

Листок 2. Разнобой II

Задача 2.1. (88) Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной A руб., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости (коэффициент пропорциональности равен k). При какой постоянной скорости V плавание судна будет наиболее экономичным?

Задача 2.2. (89) Решить уравнение $X^{1989} = X$, где $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$

Задача 2.3. 90 Пусть m — число цифр в десятичной записи числа 2^{1989} , n — число цифр в десятичной записи числа 5^{1989} . Найти $n + m$.

Задача 2.4. (92) Докажите, что $x + y + z = 1$ влечет $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$

Задача 2.5. (93) Доказать, что медианы CM и AP треугольника ABC могут быть перпендикулярны лишь в случае, если $\cos \angle B \geq \frac{4}{5}$

Задача 2.6. (94) Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b) = 0$. Доказать, что существует $c \in (a, b)$ такое, что

$$f'(c) + f(c) = 0$$

Задача 2.7. (94) Функция $f(x)$ непрерывна и для всех x удовлетворяет равенству

$$\alpha f(x) + \beta f(-x) = \gamma$$

α, β, γ — некоторые числа, отличные от нуля. Вычислить интеграл от $f(x)$ по отрезку $[-c, c]$.

Задача 2.8. (C92) Пусть функция $f(x)$ разложена в тригонометрический ряд Фурье. Найдите сумму этого ряда в точке $x = 0$, если $f(x) = x + |x|$.

Задача 2.9. (C93) Бесконечный в обоих направлениях ряд

$$\dots + f''(x) + f'(x) + f(x) + \int_0^x f(t) dt + \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} f(t) dt + \dots$$

равномерно сходится к функции $g(x)$, причем $g(0) = 1993$. Найдите $g(x)$.

Задача 2.10. (C93) Пусть λ_i , $i = 1, 1993$ — все комплексные корни многочлена

$$\lambda^{1993} + 2\lambda^{1992} + 3\lambda^{1991} + \dots + 1993\lambda + 1994 = 0$$

с учётом их кратности. Найти $\sum_{i=1}^{1993} \lambda_i^k$, $k \leq 1993$