Resume Soal 1 & 2

Qornain Aji
21/481767/TK/53170

Soal 1

Diberikan persamaan $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Apakah terdapat sebuah solusi pada persamaan tersebut? Jelaskan dan berikan alasannya.

Lakukan eliminasi gauss terhadap persamaan tersebut

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{switch row}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

→ pada baris ke 3, terdapat matriks bernilai 0 sedangkan pada baris ke 3 pada vektor b bernilai -3. Tidak terdapat solusi dan matriks merupakan matriks singular.

b. Temukan $\hat{b} \in C(A)$ yang meminimalkan $\| b - \hat{b} \|$.

$$\hat{b} = A\hat{x} = \frac{A\,A^T b}{\underbrace{(A^T A)}_{P}}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\hat{b} = A (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$= A \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 1,6 \\ 4,0 \end{pmatrix}$$

c. Asumsikan bahwa $\xi = b - \hat{b}$ jelaskan hubungan antara ξ dan $C(A)$

$$\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,8 \\ 1,6 \\ 4,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ξ akan tegak lurus dengan $C(A)$ sehingga ξ adalah left nullspace dari matriks A atau $N(A^T)$

Soal 2

a. Tunjukkan bahwa

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ merupakan basis dari R^3

Bisa dilihat dari rank matriks tersebut

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ it is the basis for R^3 //

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ identity basis //

b. Explain why this is not an orthonormal basis for R^3

Semua kolom sudah independent, tinggal membuktikan orthogonal

$v_1 \cdot v_2 = 0$

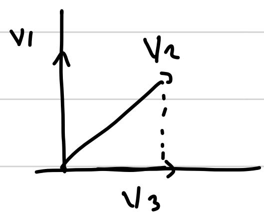
$v_1 \cdot v_3 = 0$

$v_2 \, v_3 = 1 \to$ tidak orthogonal

$$\left.\begin{aligned} \|v_1\| &= \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \\ \|v_2\| &= \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2} \\ \|v_3\| &= \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \end{aligned}\right\} \text{bukan panjang } 1$$

Sehingga matrix tersebut tidak orthonormal

c. Dengan Gram-Schmidt, ubah basis menjadi orthonormal basis untuk R^3



•) $W_1 = V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

•) $W_2 = V_2 - \dfrac{V_2 \cdot W_1}{\|W_1\|^2} \cdot W_1$

$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0$

$W_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$W_3 = V_3 - \dfrac{V_3 \cdot W_1}{\|W_1\|^2} \cdot V_1 - \dfrac{V_3 \cdot W_2}{\|W_2\|^2} \cdot W_2$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -1/3 \end{bmatrix}$

Basis dari orthogonal

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}$$

Normalisasi basis menjadi basis orthonormal

$$\frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e_1$$

$$\frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_2$$

$$\frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{6}}} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = e_3$$

//