再帰的余代数いろいろ

原 将己

2017 年 10 月 15 日

1　代数と余代数

以下、 $\mathbf{C}$ は圏とし、$F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ は自己関手とする。

定義 1.1 (代数、余代数)**.** C の対象と射の組 (A, α) であって $\alpha\colon FA \to A$ となるものを F-**代数** *(F-algebra)* と呼ぶ。

C の対象と射の組 (A, α) であって $\alpha\colon A \to FA$ となるものを F-**余代数** *(F-coalgebra)* と呼ぶ。

F-代数 (A, α) から (B, β) への準同型とは、 $h\colon A \to B$ であって $\beta \circ Fh = h \circ \alpha$ となるもののことである。F-代数とその準同型のなす圏を $\mathrm{Alg}(F)$ と書く。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "h"'] & FA \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "Fh"] \\ B & FB \arrow[l, "\beta"] \end{tikzcd}$$

F-余代数 (A, α) から (B, β) への準同型とは、 $h\colon A \to B$ であって $\beta \circ h = Fh \circ \alpha$ となるもののことである。F-余代数とその準同型のなす圏を $\mathrm{Coalg}(F)$ と書く。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "h"'] & FA \arrow[d, "Fh"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & FB \end{tikzcd}$$

定義 1.2 (余代数-代数準同型)**.** F-余代数 (A, α) から F-代数 (B, β) への**余代数-代数準同型** *(coalgebra-to-algebra homomorphism)* とは、 $h\colon A \to B$ であって、 $\beta \circ Fh \circ \alpha = h$ となるもののことである。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "h"'] & FA \arrow[d, "Fh"] \\ B & FB \arrow[l, "\beta"] \end{tikzcd}$$

定義 1.3 (始代数と終余代数)**.** $\mathrm{Alg}(F)$ の始対象を**始代数** *(initial algera)* という。$\mathrm{Coalg}(F)$ の終対象を**終余代数**

(terminal coalgebra, final coalgebra) という。

定義より、始代数と終余代数は (存在するならば) 同型を除いて一意である。

定義 1.4 (再帰的余代数と余再帰的代数)**.** 余代数であって、任意の代数への準同型が一意に存在するものを**再帰的** F**-余代数** *(recursive F-coalgebra)* という。本資料では再帰的余代数からなる $\mathrm{Coalg}(F)$ の充満部分圏を $\mathrm{RCA}(F)$ と表記する。

代数であって、任意の余代数からの準同型が一意に存在するものを**余再帰的** F**-代数** *(corecursive F-algebra)* という。本資料では余再帰的代数からなる $\mathrm{Alg}(F)$ の充満部分圏を $\mathrm{CRA}(F)$ と表記する。

注意 1.5. 再帰的余代数と始代数の普遍性は良く似ている。実際、 α が可逆のとき、この 2 つの定義は (α の向きを互いに逆にすることで) 同値になる。

同様に、余再帰的代数と終余代数の定義も、 α が可逆のときに同値になる。

2 Lambek の定理

定理 2.1 (Lambek)**.** 始代数 (A, α) の α は常に可逆である。双対的に、終余代数も可逆である。

Proof. 始代数について示す。 (A, α) を始代数とする。このとき $(FA, F\alpha)$ も代数だから、代数の準同型 ($h\colon A \to FA$ であって $F\alpha \circ Fh = h \circ \alpha$ となるもの) が存在する。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "h"] & FA \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "Fh"] \\
FA & FFA \arrow[l, "F\alpha"]
\end{tikzcd}$$

h も α も代数の準同型だから、 $\alpha \circ h$ は (A, α) の自己準同型である。一方、 id_A も (A, α) の自己準同型である。始代数からの準同型は一意だから、 $\alpha \circ h = \mathrm{id}_A$ である。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "h"] \arrow[dd, bend right=60, "\mathrm{id}_A"'] & FA \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "Fh"] \arrow[dd, bend left=60, "\mathrm{id}_{FA}"] \\
FA \arrow[d, "\alpha"] & FFA \arrow[l, "F\alpha"] \arrow[d, "F\alpha"] \\
A & FA \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

$\alpha \circ h = \mathrm{id}_A$ と h の準同型性により、 $h \circ \alpha = F\alpha \circ Fh = F\,\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{FA}$ である。

したがって、 h は α の逆射である。 □

系 2.2. 始代数 (の逆射) は再帰的余代数である。双対的に、終余代数 (の逆射) は余再帰的代数である。

定理 2.3. 始代数 (の逆射) は $\mathrm{RCA}(F)$ の終対象である。双対的に、終余代数 (の逆射) は $\mathrm{CRA}(F)$ の始対象である。

Proof. (A, α) を始代数とする。このとき (A, α^{-1}) が $\mathrm{RCA}(F)$ の終対象であることを示す。

$(B, \beta) \in \mathrm{RCA}(F)$ とする。(B, β) から (A, α^{-1}) への代数準同型は、(B, β) から (A, α) への余代数-代数準同型に他ならない。したがって B の再帰性から、代数準同型は一意である。

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d, "h"] & FB \arrow[d, "Fh"] \\
A & FA \arrow[l, "\alpha", "\simeq"']
\end{tikzcd}
$$

□

3 逆 Lambek の定理

(逆 Lambek という名前は本資料に固有である。)

補題 3.1. (A, α) が再帰的余代数であるとき、$(FA, F\alpha)$ も再帰的余代数である。双対的に、(A, α) が余再帰的代数であるとき、$(FA, F\alpha)$ も余再帰的代数である。

Proof. (A, α) を再帰的余代数とし、(B, β) を代数とする。

A の再帰性より、A から B への余代数-代数準同型 ($h\colon A \to B$ であって $\beta \circ Fh \circ \alpha = h$ となるもの) が一意に存在する。これを用いて $f = \beta \circ Fh$ と定義する。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "h"] & FA \arrow[d, "Fh"] \arrow[dl, "f"] \\
B & FB \arrow[l, "\beta"]
\end{tikzcd}
$$

この f は $\beta \circ Ff \circ F\alpha = \beta \circ F(\beta \circ Fh \circ \alpha) = \beta \circ Fh = f$ を満たす。したがって f は FA から B への余代数-代数準同型である。

$$
\begin{tikzcd}
 & FA \arrow[r, "F\alpha"'] \arrow[dl, "f"] \arrow[d, "Fh"] & FFA \arrow[dl, "Ff"] \arrow[d, "FFh"] \\
B & FB \arrow[l, "\beta"] & FFB \arrow[l, "F\beta"]
\end{tikzcd}
$$

逆に $f'\colon FA \to B$ が $\beta \circ Ff' \circ F\alpha = f'$ を満たすとする。$h' = f' \circ \alpha$ とおくと、$\beta \circ Fh' \circ \alpha = \beta \circ Ff' \circ F\alpha \circ \alpha = f' \circ \alpha = h'$ となるから、h' は A から B への余代数-代数準同型である。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "h'"] & FA \arrow[r, "F\alpha"'] \arrow[dl, "f'"] \arrow[d, "Fh'"] & FFA \arrow[dl, "Ff'"] \\
B & FB \arrow[l, "\beta"] &
\end{tikzcd}
$$

A の再帰性から $h' = h$ となる。したがって、$f' = \beta \circ Ff' \circ F\alpha = \beta \circ Fh' = \beta \circ Fh = f$ となる。

以上より FA から B への余代数-代数準同型は一意に存在する。したがって、$(FA, F\alpha)$ は再帰的余代数であ

る。 □

定理 3.2 (逆 Lambek)**.** RCA(F) の終対象は可逆である。双対的に、 CRA(F) の始対象は可逆である。

Proof. (A, α) を RCA(F) の終対象とする。$(FA, F\alpha)$ も再帰的余代数だから、 (A, α) の終性より、FA から A への余代数準同型 ($h\colon FA \to A$ であって $\alpha \circ h = Fh \circ F\alpha$ となるもの) が存在する。

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "F\alpha"'] \arrow[d, "h"] & FFA \arrow[d, "Fh"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & FA \end{tikzcd}$$

h も α も余代数の準同型だから、 $h \circ \alpha$ は (A, α) の自己準同型である。一方、 id_A も (A, α) の自己準同型である。終再帰的余代数への準同型は一意だから、 $h \circ \alpha = \mathrm{id}_A$ である。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dd, bend right=60, "\mathrm{id}_A"'] & FA \arrow[d, "F\alpha"] \arrow[dd, bend left=60, "\mathrm{id}_{FA}"] \\ FA \arrow[r, "F\alpha"'] \arrow[d, "h"] & FFA \arrow[d, "Fh"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & FA \end{tikzcd}$$

$h \circ \alpha = \mathrm{id}_A$ と h の準同型性により、 $\alpha \circ h = Fh \circ F\alpha = F\,\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{FA}$ である。

したがって、 h は α の逆射である。 □

系 3.3. RCA(F) の終対象 (の逆射) は始代数である。双対的に、CRA(F) の始対象 (の逆射) は終余代数である。

参考文献