

# TINF FORMULE

## SIGNALI

$$E = I(Ri^2(t)) = I\left(\frac{u^2(t)}{R}\right), \quad P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} Ri^2(t) dt$$

## Periodični signali

Fourierov razvoj:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \text{ gdje } c_k = \frac{1}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

## Snaga

$$\begin{aligned} P &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{kT_0} \int_0^{kT_0} |x(t)|^2 dt \right] \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \end{aligned}$$

$$\text{Sinusni signal: } P = \frac{A^2}{2}$$

$$\text{Slijed pravokutnih impulsata: } P = A^2 \frac{\tau}{T}$$

## Fourierovi parovi

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) \leftrightarrow -j \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

Modulacijsko pravilo:

$$x(t) \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$

## Neperiodični signali

### Energija i snaga

$$\text{Energija} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt, \quad P = \frac{E}{2T}$$

### Spektar

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$X(f) = |X(f)| e^{j\theta(f)}$$

, gdje je

$$|X(f)|$$

amplitudni spektar, a

$$\theta(f)$$

fazni spektar.

### Parsevalov teorem

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

### Pravokutni impuls

$$P = 0 \quad (\text{beskonačnost}), \quad E = A^2 \tau$$

## Slučajni signali

Srednja vrijednost

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x, t) dx$$

Autokorelacijska funkcija

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

Autokovarijanca

$$C_X(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - \mu_x(t_1)][X(t_2) - \mu_x(t_2)]\}$$

## Pravila očekivanja (E)

$$E[c] = c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad E[cX] = cE[X]$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y], \quad E[XY] = E[X]E[Y]$$

## Stacionarnost

Uvjeti:

- $E[X(t)] = \mu_x$

- $\forall t_1, t_2, \quad R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2) = R_x(\tau)$

Pri tome:  $R_x$  je parna funkcija,  $|R_x(\tau)| \leq R_x(0) \geq 0$

Srednja snaga:

$$P = E[X^2(t)] = R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df$$

$$E[X] = 0 \longrightarrow P = \text{var}(X) = \sigma_X^2$$

## Spektralna gustoća snage

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad \left[ \frac{W}{Hz} \right] \\ R_X(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f \tau} df \end{aligned}$$

## Bijeli šum

$W(t)$  je bijeli šum ako:

$$R_W(\tau) = C_1 \delta(\tau) \quad \wedge \quad C_W(\tau) = C_2 \delta(\tau)$$

Svojstva:

$$\mu_W = 0, \quad R_W(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau) = N_0/2$$

$$S_W(f) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = \sigma^2 = N_0/2$$

Gaussova razdioba:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-(x - \mu_X)^2 / (2\sigma_X^2)}$$

## Prijenos

Izlazni signal:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

Prijenosna funkcija:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Amplitudni odziv RC kruga:

$$20 \log \frac{|H(f)|}{|H(0)|} = 20 \log |H(f)|$$

Za idealni filter:

$$|H(f)| = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_g \\ 0, & |f| > f_g \end{cases}$$

Impulsni odziv i prijenosna funkcija:

$$y(t) = x(t) * h(t), \quad Y(f) = X(f)H(f)$$

Amplitudni odziv je parna funkcija, a fazni neparna:

$$|H(-f)| = |H(f)|, \quad \theta(-f) = -\theta(f)$$

Ako je  $X(t)$  stacionarni slučajni proces:

$$\mu_Y = \mu_X H(0), \quad S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2$$

Ako je ulaz  $x(t)$  sa spektrom  $X(f) = |X(f)|e^{j\varphi(f)}$ :

$$Y(f) = |Y(f)|e^{j\vartheta(f)}, \quad |Y(f)| = |X(f)||H(f)|$$

$$\vartheta(f) = \varphi(f) + \theta(f)$$

Amplitudni odziv RC kruga:

$$|H(f)| = \left| \frac{U_{izlaz}(f)}{U_{ulaz}(f)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f R C)^2}}$$

## Uzorkovanje i kvantizacija

Frekvencija uzorkovanja u pomaknutom pojasu:

$$f_u = 2 \frac{B + B_0}{M + 1}, \quad M_m = \left\lfloor \frac{B_0}{B} + 1 \right\rfloor$$

Idealno uzorkovanje:

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s), \quad f_s = \frac{1}{T_s}$$

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_s)$$

Nyquistov kriterij (baznopojasni):

$$f_s \geq 2B$$

Varijanca kvantizacijskog šuma (srednja snaga):

$$\text{var}(Q) = \sigma_Q^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{3} m_{\max}^2 2^{-2r}, \quad \Delta = \frac{2m_{\max}}{L}$$

Omjer srednje snage signala i snage kvantizacijskog šuma:

$$\frac{S}{N} = \frac{S}{\sigma_Q^2} = \left( \frac{3S}{m_{\max}^2} \right) 2^{2r}$$

U decibelima (samo za sinusni signal):

$$\left( \frac{S}{N_q} \right)_{dB} = 1.76 + 6.02r$$

Brzina prijenosa:

$$R = f_u r \quad \left[ \frac{\text{bit}}{s} \right]$$

## Entropija u kontinuiranom kanalu

$f$  su funkcije gustoće vjerojatnosti.

$$H(X) = E[-\log f_X(X)] = - \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log f_X(x) dx$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= E[-\log f_{X|Y}(X|Y)] \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log \left( \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \right) dx dy \end{aligned}$$

$$H(X, Y) = E[-\log f(X, Y)]$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log f(x, y) dx dy$$

$$I(X; Y) = E[-\log f_{Y|X}(Y|X)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log \left( \frac{f(x, y)}{f_X(x)f_Y(y)} \right) dx dy$$

Prijenos u prisutnosti aditivnog šuma:

$$f_x(y|x) = f_x(z + x|x) = \phi(z)$$

Kapacitet:

$$\begin{aligned} C &= \max I(X; Y) = \max \left[ \frac{1}{2} \ln[2\pi e(\sigma_X^2 + \sigma_Z^2)] - \frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma_Z^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \quad \left[ \frac{\text{nat}}{s} \right] \end{aligned}$$

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \quad [\text{bit/simbol}]$$

## Maksimizacija entropije u kontinuiranom kanalu

- $x \in [a, b] \rightarrow f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad H(X) = \ln(b-a) \quad [\text{nat/sym}]$
- $x \geq 0 \wedge E[X] = a > 0 \rightarrow f(x) = \frac{1}{a} e^{-x/a}, \quad H(X) = \ln(ae) = 1 + \ln a$
- $E[X] = 0 \wedge \exists \sigma_X \rightarrow f$  Gaussova,  $H(X) = \ln(\sigma_X \sqrt{2\pi e})$

## Inf. kapacitet AWGN kanala

Za kanal s  $f_u = 2B$ ...

$$n = 2B \longrightarrow B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \quad [\text{bit/s}], \quad C = 2BD$$

$E_b$ , srednja energija po svakom bitu...

$$\text{uz... } E_b = S/R_b, \quad S = E_b C, \quad \frac{C}{B} = \log_2 \left( 1 + \frac{E_b}{N_0} \frac{C}{B} \right)$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{C/B} - 1}{C/B}, \quad \lim_{B \rightarrow \infty} \left( \frac{E_b}{N_0} \right) = \log(2), \quad \lim_{B \rightarrow \infty} C = \frac{S}{N_0} \log_2 e$$

## Konverzije

Pojačanje. U decibele (dB):  $x \rightarrow 10 \log_{10}(x)$

## Jedinice

$$c_k \leftrightarrow \left[ \frac{V}{Hz} \right], \quad S_X(f) \leftrightarrow \left[ \frac{W}{Hz} \right]$$

## ZAŠTITNO KODIRANJE

### Blok kodovi

Sindrom i dekodiranje:

$$\text{sindrom: } y \cdot H^\top, \quad y = x + e \Rightarrow \text{sindrom} = e \cdot H^\top$$

dekodiranje: (1) izraunaj sindrom, (2) odredi  $e$ , (3)  $x = y \oplus e$

Provjera ispravnosti:  $x \cdot H^\top = 0$ .

alternativno: sindrom u  $H^\top \Rightarrow$  invertiraj odgovarajući bit

Udaljenost i brzina:

$$d(K) = \min(d(x, y) \mid x \neq y), \quad R(K) = \frac{k}{n} \leq 1$$

Otkrivanje/ispravljanje:

$$d(K) \geq s + 1, \quad d(K) \geq 2t + 1$$

Vrijedi za princip dekodiranja najbližim susjedom. Kugla kodne riječi:

$$\{y \in V(n) \mid d(x, y) \leq r\}$$

Hammingova međa (q-arni kod):

$$M \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} (q-1)^i \leq q^n$$

Perfektni kod ako vrijedi jednakost. Standardni oblik:

$$G = [I_k \mid A], \quad H = [-A^\top \mid I_{n-k}]$$

Vjerojatnost ispravnog dekodiranja u BSK (vjerojatnost pogreške  $p_g$ ):

$$P(K) = \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} p_g^i (1-p_g)^{n-i}$$

Standardni niz: prvi redak su kodne riječi, prvi stupac jednostruki vektori pogreške, ostalo je  $\oplus$ . Najveći broj kodnih riječi (binarno):  $M \leq 2^n$ . Sindromsko dekodiranje: ako  $H$  ima stupce od 1 do  $2^r - 1$ , sindrom označuje poziciju bita koji treba invertirati. Ako je sindrom stupac u  $H^\top$ , invertira se odgovarajući bit. Broj vektora na udaljenosti točno  $r$  od  $x$ :  $\binom{n}{r}$ .

### Paritet (vertikalna i horizontalna)

$$R_i = x_{i,1} \oplus \dots \oplus x_{i,k}, \quad C_i = x_{1,i} \oplus \dots \oplus x_{m,i}$$

$$R = R_1 \oplus \dots \oplus R_m = C_1 \oplus \dots \oplus C_k$$

Ako je  $R = 1$ , greška je na sjecištu retka i stupca.

### Linearni binarni blok kodovi (LBBK)

- $K \subseteq V(n)$  je LBBK ako  $\forall x, y \in K : x \oplus y \in K$  i  $a \cdot x \in K$ ,  $a \in \mathbb{F}_2$ .
- Težina:  $w(x)$  je broj jedinica u riječi.
- Udaljenost:  $d(K) = \min(w(x) \mid x \neq 0)$ .
- Oznaka:  $[n, k, d]$ .
- Kodiranje gen. matricom:  $x = d \cdot G$  (matrično množenje).
- Ako je  $G$  u standardnom obliku, prvih  $k$  bitova je poruka  $d$ .
- Vektor pogreške:  $e = y \oplus x$  (primljeni minus poslani vektor).
- Iz  $G$  se dobije  $H$ : ako je  $G = [I_k \mid A]$ , tada je  $H = [-A^\top \mid I]$ .
- Dualni kod:  $K^\perp = \{y \in V(n) \mid \forall x \in K, x \cdot y = 0\}$ .
- Ekvivalentni kodovi: (1) zbrajanje redaka, (2) zamjena redaka, (3) zamjena stupaca.

### Hammingovi kodovi

Neka je  $r \geq 2$  i  $H$  matrica dimenzija  $r \times (2^r - 1)$  čiji su stupci svi nenulti binarni vektori. Tada je  $H$  matrica provjere pariteta koda  $\text{Ham}(r)$ , a kod je LBBK

$$[2^r - 1, 2^r - 1 - r], \quad d = 3, \quad t = 1, \quad s = 2$$

Konstrukcija  $G$  iz  $H$ :

- Ukloniti stupce na pozicijama potencija broja 2.
- Transponirati dobivenu maticu.
- Stupce staviti na pozicije potencija broja 2 u  $G$ .
- Preostale stupce popuniti jediničnom maticom.

Paritetni (kontrolni) bitovi stavljuju se na pozicije  $2^i$ , ostale pozicije su bitovi poruke. Ako  $G$  nije u standardnom obliku, stupce treba zamijeniti (i zapisati redoslijed), potom formirati  $H = [-A^\top \mid I]$  i primijeniti iste zamjene stupaca. Provjera ispravnosti:  $x \cdot H^\top = 0$  (općenito  $G \cdot H^\top = 0$ ).

### Ciklični kodovi

Uvjeti:

- $\forall a(x), b(x) \in K \Rightarrow a(x) + b(x) \in K$
- $\forall a(x) \in K, \forall r(x) \in R_n \Rightarrow r(x)a(x) \bmod (x^n - 1) \in K$   
 $x^n - 1 = g(x)h(x), \quad \deg g = r, \quad \deg h = k = n - r, \quad g(0) = 1$
- $g(x)$  uvijek stupnja  $r$  (najmanji stupanj koda) i sadrži član  $x^0 = 1$ .
- Konstrukcija  $G$ : u zadnji redak staviti koeficijente  $g(x)$ , svaki gornji redak dobiva se rotacijom ulijevo.

Kodiranje (CRC):

$$r(x) = d(x) \cdot x^r \bmod g(x), \quad c(x) = d(x) \cdot x^r + r(x)$$

Dekodiranje:

$$\text{sindrom primljene riječi: } x^r \cdot y(x) \bmod g(x) = x^r \cdot e(x) \bmod g(x)$$

Postupak: izračunati sindrome za sve polinome pogreške, izračunati sindrom primljene poruke, pa ispraviti bit na poziciji koja odgovara sindromu. Sistematsko kodiranje / dekodiranje:

$$\text{Kodiranje } c(x) = d(x) \cdot x^r + [d(x) \cdot x^r \bmod g(x)]$$

$$\text{Prijenos } y(x) = c(x) + e(x)$$

$$\text{Dekodiranje (sindrom)} = y(x) \cdot x^r \pmod{g(x)}$$

$$\rightarrow y'(x) = y(x) - e(x)$$

$$\rightarrow d(x) = \frac{y'(x)}{x^r}$$

Nesistematsko:

$$\text{Kodiranje } c(x) = d(x) \cdot g(x)$$

$$\text{Prijenos } y(x) = c(x) + e(x)$$

$$\text{Dekodiranje } \#e(x) \rightarrow \frac{y(x)}{g(x)}, \quad \text{inače } \frac{y(x) - e(x)}{g(x)}$$

### Konvolucijsko kodiranje

- Parametri  $(n, k, L)$ :  $n$  izlaza,  $k$  ulaza,  $L = m + 1$  granična duljina (m je broj memorijskih stanja posmačnog registra).
- Brzina koda:  $R = \frac{k}{n}$ .
- Generatori:  $h_i^{(j)}$  su funkcionalni generatori; u  $h_i^{(j)}$  je 1 na mjestima gdje je i-ti ulaz spojen na j-ti izlaz (xor), inače 0.
- Izlaz j-tog kodera:  $c_j(t) = \sum_{i=1}^k u_i(t) * h_i^{(j)}(t)$  nad  $\mathbb{F}_2$ .
- Prijenosna funkcija kodera (D-domena):  $T^{(j)}(D) = \sum_{i=0}^m h_i^{(j)} D^i$ , a vektorski  $\mathbf{T}(D) = [T^{(1)}(D) \dots T^{(n)}(D)]$ .
- Generirajuća matrica  $G$  ima  $n$  stupaca; prvi redak je  $[G_1 \ G_2 \ \dots \ G_m \ 0 \ \dots \ 0]$ , a svaki sljedeći redak je isti, ali zarotiran udesno za 1.
- $G_l$  je podmatrica dimenzija  $k \times n$ , s redcima koji slijede nizove  $h_{i,l}^{(j)}$  za  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

## Faktorizacija polinoma (mod 2)

$n$	$x^n - 1$	faktorizacija
1	$x^1 - 1$	$(x + 1)$
2	$x^2 - 1$	$(x + 1)^2$
3	$x^3 - 1$	$(x + 1)(x^2 + x + 1)$
5	$x^5 - 1$	$(x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
7	$x^7 - 1$	$(x + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$
9	$x^9 - 1$	$(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$
11	$x^{11} - 1$	$(x + 1)(x^{10} + x^9 + \dots + x + 1)$
13	$x^{13} - 1$	$(x + 1)(x^{12} + x^{11} + \dots + x + 1)$
15	$x^{15} - 1$	$(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
17	$x^{17} - 1$	$(x + 1)(x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + 1)(x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x + 1)$
19	$x^{19} - 1$	$(x + 1)(x^{18} + x^{17} + \dots + x + 1)$

Za fourierov transformat  $X(f)$  tada vrijedi:

$$|X(f)| \rightarrow 0 \text{ kada } |f| \rightarrow 0$$

Srednja kvadratna pogreška,  $u_{qi}$  kvantizacijske razine:

$$N_q^2 = \sum_{u_{qi}} \int_{u_{qi}-\Delta/2}^{u_{qi}+\Delta/2} (u - u_{qi})^2 f(u) du \quad [V^2]$$

## Entropija slučajnog vektora

$$\begin{aligned} H(\mathbf{X}) &= E[-\log \{X_1, \dots, X_n\}] \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \log [f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)] dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

## Inf. kapacitet AWGN kanala

Pri uzorkovanju:

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{Z}$$

$$E[X_k] = 0, \quad E[X_k^2] = \sigma_{xk}^2$$

$$\phi(\mathbf{z}) = \prod_{k=1}^n \left[ \frac{1}{\sigma_{z_k} \sqrt{2 * \pi}} e^{-z_k^2 / 2\sigma_{z_k}^2} \right]$$

$$H(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = H(\mathbf{Z}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{z}) \log [\phi(\mathbf{z})] = \sum_{k=1}^n \log(\sigma_{z_k} \sqrt{2\pi e})$$

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = H(\mathbf{Y}) - \sum_{k=1}^n \log(\sigma_{z_k} \sqrt{2\pi e})$$

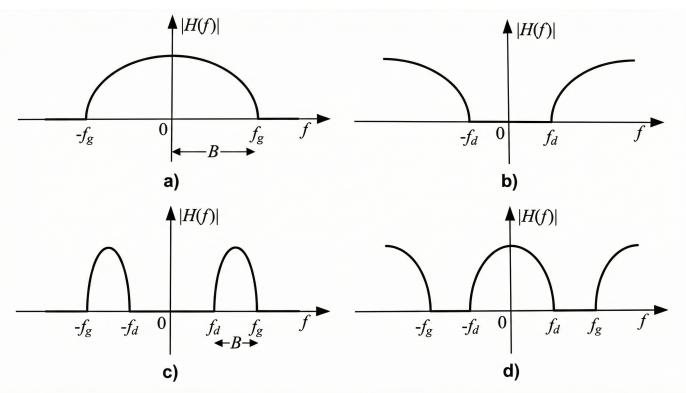
Ako su sve varijance jednake...

$$\begin{aligned} I_{\max}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) &= \frac{n}{2} \log \left( 1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} \right) \quad [\text{bit/simbol}] \\ &= \frac{n}{2} \log \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \end{aligned}$$

## Vjerojatnost

$$\text{Znano } B \text{ tražimo } A : P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

## Slike



## Ostalo

Neka svojstva operatora Fourierove transformacije:

$$\text{Linearnost} \quad \mathcal{F}\{ax + by\} = a\mathcal{F}\{x\} + b\mathcal{F}\{y\}$$

$$\text{Pomak u vremenu} \quad x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

$$\text{Pomak u frekvenciji} \quad e^{j2\pi f_0 t} x(t) \leftrightarrow X(f - f_0)$$

$$\text{Skaliranje} \quad x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\text{Derivacija} \quad \frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

$$\text{Konvolucija} \quad (x * h)(t) \leftrightarrow X(f)H(f)$$

## Tablica integrala

Integral	Rezultat
$\int x \ln x \, dx$	$\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$
$\int \ln x \, dx$	$x \ln x - x + C$
$\int e^{ax} \cos(bx) \, dx$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$
$\int e^{ax} \sin(bx) \, dx$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$
$\int \frac{dx}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$

## Trigonometrijski identiteti

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

## Diracova delta funkcija

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) x(t) dt = x(t_0)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t), \quad \delta(-t) = \delta(t)$$

Riemann-Lebesgue lema na realnom / kompleksnom skupu.  $x$  je  $L^1$  ako:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x(t)| dt < \infty$$