Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Marc Fein
Jochen Siehr

Lösungen 3 zur Modellierung und Simulation III (WS 2012/13)

`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20122013/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html`

Lösungsskizze 3.1 (Potentiale)
Allgemeines Vorgehen:

1. $-\frac{dV}{dx} = f(x)$
2. $V(x) = \int \frac{dV}{dx} dx = -\int f(x)dx + C$
3. Setze $C = 0$
4. Finde Extremalstellen x^*, d.h. $V'(x^*) = 0$
5. Untersuche diese:

   $V''(x^*) > 0$ ➜ Minimalstelle ➜ stabiler Fixpunkt
   $V''(x^*) < 0$ ➜ Maximalstelle ➜ instabiler Fixpunkt

   - Alternativ: Erstelle Schaubild von $V(x)$

a)

$$\begin{aligned}
-\frac{dV}{dx} &= -x^2 + x \\
V(x) &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C, \qquad C := 0 \\
V'(x) &= x^2 - x = x(x-1) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0, 1 \\
V''(x) &= 2x - 1 \\
&\Rightarrow V''(0) = -1 \text{ Maximalstelle (instabiler Fixpkt)}, V''(1) = 1 \text{ Minimalstelle (stabiler Fixpunkt)}
\end{aligned}$$

b)

$$V(x) = \cosh(x) + C,\ V'(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x^* = 0$$
$$V''(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}|_{x^*} = \frac{1}{2} \text{ ➜ lok. Mini. (stabiler Fixpunkt)}$$

c)

$$V(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + C,\ V'(x) = x^3 - x = x(x^2-1) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x^*_{1,2,3} = 0, 1, -1$$
$$V''(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow V''(0) = -1 \text{ Maxi. (instabil)},\ V''(1) = V''(-1) = 2 \text{ Mini. (bistabil)}$$

Lösungsskizze 3.2 (Numerisches Lösen einer gew. DGL)
Teil c): Diskretisierungsfehler: Wir betrachten das AWP

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

Taylorentwicklung der exakten Lösung nach t_0 und Benutzung von (1) zum Vereinfachen führt auf:

$$\begin{aligned} x(t_1) \equiv x(t_0 + \Delta t) \approx x(t_0) + \dot{x}(t_0)\Delta t + \ddot{x}(t_0)\frac{\Delta t^2}{2} + x^{(3)}(t_0)\frac{\Delta t^3}{6} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \\ = x_0 + f(x_0)\Delta t + f_x(x_0)f(x_0)\frac{\Delta t^2}{2} + \big(f_{xx}(x_0)(f(x_0))^2 + (f_x(x_0))^2 f(x_0)\big)\frac{\Delta t^3}{6} \\ + \mathcal{O}(\Delta t^4). \end{aligned}$$

Ähnlich verfahren wir mit der Iterationsvorschrift für das Trapezverfahrens:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{\Delta t}{2} f(x_0) + \frac{\Delta t}{2} \underbrace{f(x_0 + \Delta t f(x_0))}_{\text{Taylor um } x_0} \\ &= x_0 + \frac{\Delta t}{2} f(x_0) + \frac{\Delta t}{2}\big(f(x_0) + \Delta t f(x_0) f_x(x_0) + \mathcal{O}(\Delta t^2)\big) \\ &= x_0 + \Delta t f(x_0) + \frac{\Delta t^2}{2} f(x_0) f_x(x_0) + \mathcal{O}(\Delta t^3). \end{aligned}$$

Also

$$|x(t_1) - x_1| \approx \frac{1}{6}\big(f_{xx}(x_0)(f(x_0))^2 + (f_x(x_0))^2 f(x_0)\big)\Delta t^3 \in \mathcal{O}(\Delta t^3).$$

Da wir $N = t_{\text{end}}/\Delta t \in \mathcal{O}(\Delta t^{-1})$ äquidistante Schritte voranschreiten, folgt $|x(t_N) - x_N| \in \mathcal{O}(\Delta t^2)$. $\square$
