Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Marc Fein
Jochen Siehr

Übungen 6 zur Modellierung und Simulation III (WS 2012/13)

`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20122013/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html`

Aufgabe 6.1 (Numerische Berechnung von Phasenportraits mehrdimensionaler nichtlinearer Systeme)
Implementiere das *klassische Runge-Kutta* Verfahren 4. Ordnung

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4)$$

wobei

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t\, F(Y_k) \\ k_2 &= \Delta t\, F(Y_k + \tfrac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= \Delta t\, F(Y_k + \tfrac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= \Delta t\, F(Y_k + k_3) \end{aligned}$$

für folgende Modellprobleme und untersuche damit das Verhalten in Abhängigkeit von verschiedenen Anfangswerten und Parametern:

a) **Van-der-Pol Oszillator** (überführt in ein System erster DGL)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1 \end{aligned}$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$. Wie ändert sich die Eigenschaft des Fixpunktes $(0,0)^{\mathrm{T}}$ für $-2.5 \leq \mu \leq 2.5$?

b) **Lotka-Volterra Beute-Räuber-Modell**

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1(\alpha - \beta y_2) && \text{Beute} \\ \dot{y}_2 &= -y_2(\gamma - \delta y_1) && \text{Räuber} \end{aligned}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

(Hierbei wurde die Abhängigkeit der Variablen bzgl. der Zeit aus Gründen der Anschaulichkeit fallen gelassen.)
Wie sind die Parameter in den jeweiligen Modellen zu verstehen?

Aufgabe 6.2 (Steife AWP: Explizite vs implizite Verfahren)
Steife AWP stellen besondere Herausforderungen an numerische Verfahren. Ein einfaches steifes AWP ist das *Davis-Skodje* System

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) &= -\gamma y_2(t) + \frac{(\gamma - 1)y_1(t) + \gamma y_1(t)^2}{(1 + y_1(t))^3} \qquad \gamma > 0 \\ y_1(0) &= 3 \\ y_2(0) &= 1.5. \end{aligned} \tag{1}$$

Sei $\gamma = 60$. Löse (1) auf dem Zeithorizont $[0,1]$ für die äquidistante Schrittweite $\Delta t = 0.03$ wie folgt:

a) Expliziter Euler $Y_{k+1} = Y_k + \Delta t\, F(Y_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$. Was stellt man bzgl. der exakten Lösung

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 \exp(-t) \\ y_2(t) &= c_2 \exp(-\gamma t) + \frac{c_1}{c_1 + \exp(t)} \end{aligned}$$

fest? Bestimme hierfür zunächst c_1, c_2 in Abhängigkeit des Anfangswertes. Welches Verhalten sieht man für $\Delta t \to 0$?

b) *Impliziter Euler* $Y_{k+1} = Y_k + \Delta t\, F(Y_{\mathbf{k+1}}), k = 0, 1, 2, \ldots$. Dies erfordert jedoch das Lösen des nichtlinearen GS in jedem Zeitschritt:

$$G(Y_{k+1}) := Y_{k+1} - Y_k - \Delta t\, F(Y_{k+1}) \stackrel{!}{=} 0$$

welches mit Hilfe des Newton Verfahrens

$$\begin{aligned} G'(Y_{k+1}^{[\nu]})\delta &= -G(Y_{k+1}^{[\nu]}), \quad Y_{k+1}^{[\nu]+1} = Y_{k+1}^{[\nu]} + \delta, \qquad [\nu] = 0, 1, 2, \ldots \\ Y_{k+1}^{[0]} &= Y_k \end{aligned}$$

gelöst werden kann. Implementiere den impliziten Euler analog zu Teil a) und benutze dabei die analytische Jacobimatrix. Was fällt auf im Vgl. zum expliziten Euler?
