Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Marc Fein
Jochen Siehr

Übungen 10 zur Modellierung und Simulation III (WS 2012/13)

`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20122013/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html`

Aufgabe 10.1 (Immer noch FitzHugh–Nagumo-Modell)
Das Modell ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u) - v + I_{\mathrm{a}} \\ \dot{v} &= \varepsilon\,(u - \gamma v + \delta) \\ f(u) &:= u\,(a-u)\,(u-1) \end{aligned}$$

mit Spannung u und kombinierter Kraft v. Außerdem ist I_{a} eine Stromstärke, die von außen angelegt ist. Die Parameterwerte sind $\varepsilon = 0.01$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 0$ und $a = -1$.

Wir wiederholen Aufgabe 9.2:
Ändern Sie im Modell den Parameter δ auf $\delta = 0.5$, und wählen Sie $I_{\mathrm{a}} = 0$. Setzen Sie die Anfangswerte auf die Werte im Gleichgewicht. Variieren Sie die angelegte Spannung $I_{\mathrm{a}} \in [0, 0.04]$ und simulieren Sie das System: In diesem Zustand heißt das System *erregbar*. Das Aktionspotential von Nervenzellen kann so simuliert werden.

Aufgabe 10.2 (FitzHugh–Nagumo-Modell: Bifurkationsanalyse)
Wir wollen den Wert von I_{a} bestimmen, bei dem eine Hopf-Bifurkation auftritt. Dafür nutzen wir das Programm MatCont. Um das Programm zu nutzen, müssen Sie sich auf bart.mathematik.uni-ulm.de einloggen.
Öffnen Sie eine Shell, und wählen Sie eine Zahl `XX`$\in [01, \ldots, 10]$. Loggen Sie sich auf bart ein, und ändern Sie das Passwort, damit Ihnen niemand in die Quere kommt.

```
> ssh -Y studentXX@bart.mathematik.uni-ulm.de
> passwd
```

Starten Sie einen vnc-Server und einen vnc-Viewer auf bart, wobei `YY` $:=$ `XX` $+ 20$.

```
> vncstart
> vncviewer :YY
```

Falls Ihnen gnome nicht zusagt, können Sie in ~/.vnc/xstartup auch lxde als graphische Oberfläche wählen. (Dann mit `vnckill` den vnc beenden und neu starten.)
Öffnen Sie ein Terminal. Da Sie an einem Mac sitzen, müssen sie noch eine Umgebungsvariable exportieren, damit MATLAB startet.

```
> export LC_ALL="en_US.utf8"
> cd Programmierung/matlab/matcont5p2
> m
```

In MATLAB starten Sie MatCont mit `matcont`. Damit sind die Vorbereitungen erledigt, und die Bifurkationsanalyse kann beginnen.

1. Geben Sie das Modell in MatCont ein. Dafür wählen Sie im Menü `Select>System>New`. Das Modell könnte so aussehen:

2. Jetzt geben Sie Anfangswerte für die Variablen und Parameter via `Type>Initial Point>Point` ein. Außerdem können Sie die Integrations-Optionen ändern. Klicken Sie *nicht* auf Select Cycle!

3. Wir brauchen noch ein Plot-Fenster: Wählen Sie `Window>Graphic>2Dplot`. Auf den Achsen sollten u und v aufgetragen werden. Passen Sie mit `Layout>Plotting region` die Plotgrenzen an.

4. Jetzt soll das System nahe ans Gleichgewicht integriert werden. Wählen Sie `Compute>Forward`.

5. Wenn Sie vorher `Window>Numeric` geöffnet hätten, könnten Sie die numerischen Werte verfolgen. Geben Sie also neue Anfangswerte in den "Starter" ein, und integrieren Sie das System erneut mit `Compute>Forward`.

6. Sollte obiger Schritt nicht funktionieren, geben Sie `why` in MATLAB ein.

7. Wir wollen mit einem Fortsetzungs-, Pfadverfolgungs- oder Homotopieverfahren den Fixpunkt verfolgen, wenn sich der Parameter I_a ändert. Dafür muss das Gleichgewicht als Startwert geladen werden. Öffnen Sie `Select>Initial Point`. Wählen Sie einen Wert aus, der nahe am Gleichgewicht liegen sollte. (Anklicken, `Select` drücken.)

8. Wählen Sie `Type>Initial Point>Equilibrium`. Das Hauptfenster zeigt an: `EP_EP(1)`, d. h. "starte am Gleichgewicht, um ein Gleichgewicht zu verfolgen". Sie bekommen zusätzlich ein Starter- und ein Continuer-Fenster.

9. Im Starter aktivieren Sie den Parameter, der variiert werden soll.

10. Im Continuer können Sie die maximale Schrittweite etwas kleiner wählen, z. B.

11. Ändern Sie das Plot-Fenster via `Layout>...`, so dass I_a gegen u aufgetragen wird.

12. Nutzen Sie `Compute>Forward` oder `Compute>Backward`, um die Kurve der Nullstellen der rechten Seite der Differentialgleichung für verschiedene Werte von I_a zu erhalten. Benutzen Sie auch den Stop- und Resume-Knopf im neu aufgegangenen Fenster. MatCont zeigt eine Hopf-Bifurkation mit dem Symbol H im Plot an.

13. Ändern Sie im Numeric-Fenster über `Window>Layout`, dass auch die Eigenwerte der Jacobi-Matrix angezeigt werden. Verfolgen Sie, dass an der Bifurkation tatsächlich die Eigenwerte die imaginäre Achse überschreiten. Bei welchem Wert von I_a^H tritt die Bifurkation also wirklich auf?