\ \beta \in \mathbb{C}\ f(\beta l) = \beta f(l)$

Пример: линейное пространство $\mathcal{L}$ - множество функций, определённых на некотором множестве $\mathbb{R}$. Линейная функция - значение в точке $x_0$. Действительно,

- $(f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$
- $(\beta f)(x_0) = \beta f(x_0)$

# 3 Базис линейного пространства. Размерность

**Определение.** ***Базисом*** *называется такой набор векторов, что любой вектор линейного пространства $\mathcal{L}$ однозначным образом выражается через данный набор векторов.*

**Определение.** *Пространство называется* ***конечномерным****, если оно состоит нулевого вектора (нульмерное) или если у него есть базис из конечного числа векторов. В ином случае пространство будем называть* ***бесконечномерным****.*

**Определение.** *Размерностью базиса называется количество векторов в наборе.*

**Определение.** ***Линейной комбинацией*** *векторов $l_1, \ldots, l_n$ называется:*

$$C_1 l_1 + C_2 l_2 + \cdots + C_n l_n$$

*где $C_i \in \mathbb{C}$*

**Определение.** *Линейная комбинация векторов $l_1, \ldots, l_n$ называется* ***линейно зависимой****, тогда и только тогда, когда существует такой нетривиальный набор $C_1, ..., C_n$, что*

$$C_1 l_1 + C_2 l_2 + \cdots + C_n l_n = 0$$

*и* ***линейно независимой*** *в обратном случае.*

**Определение.** *Набор векторов является базисом, когда его линейная комбинация является линейно независимой.*

**Определение.** ***Размерность пространства*** *– это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов. Обозначается, как* $\dim \mathcal{L}$

**Теорема.** *В одном и том же конечномерном линейном пространстве базисы имеют одну и ту же размерность.*

*Доказательство.* Пусть $m_1, \dots, m_n$ и $l_1, \dots, l_k$ - два базиса линейного пространства $\mathcal{L}$ и $k > n$. Рассмотрим нулевой вектор, его можно разложить по второму базису:

$$0 = \lambda_1 l_1 + \dots + \lambda_k l_k$$

каждый вектор из этого базиса разложим по базису $m_1, \dots, m_n$ Получится система из $k$ уравнений с $n$ неизвестными, но эта система всегда имеет нетривиальное решение, т.к $l > n$. Значит мы смогли найти такой набор $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, чтобы линейная система равнялась нулевому вектору. Значит система является линейно зависимой и базисом не является. □

**Определение.** ***Линейной оболочкой****, натянутой на набор векторов называется множество всех линейных комбинаций данного набора.*

▷ Конечномерное пространство является линейной оболочкой своего любого базиса.

**Определение.** ***(Теорема о продолжении базиса)*** *Если набор линейно независимых векторов* $l_1, \dots, l_n$ *входит в больший набор векторов* $l_1, \dots, l_n, l_{n+1}, l_k$*, то набор векторов* $l_1, \dots, l_k$ *можно дополнить некоторыми векторами из* $l_{n+1}, \dots, l_k$ *так, что новый набор будет линейно независим, а линейные оболочки дополненного набора и большого набора будет совпадать.*

**Теорема.** ***(Монотонность размерности)*** *Пусть* $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ *- линейное подпространство пространства* $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{L} \neq \mathcal{M}$*. Тогда* $\dim \mathcal{L} < \dim \mathcal{M}$

*Доказательство.* Пусть $n = \dim \mathcal{L},\ k = \dim \mathcal{M}$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ - базис пространства $\mathcal{L}$, а $h_1, \dots, h_k$ - базис пространства $\mathcal{M}$. Рассмотри набор векторов $\{e_1, \dots, e_n, h_1, \dots, h_k\}$.

Линейная оболочка этого набора совпадает с пространством $\mathcal{M}$. По предыдушему утверждению из $h_1, \dots, h_k$ можно выбрать, скажем, $r < k$ векторо так, чтобы система $\{e_1, \dots, e_n, h_1, \dots, h_r\}$ являлась линейно независимой.

Значит, набор $\{e_1, \dots, e_n, h_1, \dots, h_r\}$ является базисом пространства $\mathcal{M}$. Если бы не потребовалось добавлять ни одного вектора из $h_i$, тогда бы это значило, что $\mathcal{L} = \mathcal{M}$, но это не так по условию, значит $\dim \mathcal{L} < \dim \mathcal{M}$ □

# 4 Системы линейных уравнений

Нам дана система линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n} = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn} = b_m \end{cases}$$

**Теорема.** ***Метод Гаусса****: составим матрицу данной системы:*

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Далее её приводим к треугольному виду. Так чтобы слева относительно диагонали образовались нули. Потом обратным ходом выражаем все переменные.

# 5 Факты о ядре и образе линейного отображения, преобразования координат

**Определение.** ***Ядром*** *линейного отображения* $f: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ *называется множество векторов пространства* $\mathcal{L}$*, переходящих в 0 при отображении* $f$*. Обозначается как* $\ker f$*. То есть* $\forall l \in \ker f: \ f(l) = 0$

**Теорема.** $\ker f$ *является линейным подпространством* $\mathcal{L}$*.*

*Доказательство.* Необходимо доказать, что если $l_1, l_2 \in \ker f$, то

- $l_1 + l_2 \in \ker f$
- $\lambda l_1 \in \ker f, \ \lambda \in \mathbb{C}$

Так как $l_1, l_2 \in \ker f \implies$

$$f(l_1) = f(l_2) = 0$$

Так как $f$ - линейное, значит:

$$f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2) = 0 \implies l_1 + l_2 \in \ker f$$

$$f(\lambda l_1) = \lambda f(l_1) = 0 \implies \lambda l_1 \in \ker f$$

А это значит, что $\ker f$ - линейное подпространство $\mathcal{L}$. $\square$

**Определение.** ***Образом*** *линейного отображения называется такое подмножество векторов линейного пространства $\mathcal{M}$, в которые переходят какие-то векторы из $\mathcal{L}$. Обозначается как $\operatorname{Im} f$. То есть $l \in \operatorname{Im} f$, если $\exists m \in \mathcal{L} : \ f(m) = l$*

**Теорема.** ***Теорема о ядре и образе*** *Пусть $\mathcal{L}$ - конечномерное линейное пространство, а $f : \ \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ - линейное отображение. Тогда:*

$$\dim \mathcal{L} = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$$