再帰的余代数いろいろ

原 将己

2017 年 10 月 15 日

1　代数と余代数

以下、 $\mathbf{C}$ は圏とし、$F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ は自己関手とする。

定義 1.1 (代数、余代数)**.** C の対象と射の組 (A, α) であって $\alpha\colon FA \to A$ となるものを F-**代数** *(F-algebra)* と呼ぶ。

C の対象と射の組 (A, α) であって $\alpha\colon A \to FA$ となるものを F-**余代数** *(F-coalgebra)* と呼ぶ。

F-代数 (A, α) から (B, β) への準同型とは、 $h\colon A \to B$ であって $\beta \circ Fh = h \circ \alpha$ となるもののことである。F-代数とその準同型のなす圏を $\mathrm{Alg}(F)$ と書く。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "h"'] & FA \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "Fh"] \\ B & FB \arrow[l, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

F-余代数 (A, α) から (B, β) への準同型とは、 $h\colon A \to B$ であって $\beta \circ h = Fh \circ \alpha$ となるもののことである。F-余代数とその準同型のなす圏を $\mathrm{Coalg}(F)$ と書く。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "h"'] & FA \arrow[d, "Fh"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & FB \end{tikzcd}$$

定義 1.2 (余代数-代数準同型)**.** F-余代数 (A, α) から F-代数 (B, β) への**余代数-代数準同型** *(coalgebra-to-algebra homomorphism)* とは、 $h\colon A \to B$ であって、 $\beta \circ Fh \circ \alpha = h$ となるもののことである。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "h"'] & FA \arrow[d, "Fh"] \\ B & FB \arrow[l, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

定義 1.3 (始代数と終余代数)**.** $\mathrm{Alg}(F)$ の始対象を**始代数** *(initial algera)* という。$\mathrm{Coalg}(F)$ の終対象を**終余代数**

(terminal coalgebra, final coalgebra) という。

定義より、始代数と終余代数は (存在するならば) 同型を除いて一意である。

定義 1.4 (再帰的余代数と余再帰的代数)**.** [2], [1]

余代数であって、任意の代数への準同型が一意に存在するものを**再帰的 F-余代数** *(recursive F-coalgebra)* という。本資料では再帰的余代数からなる Coalg(F) の充満部分圏を RCA(F) と表記する。

代数であって、任意の余代数からの準同型が一意に存在するものを**余再帰的 F-代数** *(corecursive F-algebra)* という。本資料では余再帰的代数からなる Alg(F) の充満部分圏を CRA(F) と表記する。

注意 1.5. 再帰的余代数と始代数の普遍性は良く似ている。実際、 α が可逆のとき、この 2 つの定義は (α の向きを互いに逆にすることで) 同値になる。

同様に、余再帰的代数と終余代数の定義も、 α が可逆のときに同値になる。

2 Lambek の定理

定理 2.1 (Lambek)**.** 始代数 (A, α) の α は常に可逆である。双対的に、終余代数も可逆である。

Proof. 始代数について示す。 (A, α) を始代数とする。このとき $(FA, F\alpha)$ も代数だから、代数の準同型 ($h \colon A \to FA$ であって $F\alpha \circ Fh = h \circ \alpha$ となるもの) が存在する。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "h"] & FA \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "Fh"] \\
FA & FFA \arrow[l, "F\alpha"]
\end{tikzcd}$$

h も α も代数の準同型だから、 $\alpha \circ h$ は (A, α) の自己準同型である。一方、 id_A も (A, α) の自己準同型である。始代数からの準同型は一意だから、 $\alpha \circ h = \mathrm{id}_A$ である。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "h"] \arrow[dd, bend right=60, "\mathrm{id}_A"'] & FA \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "Fh"] \arrow[dd, bend left=60, "\mathrm{id}_{FA}"] \\
FA \arrow[d, "\alpha"] & FFA \arrow[l, "F\alpha"] \arrow[d, "F\alpha"] \\
A & FA \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

$\alpha \circ h = \mathrm{id}_A$ と h の準同型性により、 $h \circ \alpha = F\alpha \circ Fh = F\,\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{FA}$ である。

したがって、 h は α の逆射である。 □

系 2.2. 始代数 (の逆射) は再帰的余代数である。双対的に、終余代数 (の逆射) は余再帰的代数である。

定理 2.3. 始代数 (の逆射) は RCA(F) の終対象である。双対的に、終余代数 (の逆射) は CRA(F) の始対象である。

Proof. (A, α) を始代数とする。このとき (A, α^{-1}) が $\mathrm{RCA}(F)$ の終対象であることを示す。

$(B, \beta) \in \mathrm{RCA}(F)$ とする。 (B, β) から (A, α^{-1}) への代数準同型は、(B, β) から (A, α) への余代数-代数準同型に他ならない。したがって B の再帰性から、代数準同型は一意である。

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d, "h"] & FB \arrow[d, "Fh"] \\
A & FA \arrow[l, "\alpha", "\simeq"']
\end{tikzcd}
$$

□

3　逆 Lambek の定理

(逆 Lambek という名前は本資料に固有である。)

補題 3.1. (A, α) が再帰的余代数であるとき、 $(FA, F\alpha)$ も再帰的余代数である。双対的に、 (A, α) が余再帰的代数であるとき、 $(FA, F\alpha)$ も余再帰的代数である。

Proof. (A, α) を再帰的余代数とし、 (B, β) を代数とする。

A の再帰性より、 A から B への余代数-代数準同型 ($h \colon A \to B$ であって $\beta \circ Fh \circ \alpha = h$ となるもの) が一意に存在する。これを用いて $f = \beta \circ Fh$ と定義する。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "h"] & FA \arrow[d, "Fh"] \arrow[dl, "f"] \\
B & FB \arrow[l, "\beta"]
\end{tikzcd}
$$

この f は $\beta \circ Ff \circ F\alpha = \beta \circ F(\beta \circ Fh \circ \alpha) = \beta \circ Fh = f$ を満たす。したがって f は FA から B への余代数-代数準同型である。

$$
\begin{tikzcd}
 & FA \arrow[r, "F\alpha"'] \arrow[dl, "f"] \arrow[d, "Fh"] & FFA \arrow[dl, "Ff"] \arrow[d, "FFh"] \\
B & FB \arrow[l, "\beta"] & FFB \arrow[l, "F\beta"]
\end{tikzcd}
$$

逆に $f' \colon FA \to B$ が $\beta \circ F f' \circ F\alpha = f'$ を満たすとする。 $h' = f' \circ \alpha$ とおくと、$\beta \circ Fh' \circ \alpha = \beta \circ Ff' \circ F\alpha \circ \alpha = f' \circ \alpha = h'$ となるから、 h' は A から B への余代数-代数準同型である。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "h'"] & FA \arrow[r, "F\alpha"'] \arrow[dl, "f'"] \arrow[d, "Fh'"] & FFA \arrow[dl, "Ff'"] \\
B & FB \arrow[l, "\beta"] &
\end{tikzcd}
$$

A の再帰性から $h' = h$ となる。したがって、 $f' = \beta \circ Ff' \circ F\alpha = \beta \circ Fh' = \beta \circ Fh = f$ となる。

以上より FA から B への余代数-代数準同型は一意に存在する。したがって、$(FA, F\alpha)$ は再帰的余代数であ

る。 □

定理 3.2 (逆 Lambek)**.** RCA(F) の終対象は可逆である。双対的に、 CRA(F) の始対象は可逆である。

Proof. (A, α) を RCA(F) の終対象とする。$(FA, F\alpha)$ も再帰的余代数だから、 (A, α) の終性より、FA から A への余代数準同型 ($h\colon FA \to A$ であって $\alpha \circ h = Fh \circ F\alpha$ となるもの) が存在する。

$$
\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "F\alpha"'] \arrow[d, "h"] & FFA \arrow[d, "Fh"] \\
A \arrow[r, "\alpha"'] & FA
\end{tikzcd}
$$

h も α も余代数の準同型だから、 $h \circ \alpha$ は (A, α) の自己準同型である。一方、 id_A も (A, α) の自己準同型である。終再帰的余代数への準同型は一意だから、 $h \circ \alpha = \mathrm{id}_A$ である。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, bend right=60, "\mathrm{id}_A"'] & FA \arrow[d, "F\alpha"] \arrow[dd, bend left=60, "\mathrm{id}_{FA}"] \\
FA \arrow[r, "F\alpha"'] \arrow[d, "h"] & FFA \arrow[d, "Fh"] \\
A \arrow[r, "\alpha"'] & FA
\end{tikzcd}
$$

$h \circ \alpha = \mathrm{id}_A$ と h の準同型性により、 $\alpha \circ h = Fh \circ F\alpha = F\,\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{FA}$ である。

したがって、 h は α の逆射である。 □

系 3.3. RCA(F) の終対象 (の逆射) は始代数である。双対的に、CRA(F) の始対象 (の逆射) は終余代数である。

4 完備束

定義 4.1 (完備束と完備半束)**.** $(A, \leq)$ を半順序集合とする。

- $X \subseteq A$ について、 $y \in A$ が X の交わり (meet) であるとは、以下を満たすことである。
  - 任意の $x \in X$ に対して、 $y \leq x$ である。
  - 任意の $z \in A$ について、これが任意の $x \in X$ に対して $z \leq x$ を満たすなら、 $z \leq y$ である。

  交わりは存在すれば一意であり、これを $\bigwedge X$ と書く。
- 双対的に、 $X \subseteq A$ について、 $y \in A$ が X の結び (join) であるとは、以下を満たすことである。
  - 任意の $x \in X$ に対して、 $x \leq y$ である。
  - 任意の $z \in A$ について、これが任意の $x \in X$ に対して $x \leq z$ を満たすなら、 $y \leq z$ である。

  結びは存在すれば一意であり、これを $\bigvee X$ と書く。
- A が**完備交わり半束** *(complete meet-semilattice)* であるとは、A が任意の部分集合の交わりを持つことである。
- A が**完備結び半束** *(complete join-semilattice)* であるとは、A が任意の部分集合の結びを持つことである。

- A が**完備束** *(complete lattice)* であるとは、 A が完備交わり半束かつ完備結び半束であることである。

定理 4.2. 以下は同値:

- A は完備交わり半束である。
- A は完備結び半束である。
- A は完備束である。

Proof. A が完備交わり半束ならば完備結び半束であることを示す。逆は双対的に示される。残りの含意は自明である。

A を完備交わり半束とする。 $X \subseteq A$ とする。X の上界を集めた集合を $\uparrow X$ とおく。 $\bigwedge \uparrow X$ が X の結びであることを示す。

$x \in X$ とする。$\uparrow X$ の定義から、任意の $y \in \uparrow X$ に対し、 $x \leq y$ である。$\bigwedge$ の定義から、 $x \in \bigwedge \uparrow X$ である。

$z \in A$ を X の上界とする。このとき $z \in \uparrow X$ である。 $\bigwedge$ の定義から、 $\bigwedge \uparrow X \leq z$ である。

以上により、 $\bigwedge \uparrow X$ は X の結びである。 □

定義 4.3 (不動点)**.** 順序集合における代数を**前不動点** *(pre-fixed point)* という。

順序集合における余代数を**後不動点** *(post-fixed point)* という。

代数または余代数で、可逆なものを**不動点** *(fixed point)* という。

始代数を**最小不動点** *(least fixed point)* という。(Lambek の定理より、これは不動点である。)

終余代数を**最大不動点** *(greatest fixed point)* という。(Lambek の定理より、これは不動点である。)

定理 4.4 (Knaster-Tarski)**.** $(A, \leq)$ を完備束とし、 $f\colon A \to A$ を単調写像 (順序集合間の関手) とする。このとき、このとき、 f は最小不動点と最大不動点を持つ。

(より一般に、不動点の集合が再び完備束となることが知られているが、ここでは上の事実のみ使う。)

Proof. 全ての前不動点の交わりを μf とおく。 μf もまた前不動点である。したがって μf の定義より、これは始代数 (最小不動点) である。 □

5 部分対象

定義 5.1 (部分対象の擬順序集合)**.** $A \in \mathbf{C}$ とする。 A の**部分対象** *(subobject)* とは、 $\mathbf{C}$ の対象と射の組 (I, i) であって、 $i\colon I \hookrightarrow A$ となるものである。($\hookrightarrow$ は mono 射であることを意味する。)

スライス圏 $\mathbf{C}/A$ を A の部分対象に制限した充満部分圏を $\mathrm{Mono}(A)$ と書く。

定理 5.2. $\mathrm{Mono}(A)$ は擬順序クラスである。

Proof. どの並行射も等しいことは、mono 射の性質から導かれる。 □

定義 5.3 (部分対象の順序集合)**.** $\mathrm{Mono}(A)$ を同値類で割って順序集合としたものを $\mathrm{Sub}(A)$ と書く。

定義 5.4 (整冪圏)**.** 全ての $A \in \mathbf{C}$ について、 $\mathrm{Sub}(A)$ が小さい (真クラスではなく、集合である) とき、 $\mathbf{C}$ は**整冪** *(well-powered)* であるという。

定義 5.5 (初等トポス)**.** $\mathbf{C}$ の**部分対象分類子** *(subobject classifier)* とは、 $\mathbf{C}$ の対象と射の組 (Ω, true) であって、

以下の条件を満たすものである。

- $\mathrm{true}\colon 1 \to \Omega$ である。ただし、 $1 \in \mathbf{C}$ は $\mathbf{C}$ の終対象とする。
- 任意の $I, A \in \mathbf{C}, i\colon I \hookrightarrow A$ に対し、以下の図式

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "!"'] \arrow[d, hook, "i"] & 1 \arrow[d, hook, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "\chi_i"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

を引き戻しとして成立させるような χ_i がただ 1 つ存在する。ただし、 $!\colon I \to 1$ は終対象に対する唯一の射のこととする。

C が**初等トポス** *(elementary topos)*、あるいは単に**トポス** *(topos)* であるとは、 **C** が有限極限と指数対象と部分対象分類子を持つことである。

例 5.6. **Set** はトポスである。より一般に、 $[\mathbf{I}, \mathbf{Set}]$ もトポスである。 **Set** を有限集合に限定したものもトポスである。

定理 5.7. **C** がトポスであるとき、これが局所小であることと整冪であることは同値である。

Proof. 略 □

定理 5.8. **C** が完備で局所小なトポスであるとき、任意の $A \in \mathbf{C}$ に対し、 $\mathrm{Sub}(A)$ は完備束である。

Proof. **C** が完備だから、 $\mathbf{C}/A$ も小極限を持つ。忠実充満関手は極限を反映するから、 $\mathrm{Sub}(A)$ も小極限を持つ。 **C** が整冪である、すなわち $\mathrm{Sub}(A)$ が小さいことから、 $\mathrm{Sub}(A)$ は順序集合の意味で完備 (交わり完備半束) であることがわかる。したがって、 $\mathrm{Sub}(A)$ は完備束である。 □

定義 5.9 (逆像)**.** $f\colon B \to A, i\colon I \hookrightarrow A$ とするとき、以下の引き戻し

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(I) \arrow[r, "f|_{f^{-1}(I)}"'] \arrow[d, hook, "f^{-1}(i)"] & I \arrow[d, hook, "i"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

を I の f による**逆像** *(inverse image)* と呼ぶ。

6 整礎余代数

整礎余代数について議論するときは、以下を仮定する。

- **C** は圏である。
- $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ は自己関手である。
- **C** は逆像を持つ。

- F は mono 射を mono 射に写す。
- F は逆像を逆像に写す。

定義 6.1 (整礎余代数)**.** (A, α) を F-余代数とし、 (I, i) を A の部分対象とする。以下の引き戻し図式

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[dr, hook, bend right, "i"'] & \alpha^{-1}(FI) \arrow[r] \arrow[d, hook, "\alpha^{-1}(Fi)"] & FI \arrow[d, hook, "Fi"] \\
& A \arrow[r, "\alpha"'] & FA
\end{tikzcd}$$

において、 $\alpha^{-1}(Fi)$ が i を経由する、すなわち

$$\begin{tikzcd}
\alpha^{-1}(FI) \arrow[r] \arrow[d, hook] & FI \arrow[dd, hook, "Fi"] \\
I \arrow[d, hook, "i"] & \\
A \arrow[r, "\alpha"'] & FA
\end{tikzcd}$$

となるとき、 (I, i) は帰納的 (inductive) であるという。

帰納的な部分対象が (A, id_A) と同型なものに限られる (すなわち、 (I, i) が帰納的なら i が可逆である) とき、 (A, α) は**整礎** *(well-founded)* であるという。

定義 6.2 (反礎代数)**.** 双対的に、F-代数 (A, α) が $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ で整礎余代数であるとき、(A, α) を**反礎代数** *(anti-founded algebra)* という。

定理 6.3. [3] $\mathbf{C}$ が完備で局所小なトポスであるとき、 $\mathbf{C}$ の再帰的余代数は整礎余代数である。

Proof. (A, α) を 再帰的 F-余代数とする。

関数 $\triangleright\colon \mathrm{Sub}(A) \to \mathrm{Sub}(A)$ を、 $\triangleright(I) = \alpha^{-1}(FI)$ と定義すると、これは単調写像になっている。 $\mathrm{Sub}(A)$ は完備束だから、 $\triangleright$ の最小不動点が存在する。これを (I, i) とおく。

(I, i) が $\triangleright$ の不動点であるというのは、すなわち

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & FI \arrow[d, hook, "Fi"] \\
A \arrow[r, "\alpha"'] & FA
\end{tikzcd}$$

という引き戻し図式が存在することに他ならない。

さらに、 $\mathbf{C}$ はトポスであるから、以下の引き戻し図式

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "!"'] \arrow[d, hook, "i"] & 1 \arrow[d, hook, "\mathrm{true}"] \\
A \arrow[r, "\chi_i"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

が存在する。 F は逆像図式を保存すると仮定しているから、上の図式を

$$\begin{tikzcd} FI \arrow[r, "F!"'] \arrow[d, hook, "Fi"] & F1 \arrow[d, hook, "F\,\mathrm{true}"] \\ FA \arrow[r, "F\chi_i"'] & F\Omega \end{tikzcd}$$

と持ち上げても、引き戻し図式となる。これらを連結し、さらに $\chi_{F\,\mathrm{true}}$ を定義する図式を繋げると

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & FI \arrow[r, "F!"'] \arrow[d, hook, "Fi"] & F1 \arrow[r, "!"'] \arrow[d, hook, "F\,\mathrm{true}"] & 1 \arrow[d, hook, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & FA \arrow[r, "F\chi_i"'] & F\Omega \arrow[r, "\chi_{F\,\mathrm{true}}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

全体が一つの引き戻しになっている。つまり、

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "!"'] \arrow[d, hook, "i"] & 1 \arrow[d, hook, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "\chi_{F\,\mathrm{true}} \circ F\chi_i \circ \alpha"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

である。

ところで、これは χ_i を定義する図式である

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "!"'] \arrow[d, hook, "i"] & 1 \arrow[d, hook, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "\chi_i"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

に他ならない。したがって、 χ_i の唯一性から、 $\chi_{F\,\mathrm{true}} \circ F\chi_i \circ \alpha = \chi_i$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\chi_i"] & FA \arrow[d, "F\chi_i"] \\ \Omega & F\Omega \arrow[l, "\chi_{F\,\mathrm{true}}"] \end{tikzcd}$$

がわかる。これは χ_i が余代数-代数準同型であることを意味している。

一方、以下の図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "!"] & FA \arrow[d, "F!"] \\
1 \arrow[d, hook, "\mathrm{true}"] & F1 \arrow[l, "!"] \arrow[d, hook, "F\,\mathrm{true}"] \\
\Omega & F\Omega \arrow[l, "\chi_{F\,\mathrm{true}}"]
\end{tikzcd}
$$

も可換となるため、 $\mathrm{true} \circ !$ もまた余代数-代数準同型である。

(A, α) は再帰的余代数だから、 $\mathrm{true} \circ ! = \chi_i$ である。

つまり、 χ_i の引き戻し図式は、以下の図式

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "!"'] \arrow[d, hook, "i"] & 1 \arrow[d, hook, "\mathrm{true}"] \\
A \arrow[ur, "!"'] \arrow[r, "\chi_i"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

のように縮退する。 A が錐をなすことを使えば、 i が可逆であることがすぐにわかる。

i が可逆であることから、 (I, i) は $\mathrm{Sub}(A)$ の最大元であることがわかった。

ここで、(A, α) が整礎であることを示すために、 (I', i') を帰納的な部分対象とする。 (I', i') が帰納的であるというのは、言い換えると、これが $\mathrm{Sub}(A)$ 内で $\triangleright$ の前不動点になっていることに他ならない。

ところで、 (I, i) は最小不動点だったから、 $(I, i) \leq (I', i')$ である。したがって (I', i') もまた $\mathrm{Sub}(A)$ の最大元である。言い換えれば、 i' は可逆である。

以上により、 (A, α) が整礎であることが示された。 □

参考文献

[1] Venanzio Capretta, Tarmo Uustalu, and Varmo Vene. Corecursive algebras: A study of general structured corecursion. In Marcel Vinicius Medeiros Oliveira and Jim Woodcock, editors, *Formal Methods: Foundations and Applications, 12th Brazilian Symposium on Formal Methods, SBMF 2009, Gramado, Brazil, August 19-21, 2009, Revised Selected Papers*, volume 5902 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 84–100. Springer, 2009.

[2] Gerhard Osius. Categorical set theory: a characterization of the category of sets. *J. Pure Appl. Algebra*, 4:79–119, 1974.

[3] Paul Taylor. *Practical Foundations of Mathematics*, volume 59 of *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, 1999.