Листок VI. Дискретная математика

qnbhd

Апрель 2020

Задача 1. Сколько раз цифра 4 встречается среди первых 239 цифр десятичной записи дроби $\frac{2012}{239}$?

Задача 2. В группе учится 9 человек. Сколькими способами они могут разбиться на команды по трое?

Задача 3. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник 2×5 Сколько есть способов раскрасить клетки этого прямоугольника в синий, красный, чёрный и зелёный цвета, чтобы никакие 2 клетки, имеющие общую сторону, не были покрашены в один цвет?

Задача 4. Докажите, что у любого конечного множества количество подмножеств чётного размера равно количеству подмножеств нечётного размера.

Задача 5. В графе с $2n$ вершинами n^2+1 ребро. Докажите, что в нем есть треугольник (три вершины, попарно соединённые ребрами).

Задача 6. Вычислите $\lfloor \sqrt[2]{2039} \rfloor$

Задача 7. Найдите сумму всех 4-значных чисел, которые можно составить из цифр $1, 2, 4, 5$, используя хотя бы две различные цифры.

Задача 8. Из 11 девушек и 10 юношей выбирается команда, состоящая из шести человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы количество мальчиков и девочек в команде было различным?

Задача 9. Внутри правильного восьмиугольника отметили 100 точек. Точки и вершины восьмиугольника соединили непересекающимися отрезками так, что восьмиугольник разбился на треугольники и четырёхугольники. Какое максимальное количество треугольников могло получиться, если четырёхугольников всего 10?

Задача 10. Докажите, что $n!$ не делится на $2n$ для целого $n > 0$.

Задача 11. Дано множество чисел $S \subseteq \{1, 2, ..., 2n\}$, $|S| = n + 1$ Докажите, что в S найдутся два числа, наибольший общий делитель которых равен 1

Задача 12. Пусть $f(n)$ — это максимальное число рёбер в неориентированном графе на n вершинах, в котором нет циклов длины 4 Предложите нижнюю и верхнюю оценки на $f(n)$ (т.е. такие $g(n)$ и $h(n)$, что $g(n) \leq f(n) \leq h(n)$). Докажите, что эти оценки верны.

Задача 13. Целые числа от 1 до 5400 записали в новом порядке: сперва все кратные 2 по возрастанию, затем все изоставшихся кратные 3 по возрастанию, затем — оставшиеся кратные 5, потом — кратные 7 и т.д. На каком месте теперь стоит число 1001?

Задача 14. Докажите, что для любого натурального $n \leq 1$ число $1986^n 1$ не делится на число $1000^n 1$.

Задача 15. Докажите, что квадратную доску размером $2^n \times 2^n$ клеток, из которой вырезана одна клетка, можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.

Задача 16. У каждого депутата не более 3 врагов. Докажите, что можно разделить депутатов на две палаты так, что у каждого депутата в своей палате не больше одного врага (если А — враг для В, то и В — враг для).

Задача 17. Сколько целых чисел от 0 до 65500, которые в шестнадцатеричной системе счисления записываются буквами? (В шестнадцатеричной системе счисления числа записываются цифрами $0 \ldots 9$ и латинскими буквами $A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15$ Например, число 2014 в шестнадцатеричной системе счисления записывается как 7DE, т.е. $2014 = 716^2 + 13 \cdot 16 + 14$)

Задача 18. Сколько целочисленных решений системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases} \tag{1}$$

лежит в кубе $10 \times 10 \times 10$ с центром в начале координат и сторонами, параллельными осям координат?

Задача 19. Внутри правильного восьмиугольника отметили несколько точек и соединили их 102 отрезками так, что восьмиугольник разбился на четырёхугольники (потенциально невыпуклые). Какое максимальное количество четырёхугольников могло получиться?

Задача 20. Докажите, что $2^n - 1$ не делится на n для целого $n > 1$.

Задача 21. Плоскость покрашена в три цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1

Задача 22. Преобразуйте число $0x2F86457$ из шестнадцатиричной системы счисления в десятичную.

Задача 23. Очередь из 12 человек стоит за спичками. Один коробок спичек стоит 50 копеек. Ушести человек есть 50 копеек, а у остальных—только рубль. У продавца изначально нет денег. Сколькими способами можно расставить людей в очереди, чтобы все могли получить сдачу?

Задача 24. Билет в музей стоит 50 рублей для взрослых и 40 рублей для студентов. За день было продано n билетов общей стоимостью 4240 рублей. Сколько возможных значений n существует?

Задача 25. Рассмотримправильный 12-угольник с вершинами, пронумерованнымиот 1 до 12 Будем случайным образом проводить в нём диагонали. Какое минимально количество диагоналей, которые надо провести, чтобы с вероятностью 1 после удаления сторон исходного многоугольника осталась связная конструкция?

Задача 26. Кактусом называется простой связный граф, в котором любые два цикла имеют не больше одной общей вершины. Пример кактус-графа на рисунке ниже. Докажите, что максимальное число ребер в кактусе с n вершинами равно

$$\lfloor \frac{3}{2}(n-1) \rfloor$$

Задача 27. За городом открылся кемпинг. Он представляет из себя лесную территорию в форме круга радиусом 250 метров. Отдыхающие приезжают со своими палатками, а кемпинг предоставляет столы. Столы стоят на одной ножке и могут находиться на расстоянии не менее 10 метров друг от друга. Докажите, что в кемпинге можно разместить не более 2601 стола.

Задача 28. Какое максимальное число плиток размером $1 \times 2 \times 2$ можно положить в коробку $3 \times 3 \times 3$?

Задача 29. При любом натуральном n найдите наибольший общий делитель чисел: $6n^6 + 10n^5 + 4n^3 + n$ и $3n^3 + 5n^2 + 2$.

Задача 30. На концерте каждую песню исполняли двое артистов, и никакая пара не выступала вместе более одного раза. Всего было исполнено 30 песен, и каждый артист выступил по 5 раз. Сколько артистов выступало?

Задача 31. В классе 7 девочек и 11 мальчиков. Сколько способов рассадить их в кабинете за 12 двухместных парт так, чтобы любая девочка обязательно сидела за одной партой с мальчиком? (Мальчики могут сидеть по двое или по одному, но на определенном месте за партой)

Задача 32. Разложите на простые множители $3^20 + 3^4 + 1$, если известно, что оно делится на 167.

Задача 33. В какой системе счисления 792 делится на 297?

Задача 34. Сколькими способами можно выбрать из чисел $1, 2, 3, 4, \ldots, 50$ не менее четы- рёх чисел так, чтобы среди выбранных было одинаковое число четных и нечетных?

Задача 35. Найдите три последние цифры числа 7^{1217}

Задача 36. В связном графе вершина v имеет степень 80, девяносто вершин имеют степень 24, остальные вершины имеют степень 36 Доказать, что существует 40 рёбер, инцидентных v, удаление которых оставляет граф связным.

Задача 37. Докажите, что число $a^{a^n}+1$ является произведением не меньше, чем $2n+b$ простых чисел (необязательно различных), где n — натуральное число. При решении задачи, считайте, что a = 3, b = 1.

Задача 38. Докажите, что

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$$