# 再帰的余代数いろいろ

### 原 将己

#### 2017年10月15日

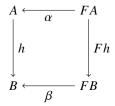
# 1 代数と余代数

以下、 $\mathbf{C}$  は圏とし、 $F: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$  は自己関手とする。

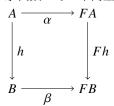
定義 **1.1** (代数、余代数)**.** C の対象と射の組  $(A,\alpha)$  であって  $\alpha: FA \to A$  となるものを F-代数 (F-algebra) と呼ぶ。

C の対象と射の組  $(A,\alpha)$  であって  $\alpha:A\to FA$  となるものを F-余代数 (F-coalgebra) と呼ぶ。

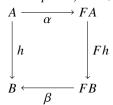
F-代数  $(A,\alpha)$  から  $(B,\beta)$  への準同型とは、  $h\colon A\to B$  であって  $\beta\circ Fh=h\circ\alpha$  となるもののことである。 F-代数とその準同型のなす圏を  $\mathrm{Alg}(F)$  と書く。



F-余代数  $(A,\alpha)$  から  $(B,\beta)$  への準同型とは、  $h:A\to B$  であって  $\beta\circ h=Fh\circ\alpha$  となるもののことである。 F-余代数とその準同型のなす圏を Coalg(F) と書く。



定義 **1.2** (余代数-代数準同型)**.** F-余代数  $(A,\alpha)$  から F-代数  $(B,\beta)$  への余代数-代数準同型 (coalgebra-to-algebra homomorphism) とは、  $h:A\to B$  であって、  $\beta\circ Fh\circ\alpha=h$  となるもののことである。



定義 1.3 (始代数と終余代数). Alg(F) の始対象を始代数 (initial algera) という。Coalg(F) の終対象を終余代数

(terminal coalgebra, final coalgebra) という。

定義より、始代数と終余代数は(存在するならば)同型を除いて一意である。

#### 定義 1.4 (再帰的余代数と余再帰的代数). [2], [1]

余代数であって、任意の代数への準同型が一意に存在するものを再帰的 F-余代数 (recursive F-coalgebra) という。本資料では再帰的余代数からなる  $\operatorname{Coalg}(F)$  の充満部分圏を  $\operatorname{RCA}(F)$  と表記する。

代数であって、任意の余代数からの準同型が一意に存在するものを余再帰的 F-代数 (corecursive F-algebra) という。本資料では余再帰的代数からなる  $\mathrm{Alg}(F)$  の充満部分圏を  $\mathrm{CRA}(F)$  と表記する。

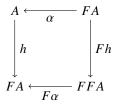
**注意 1.5.** 再帰的余代数と始代数の普遍性は良く似ている。実際、 $\alpha$  が可逆のとき、この 2 つの定義は ( $\alpha$  の向きを互いに逆にすることで) 同値になる。

同様に、余再帰的代数と終余代数の定義も、 α が可逆のときに同値になる。

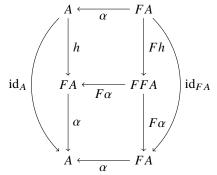
## 2 Lambek の定理

定理 **2.1** (Lambek). 始代数  $(A,\alpha)$  の  $\alpha$  は常に可逆である。双対的に、終余代数も可逆である。

**Proof.** 始代数について示す。  $(A,\alpha)$  を始代数とする。このとき  $(FA,F\alpha)$  も代数だから、代数の準同型  $(h:A \to FA$  であって  $F\alpha \circ Fh = h \circ \alpha$  となるもの) が存在する。



h も  $\alpha$  も代数の準同型だから、  $\alpha \circ h$  は  $(A,\alpha)$  の自己準同型である。一方、  $\mathrm{id}_A$  も  $(A,\alpha)$  の自己準同型である。始代数からの準同型は一意だから、  $\alpha \circ h = \mathrm{id}_A$  である。



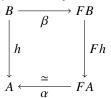
 $\alpha \circ h = \mathrm{id}_A$  と h の準同型性により、  $h \circ \alpha = F\alpha \circ Fh = F \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{FA}$  である。 したがって、 h は  $\alpha$  の逆射である。

系 2.2. 始代数 (の逆射) は再帰的余代数である。双対的に、終余代数 (の逆射) は余再帰的代数である。

定理 2.3. 始代数 (の逆射) は RCA(F) の終対象である。双対的に、終余代数 (の逆射) は CRA(F) の始対象である。

*Proof.*  $(A,\alpha)$  を始代数とする。このとき  $(A,\alpha^{-1})$  が RCA(F) の終対象であることを示す。

 $(B,\beta) \in RCA(F)$  とする。  $(B,\beta)$  から  $(A,\alpha^{-1})$  への代数準同型は、 $(B,\beta)$  から  $(A,\alpha)$  への余代数-代数準同型 に他ならない。したがって B の再帰性から、代数準同型は一意である。



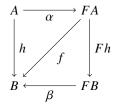
# 3 逆 Lambek の定理

(逆 Lambek という名前は本資料に固有である。)

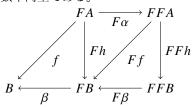
補題 **3.1.**  $(A,\alpha)$  が再帰的余代数であるとき、 $(FA,F\alpha)$  も再帰的余代数である。双対的に、 $(A,\alpha)$  が余再帰的代数であるとき、 $(FA,F\alpha)$  も余再帰的代数である。

Proof.  $(A, \alpha)$  を再帰的余代数とし、 $(B, \beta)$  を代数とする。

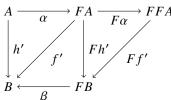
A の再帰性より、 A から B への余代数-代数準同型  $(h: A \to B$  であって  $\beta \circ Fh \circ \alpha = h$  となるもの) が一意 に存在する。これを用いて  $f = \beta \circ Fh$  と定義する。



この f は  $\beta \circ Ff \circ F\alpha = \beta \circ F(\beta \circ Fh \circ \alpha) = \beta \circ Fh = f$  を満たす。したがって f は FA から B への余代数-代数準同型である。

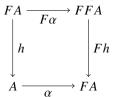


逆に f':  $FA \to B$  が  $\beta \circ Ff' \circ F\alpha = f'$  を満たすとする。  $h' = f' \circ \alpha$  とおくと、 $\beta \circ Fh' \circ \alpha = \beta \circ Ff' \circ F\alpha \circ \alpha = f' \circ \alpha = h'$  となるから、 h' は A から B への余代数-代数準同型である。

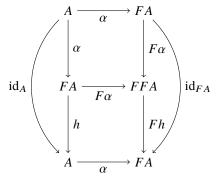


A の再帰性から h'=h となる。したがって、  $f'=\beta\circ Ff'\circ F\alpha=\beta\circ Fh'=\beta\circ Fh=f$  となる。 以上より FA から B への余代数-代数準同型は一意に存在する。したがって、  $(FA,F\alpha)$  は再帰的余代数であ 定理 3.2 (逆 Lambek). RCA(F) の終対象は可逆である。双対的に、 CRA(F) の始対象は可逆である。

Proof.  $(A,\alpha)$  を RCA(F) の終対象とする。 $(FA,F\alpha)$  も再帰的余代数だから、 $(A,\alpha)$  の終性より、FA から A への余代数準同型  $(h\colon FA\to A$  であって  $\alpha\circ h=Fh\circ F\alpha$  となるもの) が存在する。



h も  $\alpha$  も余代数の準同型だから、 $h\circ \alpha$  は  $(A,\alpha)$  の自己準同型である。一方、  $\mathrm{id}_A$  も  $(A,\alpha)$  の自己準同型である。終再帰的余代数への準同型は一意だから、 $h\circ \alpha=\mathrm{id}_A$  である。



 $h \circ \alpha = \mathrm{id}_A$  と h の準同型性により、  $\alpha \circ h = Fh \circ F\alpha = F \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{FA}$  である。 したがって、 h は  $\alpha$  の逆射である。

**系 3.3.** RCA(F) の終対象 (の逆射) は始代数である。双対的に、CRA(F) の始対象 (の逆射) は終余代数である。

#### 4 完備束

定義 **4.1** (完備束と完備半束). (A, ≤) を半順序集合とする。

- $X \subseteq A$  について、 $y \in A$  が X の交わり (meet) であるとは、以下を満たすことである。
  - 任意の $x \in X$ に対して、 $y \le x$ である。
  - 任意の  $z \in A$  について、これが任意の  $x \in X$  に対して  $z \le x$  を満たすなら、  $z \le y$  である。 交わりは存在すれば一意であり、これを  $\bigwedge X$  と書く。
- 双対的に、 $X \subseteq A$  について、 $y \in A$  が X の結び (join) であるとは、以下を満たすことである。
  - 任意の $x \in X$ に対して、 $x \le y$ である。
  - 任意の  $z \in A$  について、これが任意の  $x \in X$  に対して  $x \le z$  を満たすなら、  $y \le z$  である。 結びは存在すれば一意であり、これを  $\bigvee X$  と書く。
- *A* が完備交わり半束 (*complete meet-semilattice*) であるとは、*A* が任意の部分集合の交わりを持つことである。
- Aが完備結び半束(complete join-semilattice)であるとは、Aが任意の部分集合の結びを持つことである。

• A が完備束 (complete lattice) であるとは、 A が完備交わり半束かつ完備結び半束であることである。

#### 定理 4.2. 以下は同値:

- A は完備交わり半束である。
- A は完備結び半束である。
- A は完備束である。

*Proof.* A が完備交わり半束ならば完備結び半束であることを示す。逆は双対的に示される。残りの含意は自明である。

A を完備交わり半束とする。  $X \subseteq A$  とする。 X の上界を集めた集合を  $\uparrow X$  とおく。  $\wedge \uparrow X$  が X の結びであることを示す。

 $x \in X$  とする。  $\uparrow X$  の定義から、任意の  $y \in \uparrow X$  に対し、  $x \le y$  である。  $\land$  の定義から、  $x \in \land \uparrow X$  である。  $z \in A$  を x の上界とする。このとき  $z \in \uparrow X$  である。  $\land$  の定義から、  $\land \uparrow X \le z$  である。

以上により、 $\wedge \uparrow X$  は X の結びである。

定義 4.3 (不動点). 順序集合における代数を前不動点 (pre-fixed point) という。

順序集合における余代数を後不動点 (post-fixed point) という。

代数または余代数で、可逆なものを不動点 (fixed point) という。

始代数を最小不動点 (least fixed point) という。(Lambek の定理より、これは不動点である。)

終余代数を最大不動点 (greatest fixed point) という。(Lambek の定理より、これは不動点である。)

定理 **4.4** (Knaster-Tarski).  $(A, \leq)$  を完備束とし、  $f: A \to A$  を単調写像 (順序集合間の関手) とする。このとき、このとき、f は最小不動点と最大不動点を持つ。

(より一般に、不動点の集合が再び完備束となることが知られているが、ここでは上の事実のみ使う。)

**Proof.** 全ての前不動点の交わりを  $\mu f$  とおく。  $\mu f$  もまた前不動点である。したがって  $\mu f$  の定義より、これは始代数 (最小不動点) である。

### 5 部分対象

定義 **5.1** (部分対象の擬順序集合).  $A \in \mathbb{C}$  とする。 A の部分対象 (subobject) とは、  $\mathbb{C}$  の対象と射の組 (I,i) であって、 $i:I \hookrightarrow A$  となるものである。( $\hookrightarrow$  は mono 射であることを意味する。)

スライス圏  $\mathbb{C}/A$  を A の部分対象に制限した充満部分圏を  $\mathrm{Mono}(A)$  と書く。

定理 5.2. Mono(A) は擬順序クラスである。

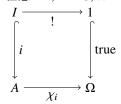
Proof. どの並行射も等しいことは、mono 射の性質から導かれる。

定義 5.3 (部分対象の順序集合). Mono(A) を同値類で割って順序集合としたものを Sub(A) と書く。

定義 5.5 (初等トポス). C の部分対象分類子 (subobject classifier) とは、 C の対象と射の組 (Ω, true) であって、

以下の条件を満たすものである。

- true:  $1 \to \Omega$  である。ただし、 $1 \in \mathbb{C}$  は  $\mathbb{C}$  の終対象とする。
- 任意の  $I, A \in \mathbb{C}, i: I \hookrightarrow A$  に対し、以下の図式



を引き戻しとして成立させるような  $\chi_i$  がただ 1 つ存在する。ただし、  $!:I \to 1$  は終対象に対する唯一の射のこととする。

 ${\bf C}$  が初等トポス (elementary topos)、あるいは単にトポス (topos) であるとは、 ${\bf C}$  が有限極限と指数対象と部分対象分類子を持つことである。

例 5.6. Set はトポスである。より一般に、[I,Set] もトポスである。 Set を有限集合に限定したものもトポスである。

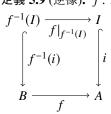
定理 5.7. C がトポスであるとき、これが局所小であることと整冪であることは同値である。

Proof. 略

定理 5.8. C が完備で局所小なトポスであるとき、任意の  $A \in C$  に対し、 Sub(A) は完備束である。

*Proof.* C が完備だから、 C/A も小極限を持つ。忠実充満関手は極限を反映するから、 Sub(A) も小極限を持つ。 C が整冪である、すなわち Sub(A) が小さいことから、 Sub(A) は順序集合の意味で完備 (交わり完備半束) であることがわかる。したがって、 Sub(A) は完備束である。

定義 5.9 (逆像).  $f: B \rightarrow A, i: I \hookrightarrow A$  とするとき、以下の引き戻し



を I の f による逆像 (inverse image) と呼ぶ。

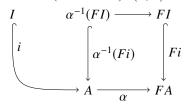
## 6 整礎余代数

整礎余代数について議論するときは、以下を仮定する。

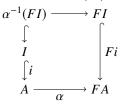
- C は圏である。
- $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$  は自己関手である。
- C は逆像を持つ。

- F は mono 射を mono 射に写す。
- F は逆像を逆像に写す。

定義 6.1 (整礎余代数).  $(A,\alpha)$  を F-余代数とし、(I,i) を A の部分対象とする。以下の引き戻し図式



において、 $\alpha^{-1}(Fi)$ がiを経由する、すなわち



となるとき、(I,i) は帰納的 (inductive) であるという。

帰納的な部分対象が  $(A, id_A)$  と同型なものに限られる (すなわち、(I,i) が帰納的ならi が可逆である) とき、 $(A,\alpha)$  は整礎 (well-founded) であるという。

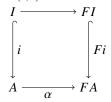
定義 **6.2** (反礎代数). 双対的に、F-代数  $(A, \alpha)$  が  $\mathbb{C}^{op}$  で整礎余代数であるとき、 $(A, \alpha)$  を反礎代数 (anti-founded algebra) という。

定理 6.3. [3] C が完備で局所小なトポスであるとき、 C の再帰的余代数は整礎余代数である。

Proof.  $(A, \alpha)$  を 再帰的 F-余代数とする。

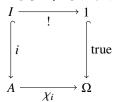
関数  $\triangleright$ : Sub(A)  $\rightarrow$  Sub(A) を、 $\triangleright$ (I) =  $\alpha^{-1}(FI)$  と定義すると、これは単調写像になっている。 Sub(A) は完備束だから、 $\triangleright$  の最小不動点が存在する。これを (I,i) とおく。

(I,i) が  $\triangleright$  の不動点であるというのは、すなわち

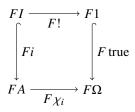


という引き戻し図式が存在することに他ならない。

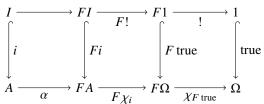
さらに、 C はトポスであるから、以下の引き戻し図式



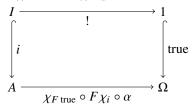
が存在する。 F は逆像図式を保存すると仮定しているから、上の図式を



と持ち上げても、引き戻し図式となる。これらを連結し、さらに $\chi_{F \, true}$ を定義する図式を繋げると

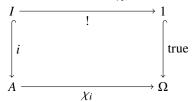


全体が一つの引き戻しになっている。つまり、

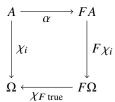


である。

ところで、これは $\chi_i$ を定義する図式である

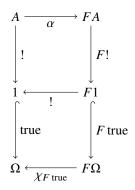


に他ならない。したがって、 $\chi_i$ の唯一性から、 $\chi_{F \, true} \circ F \chi_i \circ \alpha = \chi_i$ 



がわかる。これは $\chi_i$ が余代数-代数準同型であることを意味している。

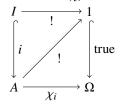
一方、以下の図式



も可換となるため、true o! もまた余代数-代数準同型である。

 $(A, \alpha)$  は再帰的余代数だから、 true  $\circ! = \chi_i$  である。

つまり、 $\chi_i$  の引き戻し図式は、以下の図式



のように縮退する。Aが錐をなすことを使えば、iが可逆であることがすぐにわかる。

i が可逆であることから、(I,i) は Sub(A) の最大元であることがわかった。

ここで、 $(A,\alpha)$  が整礎であることを示すために、(I',i') を帰納的な部分対象とする。(I',i') が帰納的であるというのは、言い換えると、これが Sub(A) 内で  $\triangleright$  の前不動点になっていることに他ならない。

ところで、(I,i) は最小不動点だったから、 $(I,i) \leq (I',i')$  である。したがって (I',i') もまた  $\operatorname{Sub}(A)$  の最大元である。言い換えれば、i' は可逆である。

以上により、 $(A, \alpha)$  が整礎であることが示された。

# 参考文献

- [1] Venanzio Capretta, Tarmo Uustalu, and Varmo Vene. Corecursive algebras: A study of general structured corecursion. In Marcel Vinicius Medeiros Oliveira and Jim Woodcock, editors, *Formal Methods: Foundations and Applications, 12th Brazilian Symposium on Formal Methods, SBMF 2009, Gramado, Brazil, August 19-21, 2009, Revised Selected Papers*, volume 5902 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 84–100. Springer, 2009.
- [2] Gerhard Osius. Categorical set theory: a characterization of the category of sets. *J. Pure Appl. Algebra*, 4:79–119, 1974.
- [3] Paul Taylor. *Practical Foundations of Mathematics*, volume 59 of *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, 1999.