

再帰的余代数いろいろ

原 将己

2017 年 10 月 15 日

1 代数と余代数

以下、 \mathbf{C} は圏とし、 $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ は自己関手とする。

定義 1.1 (代数、余代数). \mathbf{C} の対象と射の組 (A, α) であって $\alpha: FA \rightarrow A$ となるものを F -代数 (F -algebra) と呼ぶ。

\mathbf{C} の対象と射の組 (A, α) であって $\alpha: A \rightarrow FA$ となるものを F -余代数 (F -coalgebra) と呼ぶ。

F -代数 (A, α) から (B, β) への準同型とは、 $h: A \rightarrow B$ であって $\beta \circ Fh = h \circ \alpha$ となるもののことである。

F -代数とその準同型のなす圏を $\text{Alg}(F)$ と書く。

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{\alpha} & FA \\ \downarrow h & & \downarrow Fh \\ B & \xleftarrow{\beta} & FB \end{array}$$

F -余代数 (A, α) から (B, β) への準同型とは、 $h: A \rightarrow B$ であって $\beta \circ h = Fh \circ \alpha$ となるもののことである。

F -余代数とその準同型のなす圏を $\text{Coalg}(F)$ と書く。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & FA \\ \downarrow h & & \downarrow Fh \\ B & \xrightarrow{\beta} & FB \end{array}$$

定義 1.2 (余代数-代数準同型). F -余代数 (A, α) から F -代数 (B, β) への余代数-代数準同型 (*coalgebra-to-algebra homomorphism*) とは、 $h: A \rightarrow B$ であって、 $\beta \circ Fh \circ \alpha = h$ となるもののことである。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & FA \\ \downarrow h & & \downarrow Fh \\ B & \xleftarrow{\beta} & FB \end{array}$$

定義 1.3 (始代数と終余代数). $\text{Alg}(F)$ の始対象を始代数 (*initial algebra*) という。 $\text{Coalg}(F)$ の終対象を終余代数

(*terminal coalgebra, final coalgebra*) という。

定義より、始代数と終余代数は (存在するならば) 同型を除いて一意である。

定義 1.4 (再帰的余代数と余再帰的代数). 余代数であって、任意の代数への準同型が一意に存在するものを再帰的 F -余代数 (*recursive F -coalgebra*) という。本資料では再帰的余代数からなる $\text{Coalg}(F)$ の充満部分圏を $\text{RCA}(F)$ と表記する。

代数であって、任意の余代数からの準同型が一意に存在するものを余再帰的 F -代数 (*corecursive F -algebra*) という。本資料では余再帰的代数からなる $\text{Alg}(F)$ の充満部分圏を $\text{CRA}(F)$ と表記する。

注意 1.5. 再帰的余代数と始代数の普遍性は良く似ている。実際、 α が可逆のとき、この 2 つの定義は (α の向きを互いに逆にすることで) 同値になる。

同様に、余再帰的代数と終余代数の定義も、 α が可逆のときに同値になる。

2 Lambek の定理

定理 2.1 (Lambek). 始代数 (A, α) の α は常に可逆である。双対的に、終余代数も可逆である。

Proof. 始代数について示す。 (A, α) を始代数とする。このとき $(FA, F\alpha)$ も代数だから、代数の準同型 ($h: A \rightarrow FA$ であって $F\alpha \circ Fh = h \circ \alpha$ となるもの) が存在する。

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{\alpha} & FA \\ \downarrow h & & \downarrow Fh \\ FA & \xleftarrow{F\alpha} & FFA \end{array}$$

h も α も代数の準同型だから、 $\alpha \circ h$ は (A, α) の自己準同型である。一方、 id_A も (A, α) の自己準同型である。始代数からの準同型は一意だから、 $\alpha \circ h = \text{id}_A$ である。

$$\begin{array}{ccccc} & A & \xleftarrow{\alpha} & FA & \\ & \downarrow h & & \downarrow Fh & \\ \text{id}_A \swarrow & FA & \xleftarrow{F\alpha} & FFA & \searrow \text{id}_{FA} \\ & \downarrow \alpha & & \downarrow F\alpha & \\ & A & \xleftarrow{\alpha} & FA & \end{array}$$

$\alpha \circ h = \text{id}_A$ と h の準同型性により、 $h \circ \alpha = F\alpha \circ Fh = F \text{id}_A = \text{id}_{FA}$ である。

したがって、 h は α の逆射である。 □

系 2.2. 始代数 (の逆射) は再帰的余代数である。双対的に、終余代数 (の逆射) は余再帰的代数である。

定理 2.3. 始代数 (の逆射) は $\text{RCA}(F)$ の終対象である。双対的に、終余代数 (の逆射) は $\text{CRA}(F)$ の始対象である。

Proof. (A, α) を始代数とする。このとき (A, α^{-1}) が $\text{RCA}(F)$ の終対象であることを示す。

$(B, \beta) \in \text{RCA}(F)$ とする。 (B, β) から (A, α^{-1}) への代数準同型は、 (B, β) から (A, α) への余代数-代数準同型に他ならない。したがって B の再帰性から、代数準同型は一意である。

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & FB \\ \downarrow h & & \downarrow Fh \\ A & \xleftarrow{\alpha} & FA \end{array}$$

□

3 逆 Lambek の定理

(逆 Lambek という名前は本資料に固有である。)

補題 3.1. (A, α) が再帰的余代数であるとき、 $(FA, F\alpha)$ も再帰的余代数である。双対的に、 (A, α) が余再帰的代数であるとき、 $(FA, F\alpha)$ も余再帰的代数である。

Proof. (A, α) を再帰的余代数とし、 (B, β) を代数とする。

A の再帰性より、 A から B への余代数-代数準同型 $(h: A \rightarrow B$ であって $\beta \circ Fh \circ \alpha = h$ となるもの) が一意に存在する。これを用いて $f = \beta \circ Fh$ と定義する。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & FA \\ \downarrow h & \nearrow f & \downarrow Fh \\ B & \xleftarrow{\beta} & FB \end{array}$$

この f は $\beta \circ Ff \circ F\alpha = \beta \circ F(\beta \circ Fh \circ \alpha) = \beta \circ Fh = f$ を満たす。したがって f は FA から B への余代数-代数準同型である。

$$\begin{array}{ccccc} & FA & \xrightarrow{F\alpha} & FFA & \\ & \downarrow Fh & \nearrow Ff & \downarrow FFh & \\ FA & \xrightarrow{f} & FB & \xleftarrow{F\beta} & FFB \end{array}$$

逆に $f': FA \rightarrow B$ が $\beta \circ Ff' \circ F\alpha = f'$ を満たすとする。 $h' = f' \circ \alpha$ とおくと、 $\beta \circ Fh' \circ \alpha = \beta \circ Ff' \circ F\alpha \circ \alpha = f' \circ \alpha = h'$ となるから、 h' は A から B への余代数-代数準同型である。

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & FA & \xrightarrow{F\alpha} & FFA \\ \downarrow h' & \nearrow f' & \downarrow Fh' & \nearrow Ff' & \\ B & \xleftarrow{\beta} & FB & & \end{array}$$

A の再帰性から $h' = h$ となる。したがって、 $f' = \beta \circ Ff' \circ F\alpha = \beta \circ Fh' = \beta \circ Fh = f$ となる。

以上より FA から B への余代数-代数準同型は一意に存在する。したがって、 $(FA, F\alpha)$ は再帰的余代数であ

る。

□

定理 3.2 (逆 Lambek). $\text{RCA}(F)$ の終対象は可逆である。双対的に、 $\text{CRA}(F)$ の始対象は可逆である。

Proof. (A, α) を $\text{RCA}(F)$ の終対象とする。 $(FA, F\alpha)$ も再帰的余代数だから、 (A, α) の終性より、 FA から A への余代数準同型 ($h: FA \rightarrow A$ であって $\alpha \circ h = Fh \circ F\alpha$ となるもの) が存在する。

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{F\alpha} & FFA \\ \downarrow h & & \downarrow Fh \\ A & \xrightarrow{\alpha} & FA \end{array}$$

h も α も余代数の準同型だから、 $h \circ \alpha$ は (A, α) の自己準同型である。一方、 id_A も (A, α) の自己準同型である。終再帰的余代数への準同型は一意だから、 $h \circ \alpha = \text{id}_A$ である。

$$\begin{array}{ccccc} & A & \xrightarrow{\alpha} & FA & \\ & \downarrow \alpha & & \downarrow F\alpha & \\ \text{id}_A \swarrow & FA & \xrightarrow{F\alpha} & FFA & \searrow \text{id}_{FA} \\ & \downarrow h & & \downarrow Fh & \\ & A & \xrightarrow{\alpha} & FA & \end{array}$$

$h \circ \alpha = \text{id}_A$ と h の準同型性により、 $\alpha \circ h = Fh \circ F\alpha = F \text{id}_A = \text{id}_{FA}$ である。

したがって、 h は α の逆射である。

□

系 3.3. $\text{RCA}(F)$ の終対象 (の逆射) は始代数である。双対的に、 $\text{CRA}(F)$ の始対象 (の逆射) は終余代数である。

4 完備束

定義 4.1 (完備束と完備半束). (A, \leq) を半順序集合とする。

- $X \subseteq A$ について、 $y \in A$ が X の交わり (meet) であるとは、以下を満たすことである。
 - 任意の $x \in X$ に対して、 $y \leq x$ である。
 - 任意の $z \in A$ について、これが任意の $x \in X$ に対して $z \leq x$ を満たすなら、 $z \leq y$ である。
 交わりは存在すれば一意であり、これを $\bigwedge X$ と書く。
- 双対的に、 $X \subseteq A$ について、 $y \in A$ が X の結び (join) であるとは、以下を満たすことである。
 - 任意の $x \in X$ に対して、 $x \leq y$ である。
 - 任意の $z \in A$ について、これが任意の $x \in X$ に対して $x \leq z$ を満たすなら、 $y \leq z$ である。
 結びは存在すれば一意であり、これを $\bigvee X$ と書く。
- A が完備交わり半束 (complete meet-semilattice) であるとは、 A が任意の部分集合の交わりを持つことである。
- A が完備結び半束 (complete join-semilattice) であるとは、 A が任意の部分集合の結びを持つことである。

- A が完備束 (*complete lattice*) であるとは、 A が完備交わり半束かつ完備結び半束であることである。

定理 4.2. 以下は同値:

- A は完備交わり半束である。
- A は完備結び半束である。
- A は完備束である。

Proof. A が完備交わり半束ならば完備結び半束であることを示す。逆は双対的に示される。残りの含意は自明である。

A を完備交わり半束とする。 $X \subseteq A$ とする。 X の上界を集めた集合を $\uparrow X$ とおく。 $\bigwedge \uparrow X$ が X の結びであることを示す。

$x \in X$ とする。 $\uparrow X$ の定義から、任意の $y \in \uparrow X$ に対し、 $x \leq y$ である。 \bigwedge の定義から、 $x \in \bigwedge \uparrow X$ である。
 $z \in A$ を X の上界とする。このとき $z \in \uparrow X$ である。 \bigwedge の定義から、 $\bigwedge \uparrow X \leq z$ である。

以上により、 $\bigwedge \uparrow X$ は X の結びである。 □

定義 4.3 (不動点). 順序集合における代数を前不動点 (*pre-fixed point*) という。

順序集合における余代数を後不動点 (*post-fixed point*) という。

代数または余代数で、可逆なものを不動点 (*fixed point*) という。

始代数を最小不動点 (*least fixed point*) という。(Lambek の定理より、これは不動点である。)

終余代数を最大不動点 (*greatest fixed point*) という。(Lambek の定理より、これは不動点である。)

定理 4.4 (Knaster-Tarski). (A, \leq) を完備束とし、 $f: A \rightarrow A$ を単調写像 (順序集合間の関手) とする。このとき、このとき、 f は最小不動点と最大不動点を持つ。

(より一般に、不動点の集合が再び完備束となることが知られているが、ここでは上の事実のみ使う。)

Proof. 全ての前不動点の交わりを μf とおく。 μf もまた前不動点である。したがって μf の定義より、これは始代数 (最小不動点) である。 □

5 部分対象

定義 5.1 (部分対象の擬順序集合). $A \in \mathbf{C}$ とする。 A の部分対象 (*subobject*) とは、 \mathbf{C} の対象と射の組 (I, i) であって、 $i: I \hookrightarrow A$ となるものである。 (\hookrightarrow は mono 射であることを意味する。)

スライス圏 \mathbf{C}/A を A の部分対象に制限した充満部分圏を $\mathbf{Mono}(A)$ と書く。

定理 5.2. $\mathbf{Mono}(A)$ は擬順序クラスである。

Proof. どの並行射も等しいことは、mono 射の性質から導かれる。 □

定義 5.3 (部分対象の順序集合). $\mathbf{Mono}(A)$ を同値類で割って順序集合としたものを $\mathbf{Sub}(A)$ と書く。

定義 5.4 (整冪圏). 全ての $A \in \mathbf{C}$ について、 $\mathbf{Sub}(A)$ が小さい (真クラスではなく、集合である) とき、 \mathbf{C} は整冪 (*well-powered*) であるという。

定義 5.5 (初等トポス). \mathbf{C} の部分対象分類子 (*subobject classifier*) とは、 \mathbf{C} の対象と射の組 (Ω, true) であって、

以下の条件を満たすものである。

- $\text{true}: 1 \rightarrow \Omega$ である。ただし、 $1 \in \mathbf{C}$ は \mathbf{C} の終対象とする。
- 任意の $I, A \in \mathbf{C}, i: I \hookrightarrow A$ に対し、以下の図式

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\quad ! \quad} & 1 \\ \downarrow i & & \downarrow \text{true} \\ A & \xrightarrow{\chi_i} & \Omega \end{array}$$

を引き戻しとして成立させるような χ_i がただ 1 つ存在する。ただし、 $!: I \rightarrow 1$ は終対象に対する唯一の射のこととする。

\mathbf{C} が初等トポス (*elementary topos*)、あるいは単にトポス (*topos*) であるとは、 \mathbf{C} が有限極限と指数対象と部分対象分類子を持つことである。

例 5.6. \mathbf{Set} はトポスである。より一般に、 $[\mathbf{I}, \mathbf{Set}]$ もトポスである。 \mathbf{Set} を有限集合に限定したものもトポスである。

定理 5.7. \mathbf{C} がトポスであるとき、これが局所小であることと整冪であることは同値である。

Proof. 略

□

定理 5.8. \mathbf{C} が完備で局所小なトポスであるとき、任意の $A \in \mathbf{C}$ に対し、 $\text{Sub}(A)$ は完備束である。

Proof. \mathbf{C} が完備だから、 \mathbf{C}/A も小極限を持つ。忠実充満関手は極限を反映するから、 $\text{Sub}(A)$ も小極限を持つ。 \mathbf{C} が整冪である、すなわち $\text{Sub}(A)$ が小さいことから、 $\text{Sub}(A)$ は順序集合の意味で完備 (交わり完備半束) であることがわかる。したがって、 $\text{Sub}(A)$ は完備束である。

□

定義 5.9 (逆像). $f: B \rightarrow A, i: I \hookrightarrow A$ とするとき、以下の引き戻し

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(I) & \xrightarrow{f|_{f^{-1}(I)}} & I \\ \downarrow f^{-1}(i) & & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

を I の f による逆像 (*inverse image*) と呼ぶ。

6 整礎余代数

整礎余代数について議論するときは、以下を仮定する。

- \mathbf{C} は圏である。
- $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ は自己関手である。
- \mathbf{C} は逆像を持つ。

- F は mono 射を mono 射に写す。
- F は逆像を逆像に写す。

定義 6.1 (整礎余代数). (A, α) を F -余代数とし、 (I, i) を A の部分対象とする。以下の引き戻し図式

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\alpha^{-1}(FI)} & FI \\ \downarrow i & & \downarrow Fi \\ A & \xrightarrow{\alpha} & FA \end{array}$$

において、 $\alpha^{-1}(Fi)$ が i を経由する、すなわち

$$\begin{array}{ccc} \alpha^{-1}(FI) & \xrightarrow{\quad} & FI \\ \downarrow & & \downarrow \\ I & & \\ \downarrow i & & \downarrow Fi \\ A & \xrightarrow{\alpha} & FA \end{array}$$

となるとき、 (I, i) は帰納的 (inductive) であるという。

帰納的な部分対象が (A, id_A) と同型なものに限られる (すなわち、 (I, i) が帰納的なら i が可逆である) とき、 (A, α) は整礎 (well-founded) であるという。

定義 6.2 (反礎代数). 双対的に、 F -代数 (A, α) が \mathbf{C}^{op} で整礎余代数であるとき、 (A, α) を反礎代数 (anti-founded algebra) という。

定理 6.3. \mathbf{C} が完備で局所小なトポスであるとき、 \mathbf{C} の再帰的余代数は整礎余代数である。

Proof. (A, α) を 再帰的 F -余代数とする。

関数 $\triangleright: \text{Sub}(A) \rightarrow \text{Sub}(A)$ を、 $\triangleright(I) = \alpha^{-1}(FI)$ と定義すると、これは単調写像になっている。 $\text{Sub}(A)$ は完備束だから、 \triangleright の最小不動点が存在する。これを (I, i) とおく。

(I, i) が \triangleright の不動点であるというのは、すなわち

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\quad} & FI \\ \downarrow i & & \downarrow Fi \\ A & \xrightarrow{\alpha} & FA \end{array}$$

という引き戻し図式が存在することに他ならない。

さらに、 \mathbf{C} はトポスであるから、以下の引き戻し図式

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow i & & \downarrow \text{true} \\ A & \xrightarrow{\chi_i} & \Omega \end{array}$$

が存在する。 F は逆像図式を保存すると仮定しているから、上の図式を

$$\begin{array}{ccc}
FI & \xrightarrow{F!} & F1 \\
\downarrow Fi & & \downarrow F \text{ true} \\
FA & \xrightarrow{F\chi_i} & F\Omega
\end{array}$$

と持ち上げても、引き戻し図式となる。これらを連結し、さらに $\chi_{F \text{ true}}$ を定義する図式を繋げると

$$\begin{array}{ccccccc}
I & \xrightarrow{\quad} & FI & \xrightarrow{F!} & F1 & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
\downarrow i & & \downarrow Fi & & \downarrow F \text{ true} & & \downarrow \text{true} \\
A & \xrightarrow{\alpha} & FA & \xrightarrow{F\chi_i} & F\Omega & \xrightarrow{\chi_{F \text{ true}}} & \Omega
\end{array}$$

全体が一つの引き戻しになっている。つまり、

$$\begin{array}{ccc}
I & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
\downarrow i & & \downarrow \text{true} \\
A & \xrightarrow{\chi_{F \text{ true}} \circ F\chi_i \circ \alpha} & \Omega
\end{array}$$

である。

ところで、これは χ_i を定義する図式である

$$\begin{array}{ccc}
I & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
\downarrow i & & \downarrow \text{true} \\
A & \xrightarrow{\chi_i} & \Omega
\end{array}$$

に他ならない。したがって、 χ_i の唯一性から、 $\chi_{F \text{ true}} \circ F\chi_i \circ \alpha = \chi_i$

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\alpha} & FA \\
\downarrow \chi_i & & \downarrow F\chi_i \\
\Omega & \xleftarrow{\chi_{F \text{ true}}} & F\Omega
\end{array}$$

がわかる。これは χ_i が余代数-代数準同型であることを意味している。

一方、以下の図式

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\alpha} & FA \\
\downarrow ! & & \downarrow F! \\
1 & \xleftarrow{!} & F1 \\
\downarrow \text{true} & & \downarrow F \text{ true} \\
\Omega & \xleftarrow{\chi F \text{ true}} & F\Omega
\end{array}$$

も可換となるため、 $\text{true} \circ !$ もまた余代数-代数準同型である。

(A, α) は再帰的余代数だから、 $\text{true} \circ ! = \chi_i$ である。

つまり、 χ_i の引き戻し図式は、以下の図式

$$\begin{array}{ccc}
I & \xrightarrow{!} & 1 \\
\downarrow i & \nearrow ! & \downarrow \text{true} \\
A & \xrightarrow{\chi_i} & \Omega
\end{array}$$

のように縮退する。 A が錐をなすことを使えば、 i が可逆であることがすぐにわかる。

i が可逆であることから、 (I, i) は $\text{Sub}(A)$ の最大元であることがわかった。

ここで、 (A, α) が整礎であることを示すために、 (I', i') を帰納的な部分対象とする。 (I', i') が帰納的であるというのは、言い換えると、これが $\text{Sub}(A)$ 内で \triangleright の前不動点になっていることに他ならない。

ところで、 (I, i) は最小不動点だったから、 $(I, i) \leq (I', i')$ である。したがって (I', i') もまた $\text{Sub}(A)$ の最大元である。言い換えれば、 i' は可逆である。

以上により、 (A, α) が整礎であることが示された。 □

参考文献