

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC BỒI DƯỠNG HSG

1 Phần đề bài

1. Giải phương trình: $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = 0$

(HSG Khánh Hòa 2010-2011)

2. Giải phương trình: $\frac{\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 5 \sin x + (2 - \sqrt{3}) \cos x + 3 + \sqrt{3}}{2 \cos x + \sqrt{3}} = 1$

(HSG Thái Bình 2010-2011)

3. Giải phương trình: $\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{\tan x + \cot 2x}} = \sqrt{2} + 2 \sin 2x$

(HSG Phú Thọ 2010 - 2011)

4. Cho phương trình: $(65 \sin x - 56)(80 - 64 \sin x - 65 \cos^2 x) = 0$ (1)

Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có các góc thỏa mãn phương trình (1)

(HSG Hải Phòng 2008 - 2009)

5. Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m$$

(Chọn HSG Đại học Vinh 2008 - 2009)

6. Cho phương trình: $\cos x - \sin x + \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} + m = 0$ (1)

a) Với $m = \frac{2}{3}$ tìm các nghiệm của phương trình (1) trên $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm trên $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$

(HSG Thừa Thiên Huế 2008 -2009)

7. Giải phương trình: $4 \cot^6 x + 3 \left(1 - \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\right)^4 = 7$

(Chọn đội tuyển Hà Tĩnh 2008 - 2009)

8. Cho phương trình: $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x \sqrt{2 - \sin^2 x} = m$.

a) Giải phương trình với $m = 3$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

(Chọn HSG Lam Sơn 2008 - 2009)

9. Giải phương trình: $\sqrt{5 \sin x + \cos 2x} + 2 \cos x = 0$.

(HSG Thái Bình 2005 -2006)

10. Giải phương trình: $4 \sin^2 5x - 4 \sin^2 x + 2 (\sin 6x + \sin 4x) + 1 = 0$

(HSG Đồng Tháp 2007-2008)

11. Giải phương trình: $\frac{2\sqrt{3}}{3} (\tan x - \cot x) = \tan^2 x + \cot^2 2x - 2$

(HSG Đồng Tháp 2008-2009)

12. Giải phương trình: $2 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \sin 2x - 3 \sin 2x + 4 = 0$.

(HSG Thanh Hóa 2002-2003)

13. Giải phương trình: $\sqrt{\sin x} + \sin x + \sin^2 x + \cos x = 1$

(HSG Thanh Hóa 2003 - 2004)

14. Giải phương trình: $4 \cos^2 x - 4 \cos 2x \cos^2 x - 6 \sin x \cos x + 1 = 0$

(HSG Thanh Hóa 2007 - 2008)

15. Giải phương trình: $\frac{\sin x - \cos x}{\sin 3x - \cos 3x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$.

(HSG Đồng Nai 2009 - 2010)

16. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm:

$$1 = (m - 3) (\sin x + \cos x)$$

17. Giải phương trình: $\tan^2 x \cot^2 2x \cot 3x = \tan^2 x - \cot^2 2x + \cot 3x$

18. Giải phương trình: $\frac{(1 - \cos x)^2 + (1 + \cos x)^2}{4(1 - \sin x)} - \tan^2 x \sin x = \frac{1}{2}(1 + \sin x) + \tan^2 x$

19. Giải phương trình: $2 \sin 3x - \frac{1}{\sin x} = 2 \cos 3x + \frac{1}{\cos x}$

20. Giải phương trình: $\cos x + \cos 3x + 2 \cos 5x = 0$

21. Giải phương trình: $\sin \frac{5x}{2} = 5 \cos^3 x \sin \frac{x}{2}$

22. Giải phương trình: $\sin^8 x + \cos^8 x = 2 (\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4} \cos 2x$

23. Giải phương trình: $2 \cos^2 \frac{6x}{5} + 1 = 3 \cos \frac{8x}{5}$

24. Giải phương trình: $8 (\sin^6 x + \cos^6 x) + 3\sqrt{3} \sin 4x = 3\sqrt{3} \cos 2x - 11 \sin 2x + 11$

25. Giải phương trình: $\sqrt{3} \sin 2x (2 \cos x + 1) + 2 = \cos 3x + \cos 2x - 3 \cos x$

26. Giải phương trình: $\frac{4(\sin x + \sqrt{3}\cos x) - 4\sqrt{3}\sin x \cos x - 3}{4\cos^2 x - 1} = 1$

(HSG Hà Tĩnh Lớp 11 2009 - 2010)

27. a) Giải phương trình: $\frac{2\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})\sin x - \cos^3 x}{\sqrt{\sin^3 x - \cos^3 x}} = 0$

b) Tìm m để phương trình $\cos \frac{4x}{x^2 + 1} + \cos \frac{2x}{x^2 + 1} - m = 0$ có nghiệm.

(HSG Hà Tĩnh Lớp 11 2010 - 2011)

28. Cho phương trình: $(m + 3)\sin^3 x + (m - 1)\cos^3 x + \cos x - (m + 2)\sin x = 0$

a) Giải phương trình khi $m = 5$.

b) Xác định các giá trị của tham số m để phương trình có đúng một nghiệm thuộc $\left[\pi; \frac{5\pi}{4}\right]$.

(HSG Hà Tĩnh Lớp 11 2008 - 2009)

29. Giải phương trình: $\tan x + 2\tan 2x + 4\cot 4x = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$

(HSG Hà Tĩnh Lớp 12 2009 - 2010)

30. Tìm các nghiệm thuộc $(0; 2\pi)$ của phương trình: $\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \sin 2x + \cos 2x$

31. Giải phương trình: $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8\sin 2x\cos^2 2x}$

32. Giải phương trình: $\tan^2 2x \tan^2 3x \tan 5x = \tan^2 2x - \tan^2 3x + \tan 5x$

33. Giải phương trình: $(2\cos 2x - 1)\cos x - \sin x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)\sin 3x$

34. Giải phương trình: $\frac{\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}}{1 - \sin x} - \tan^2 x \sin x = \frac{1 + \sin x}{2} + \tan^2 x$

35. Giải phương trình: $3\tan 3x + \cot 2x = 2\tan x + \frac{2}{\sin 4x}$

36. Giải phương trình: $\cos 10x + 2\cos^2 4x + 6\cos 3x \cos x = \cos x + 8\cos x \cos^3 3x$

37. Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

38. Giải phương trình: $1 + \sin \frac{x}{2} \sin x - \cos \frac{x}{2} \sin^2 x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

39. Giải phương trình: $\tan^2 x = \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$

40. Giải phương trình: $\frac{\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}}{\cos x} = 4\sin x$

41. Giải phương trình: $6 \tan x + 5 \cot 3x = \tan 2x$

42. Giải phương trình: $\sin^3 x (1 + \cot x) + \cos^3 x (1 + \tan x) = 2\sqrt{\sin x \cos x}$

43. Giải phương trình: $\tan^2 x = \frac{1 - \cos |x|}{1 - \sin |x|}$

44. Giải phương trình: $\tan x + \tan^2 x + \tan^3 x + \cot x + \cot^2 x + \cot^3 x = 6$

45. Giải phương trình: $3 \tan^2 x + 4 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \tan x - 4 \sin x + 2 = 0$

46. Giải phương trình: $\left(\sin^3 \frac{x}{2} + \frac{1}{\sin^3 \frac{x}{2}} \right)^2 + \left(\cos^3 \frac{x}{2} + \frac{1}{\cos^3 \frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{81}{4} \cos^2 4x$

47. Chứng minh rằng phương trình: $\sin x - 2 \sin 2x - \sin 3x = 2\sqrt{2}$ vô nghiệm.

48. Giải phương trình: $\frac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{4} = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{4 \cos^2 2x + \sin^2 2x}$

49. Giải phương trình: $\sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x$

50. Giải phương trình: $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 + \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right)^2 = 12 + \frac{1}{2} \sin y$

51. Giải phương trình: $\tan^2 x + \tan^2 y + \cot^2 (x + y) = 1$

52. Giải phương trình: $\sin^{2011} x + \cos^{2011} x = 1$

53. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $|1 + 2 \cos x| + |1 + 2 \sin x| = m$

54. Cho phương trình: $(1 - m) \tan^2 x - \frac{2}{\cos x} + 3m + 1 = 0(1)$

a) Giải phương trình khi $m = \frac{1}{2}$

b) Tìm m để phương trình (1) có nhiều hơn một nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

55. Xác định các giá trị của tham số m để hai phương trình sau tương đương:

$$2 \cos x \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

$$4 \cos^2 x - \cos 3x = m \cos x + (4 - m) (1 + \cos 2x)$$

56. Xác định các giá trị của tham số m để hai phương trình sau tương đương:

$$3 \cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2 \sin x \sin 2x$$

$$m \cos 3x + (4 - 8m) \sin^2 x + (7m - 4) \cos x + (8m - 4) = 0$$

57. Cho phương trình: $\cos 3x - \cos 2x + m \cos x - 1 = 0(1)$. Tìm m để (1) có đúng 7 nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$

58. Cho phương trình: $(4 - 6m) \sin^3 x + 3(2m - 1) \sin x + 2(m - 2) \sin^2 x \cos x - (4m - 3) \cos x = 0$

a) Giải phương trình khi $m = 2$

b) Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

59. Xác định các giá trị của tham số m để hai phương trình sau tương đương:

$$2\sin^7 x + (m-1)\sin^3 x + (2m^3 - 2m - 1)\sin x = 0$$

$$2\sin^6 x + (2-m)\cos^2 x + 2m^3 - m - 2 = 0$$

60. Giải phương trình: $\sin 5x - \sin 3x + \sin x + \frac{1}{2} = 0$

61. Giải phương trình: $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1 = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$

62. Giải phương trình: $\cos 6x - \cos 4x + 4\cos 3x + 4 = 0$

63. Giải phương trình: $\cos x \cos 2x \cos 3x + \sin x \sin 2x \sin 3x = 1$

64. Giải phương trình: $\tan^2 x + \tan^2 2x + \cot^2 3x = 1$

65. Giải phương trình: $\frac{1}{\sin x} \sqrt{\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \left(\frac{3\sin^2 x - 4}{\sin^2 x} \right)$

66. Giải phương trình: $\sqrt{3+\sin x} - 1 = \sqrt{2-\sin x}$

67. Giải phương trình: $\sqrt{\cos 4x} + \sqrt{1+\sin 4x} = 2\sqrt{\sin 2x + \cos 2x}$

68. Giải phương trình: $\frac{\cos \frac{2x}{3} - \cos^2 \frac{x}{2}}{\sqrt{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}} = 0$

69. Giải phương trình: $\frac{\cos^4 2x - \cos^2 2x}{\sqrt{\sin 2x}} = 0$

70. Cho phương trình: $3\sqrt{1+\cot x}(2\sin x + \cos x) = m(3\sin x + \cos x) \quad (1)$

a) Giải phương trình khi $m = 5$

b) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

71. Giải phương trình: $(1+\tan x)\cos^3 x + (1+\cot x)\sin^3 x = \sqrt{2\sin 2x}$

72. Giải phương trình: $2\left[\sqrt{\sin x} + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = 1 + \cos 2x$

73. Giải phương trình: $\cos 4x + \cos 3x + \sqrt{\frac{3-\cos 6x}{2}} = 3$

74. Giải phương trình: $\cos x \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} + \cos 3x \sqrt{\frac{1}{\cos 3x} - 1} = 1$

75. Giải phương trình: $(\sqrt{1-\cos 2x} + \sqrt{\cos 2x})\cos 4x = \frac{1}{2}\sin 8x$

76. Giải phương trình: $4\cos 2x(\cos 2x + 1) + \sqrt{1-\cos x} + 1 = 0$

77. Giải phương trình: $\frac{\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{1+\cos x}}{\cos x} = 4\sin x$

78. Cho phương trình: $\sqrt{\cos^2 x - 2 \cos x + 5} + \sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 8} = m$ (1)
 a) Giải phương trình khi $m = 5$.
 b) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.
79. Cho phương trình: $2\cos^2 x \sqrt{3\cos^2 x + 1} = \cos^4 x (3\cos^2 x + 1) - m$. Tìm m để phương trình có nghiệm.
80. Cho phương trình: $\cos x = m \cos^2 \frac{x}{2} \sqrt{1 + \tan \frac{x}{2}}$.
 a) Giải phương trình khi $m = 1$.
 b) Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.
81. Giải phương trình: $\cos^2 2x + 2 \cos 2x - 2\sqrt{2 - \sin x} - \sin x + 4 = 0$
82. Giải phương trình: $\sin x + \cos x = \sqrt{2 + \sin^{2011} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$
83. Giải phương trình: $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2}}$
84. Giải phương trình: $\sin x \sqrt{\frac{1}{\sin x} - 1} + \cos x \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{\sin x + \cos x}$
85. Giải phương trình: $\cos 5x + \cos x = \sin 3x - \cos 3x$
86. Giải phương trình: $(2 \cos 3x + 6 \cos x + 1)^3 = 162 \cos x - 27$
87. Giải phương trình: $\tan x = \cos^2 \left(2x + \frac{5\pi}{12}\right) + \sin^2 \left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + \sin x \sin \left(3x + \frac{5\pi}{6}\right)$.
88. Giải phương trình: $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x \cos 2x \cos 3x + 2$.

2 Phần lời giải