Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Marc Fein
Jochen Siehr

Übungen 7 zur Modellierung und Simulation III (WS 2012/13)
http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20122013/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html

---

Aufgabe 7.1 (Analytische Fixpunktanalyse)
Wir betrachten nun 2-dimensionale nichtlineare Systeme $\dot{y} = F(y)$, wobei

$$y := (y_1, y_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad F(y) := (F_1(y), F_2(y))^{\mathrm{T}}.$$

Das Van-der-Pol System ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1. \end{aligned}$$

1. **Fixpunktbestimmung:**
   Bei einem Fixpunkt ist die rechte Seite Null, d. h.

   $$F(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} y_2 \\ \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

   Wir lösen beide Gleichungen in (1) gleichzeitig: Aus der oberen folgt $y_2 = 0$, eingesetzt in die unter folgt $y_1 = 0$. Der einzige Fixpunkt ist demnach $y^* = (0, 0)^{\mathrm{T}}$.

2. **Fixpunktcharakterisierung (Be wise, linearize):**
   Bilde die Jacobi-Matrix von $F(y)$:

   $$F'(y) = \begin{bmatrix} \partial_{y_1} F_1 & \partial_{y_2} F_1 \\ \partial_{y_1} F_2 & \partial_{y_2} F_2 \end{bmatrix}_{|(y_1, y_2)^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu y_1 y_2 - 1 & \mu - \mu y_1^2 \end{bmatrix}.$$

   Setzte den Fixpunkt ein und erhalte

   $$F'(y^*) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}}_{:=A}.$$

   Nun berechnen wir die Eigenwerte (EW) von A:

   $$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \mu - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \mu\lambda + 1 \overset{!}{=} 0.$$

   Lösen der quadratischen Gleichung führt auf

   $$\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}.$$

   Folgende Fälle bzgl. des Parameters μ ergeben sich für den *Radikanden* $\mathcal{R} := \mu^2 - 4$

   - $\mathcal{R} > 0 \to \mu > \pm 2$: Die EW sind reell und haben unterschiedliche Vorzeichen (**Sattelpunkt**) oder dasselbe Vorzeichen (**Knoten**).
   - $\mathcal{R} < 0$: komplex konjugierte EW (**Spiralen und Zentren**). Haben beide EW negative Realteile, dann ist der Punkt **stabil**. Sind die Eigenwerte rein imaginär, so haben wir **neutral-stabile Zentren**

- $\mathcal{R} = 0$: Diese Parabel stellt die Grenze zw. Knoten und spiralen dar. Sterne (Sternknoten) und degenerierte Knoten befinden sich auf jener Parabel und μ bestimmt die Stabilität der Knoten und Spiralen.

Definiere für eine komplexe Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ mit $\Re(a)$ den *Realteil* und mit $\Im(a)$ den *Imaginärteil* von z. D. h. also ganz speziell ():

μ	**Fixpunkt**	**Eigenwert**
$0 < \mu < 2$	Instabiler Fokus	$\Re(\lambda_1), \Re(\lambda_2) > 0$
$-2 < \mu < 0$	Stabiler Fokus	$\Re(\lambda_1), \Re(\lambda_2) < 0$
$\mu > 2$	Instabiler Knoten	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$
$\mu < -2$	Stabiler Knoten	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$
$\mu = 2$	Instabiler Stern	$\Im(\lambda_1), \Im(\lambda_2) = 0, \Re(\lambda_1), \Re(\lambda_2) > 0$
$\mu = -2$	Stabiler Stern	$\Im(\lambda_1), \Im(\lambda_2) = 0, \Re(\lambda_1), \Re(\lambda_2) < 0$
$\mu = 0$	Elliptisch	$\Re(\lambda_1), \Re(\lambda_2) = 0$