Листок V. Математический анализ

qnbhd

Апрель 2020

▷ Большинство задач взяты из вступительных испытаний в CSC.

Задача 1. Последовательность чисел x_n задана следующим образом:

$$x_1 = 20,12 \quad x_{n+1} = -|x_n + 1|$$

Найдите x_{2012}.

Задача 2. Вычислите сумму для $n = 2390$:

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) + \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{n}{n-i+1}\right), \text{ где } f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

Задача 3. На доске выписали подряд числа 2^{2015} и 5^{2015} Сколько цифр написано на доске?

Задача 4. Вычислите

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\, dx$$

Задача 5. Вычислите

$$\sqrt{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}$$

Задача 6. Числа $x, y \in \mathbb{Z}$, они удовлетворяют условиям:

$$x + y < 5 \quad x > 3$$

Найти $\min(x-y)$

Задача 7. При $x > 0$ докажите неравенство

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$$

Задача 8. Вычислите

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

Задача 9. Дана ограниченная последовательность x_n, удовлетворяющая условию $x_{n+2} \le \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$. Докажите, что последовательность $y_n = \max\{x_n, x_{n+1}\}$ имеет предел.

Задача 10. В последовательности положительных чисел $a_0, a_1, \dots$ каждый из членов a_n $(n \in \mathbb{N})$ равен либо $\frac{a_{n-1}}{2}$ либо $\sqrt{a_{n-1}}$. Может ли эта последовательность иметь предел, принадлежащий интервалу $(0,1)$?

Задача 11. Найти предел последовательности:

$$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \dots, x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{\text{n раз}}$$

Задача 12. Используя критерий Коши доказать сходимость последовательности:

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}$$

Задача 13. Найти предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}}$$

Задача 14. Найти предел:

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$$

Задача 15. Периметр равнобедренного треугольника равен 2π . Каковы должны быть его стороны, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

Задача 16. Докажите, что

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$$