Классическая механика

Орленко Елена Владимировна

2018 год, весенний семестр

Область рассмотрения механики - описание систем в отдаленных масштабах с точки зрения микроскопики.

Кинематика - (?) указание траектории всех частиц системы, механическое описание этих систем, а именно: $\vec{r}_i(t), \vec{v}_i(t)$

Задано: $\ddot{\vec{r}}_i(t) = f(\vec{r}_i(t), \vec{v}_i(t), t$ - система уравнений движения

Задача кинематики: нахождение неизвестной системы

Материальная точка - абстракция, которой мы можем пренебречь (формой, размерами) $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt}\vec{r}_i(t)$

Число независимых степеней свободы не всегда совпадает с числом частиц системы.

Обобщенные координаты системы: $q_1, ..., q_s$ - где s - число степеней свободы.

$\dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt}q_i(t)$

$q_1(t), ..., q_s(t), \dot{q}_1(t), ..., \dot{q}_s(t), t$ - полный набор значений для описания состояния системы: все обобщенные координаты и скорости.

§1 Формализм Лагранжа

1.1 Принцип Гамильтона (наименьшего действия)

Функция Лагранжа: $L = (q_1(t), ..., q_s(t), \dot{q}_1(t), ..., \dot{q}_s(t), t)$

Действие функции Лагранжа: $S = \int\limits_{t1}^{t2} L(q_1(t), ..., q_s(t), \dot{q}_1(t), ..., \dot{q}_s(t), t)dt$. Должны быть известны начальные условия t_1

Существует единственная истинная траектория, по которой будет происходить движение частицы.

Если L - истинная, то S (действие) имеет экстремальное минимальное значение. $q_i(t) + \delta q_i(t)$

Вариация функции – это небольшое изменение значения функции в точке "x", не связанное с изменением аргумента.

$$\begin{gathered} 123 \\ 123 \end{gathered} \tag{1}$$

§2 Функция Лагранжа для свободного движения

2.1 Инерциальные системы

Требования (для данного вида движения):

1. Пространство
   - Однородность (свойства одинаковы во всех точках пространства)
   - Изотропность (одинаково во всех направлениях)
2. Время
   - Однородность (тип движения не зависит от точки отсчета времени)
   - Изотропность (обратимость)

При этом $L(\vec{r}, \vec{v}, t)$:

Однородность пространства: $\vec{r} = \vec{r'} + \vec{a} \Rightarrow L(\cancel{\vec{r}}, \vec{v}, t)$ - не зависит от координаты

Изотропность пространства: $\Rightarrow L(|\vec{v}|, t)$

Однородность времени: $\Rightarrow L(|\vec{v}|, \cancel{t})$

Изотропность времени: выполняется

В итоге $L = L(\upsilon^2)$
$0 = \dfrac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}} \Rightarrow \dfrac{\partial L(\upsilon^2)}{\partial \vec{\upsilon^2}} = \vec{C}$ - градиент в поле скоростей

$\dfrac{\partial L(\upsilon^2)}{\partial \vec{\upsilon}} = \dfrac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}}\dfrac{\partial \upsilon^2}{\partial \vec{\upsilon}} = \dfrac{\partial L(\vec{\upsilon})}{\partial \vec{\upsilon}} * 2\vec{\upsilon} = \text{const}_t$. Скажем, что $\dfrac{\partial L(\vec{\upsilon})}{\partial \vec{\upsilon}} = const = \dfrac{m}{2}$

Первый закон Ньютона (Lex Prima): существуют такие системы отсчета, в котором уравнения движения выглядят наиболее просто, то есть, свободно движущаяся частица имеет постоянную скорость: $\vec{\upsilon} =$const

$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon'} + \vec{u}, \vec{u}$ - скорость движения системы K' относительно K. Если K' - инерциальная, то и K - инерциальная. Закон сложения скоростей (Галилея) действует только для нерелятивистских скоростей. Он также предполагает абсолютность времени (одинаковое течение во всех СО), что неверно в рамках теории относительности.

2.2 Функция Лагранжа для свободно движущейся частицы

Пусть одна СО движется относительно другой с малой скоростью $\vec{\delta}$: $\vec{\upsilon'} = \vec{\upsilon} + \vec{\delta}$. Тогда:
$L(\upsilon'^2) = L(\upsilon^2 + 2\vec{\upsilon}\vec{\delta} + \delta^2) = L(\upsilon'^2) + 2\vec{\upsilon'}\vec{\delta}\frac{\partial L}{\partial \upsilon^2} = L(\upsilon'^2) + \frac{d}{dt}(2\vec{r'}\vec{\delta}\frac{\partial L}{\partial \upsilon^2}$.

Если $\frac{\partial L}{\partial \upsilon^2} = const = \frac{m}{2}$, эти две функции Лагранжа $L(\upsilon^2)$ и $L(\upsilon'^2)$ эквивалентны. $L(\upsilon^2) = \frac{m\upsilon^2}{2}$.

Требование малости $\vec{\delta}$ необязательно: пусть $\vec{\upsilon'} = \vec{\upsilon} + \vec{V}$, тогда $\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\upsilon'^2}{2} + \frac{m\vec{\upsilon}\vec{V}}{2} + \frac{mV^2}{2}$

Обобщенные координаты

Система свободных невзаимодействующих частиц:
$L = ({\upsilon_1}^2, ..., {\upsilon_n}^2) = \sum \frac{m{\upsilon_i}^2}{2}$

Пусть есть обобщенные координаты: $q_1 ... q_k$: можем через них выразить старые координаты $x_i = f_i(q_1, ..., q_n) \rightarrow \dot{x} = \sum \frac{\partial f_{ik}}{\partial q_k}\dot{q}_k$

Тогда $L = \sum \frac{m_i}{2} \sum \frac{\partial f_{ik}}{\partial q_k}\dot{q}_k \sum \frac{\partial f_{il}}{\partial q_l}\dot{q}_l = \sum \frac{1}{2}\dot{q}_k\dot{q}_l \sum \frac{m_i}{2}\frac{\partial f_{il}}{\partial q_k}\frac{\partial f_{ik}}{\partial q_k} = \sum \frac{a_{kl}}{2}\dot{q}_k\dot{q}_l$

Замечание: что такое функция действия? $L = \frac{m\upsilon^2}{2}$

$S = \int_{t1}^{t2} \frac{m\upsilon^2}{2} dt = \frac{m}{2}\int_{t1}^{t2} \left(\frac{dl}{st}\right)^2 = \upsilon\frac{m}{2}\int_{t1}^{t2}\frac{dl}{dt}dl$ - проще всего двигаться прямолинейно, а не по дуге

Длина дуги и скорость в

1. декартовой системе: $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$

   $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2$

2. цилиндрической системе: $(dl)^2 = (dz)^2 + (d\rho)^2 + (\rho\dot{\varphi})^2$

   $\upsilon^2 = \upsilon_z^2 + (\dot{\rho})^2 + (\rho\dot{\varphi})^2$

3. сферической системе: ...

§3 Функция Лагранжа системы взаимодействующих частиц

Движение под действием консервативной силы $\vec{F}$ Для свободного движения:
$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^2} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$
Могут быть другие компоненты:

$L = T + ...; T = \frac{mv^2}{2}$

Тогда $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v^2} = \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} \to \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial \vec{r}}$
При этом $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = 0$