

**Übungen 2 zur Modellierung und Simulation III (WS 2012/13)**

[http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20122013/  
vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html](http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20122013/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html)

---

**Aufgabe 2.1** (Verdünnung einer Lösung)

Ein Zylinder enthalte 2 kg Wasser, und es seien 50 g Saccharose darin gelöst. Durch eine Röhre fließt 10 g Wasser pro Minute in den Zylinder, während durch eine andere Röhre 10 g Wasser pro Minute – einschließlich eines bestimmten Saccharoseanteils – abfließt. Wie vermindert sich die Masse der Saccharose als Funktion der Zeit?

**Aufgabe 2.2** (Analytische Lösung von gew. Differentialgleichungen)

Berechnen Sie die analytische Lösung  $c(t)$ ,  $v_1(t)$  und  $v_2(t)$  der folgenden Differentialgleichungen für beliebigen Anfangswert.

(i)  $\dot{c} = c^2$

(ii)  $\dot{v}_1 = \frac{v_1}{t}$

(iii)  $\dot{v}_2 = -\frac{v_2}{t}$

**Aufgabe 2.3** (Graphische Analyse)

Analysieren Sie die folgenden Differentialgleichungen graphisch: Finden Sie alle Fixpunkte, klassifizieren Sie deren Stabilität und skizzieren Sie den Graph der Lösungen für verschiedene Anfangswerte.

(i)  $\dot{x} = 4x^2 - 16$

(ii)  $\dot{y} = y - y^2$

(iii)  $\dot{z} = 1 + \frac{1}{2} \cos(z)$

**Aufgabe 2.4** (Tumor-Wachstum)

Das Wachstum eines Tumors kann mit dem Gompertz-Gesetz

$$\dot{N} = -aN \ln(bN)$$

besser modelliert werden als mit dem logistischen Wachstumsgesetz nach Verhulst

$$\dot{N} = a(N_{\max} - N)N.$$

Dabei ist  $N > 0$  proportional zur Anzahl der Tumorzellen;  $a$ ,  $b$  und  $N_{\max}$  sind positive Parameter.

1. Skizzieren und vergleichen Sie die Graphen von  $N$  für beide Wachstumsgesetze.
  2. Interpretieren Sie  $a$ ,  $b$  und  $N_{\max}$  biologisch.
  3. Klassifizieren Sie die Fixpunkte der beiden Modelle mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse.
-