Devoir4 IFT2125-A-H19

Student: Qiang Ye (20139927)

Date: 31 Jan 2019

mailto: [samuel.ducharme@umontreal.ca (mailto:samuel.ducharme@umontreal.ca)](mailto:samuel.ducharme@umontreal.ca)

Question 1 Soit $f(n) = n^2,\ g(n) = 2^n,\ h(n) = n^{\lg n},\ e(n) = 9^{n \log_3 n}$, Classez les ensembles $O(f), O(g), O(h), O(e)$ en ordre croissant par inclusion en utilisant uniquement $\subset$ et $=$ (et non pas $\subseteq$).

Answer 1

$$O(f) \subset O(h) \subset O(g) \subset O(e)$$

La preuve est suivante:

Rappel: $\lg n = \log_2 n$ par convention.

Reformule (simplifie) fonctionnes $h(n)$ et $e(n)$:

$$h(n) = n^{\lg n} = (2^{\lg n})^{\lg n} = 2^{\lg^2 n}$$
$$e(n) = 9^{n \log_3 n} = \left(2^{\lg 3^2}\right)^{n \log_3 n} = 2^{(2 \lg 3 \cdot n \log_3 n)} = 2^{2n \lg n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2)'}{(2^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x2^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^{x-2}} = 0$$
$$\Rightarrow f(n) \in O(g(n)), f(n) \notin \Theta(g(n))$$
$$\Rightarrow O(f) \subset O(g) \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{\lg^2 n}} = \lim_{x\to\infty} 2^{x-\lg^2 x} = +\infty$$
$$\Rightarrow g(n) \in \Omega(h(n)), g(n) \notin \Theta(h(n))$$
$$\Rightarrow O(h) \subset O(g) \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{h(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^{\lg n}} = \lim_{x\to\infty} x^{2-\lg x} = 0$$
$$\Rightarrow f(n) \in O(h(n)), f(n) \notin \Theta(h(n))$$
$$\Rightarrow O(f) \subset O(h) \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{e(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{2n \lg n}} = \lim_{x\to\infty} 2^{x-2x \lg x} = \lim_{x\to\infty} 2^{x(1-2 \lg x)} = 0$$
$$\Rightarrow g(n) \in O(e(n)), g(n) \notin \Theta(e(n))$$
$$\Rightarrow O(g) \subset O(e) \tag{4}$$

Lors que on a (1),(2),(3), et (4), on arrive:

$$O(f) \subset O(h) \subset O(g) \subset O(e)$$

Question 2 Soit $a, b \in \mathbb{R}$

$$T(n) = 6T((\lceil \frac{n}{3} \rceil) - 9T(\lceil \frac{n}{9} \rceil) \qquad n > 3$$
$$T(1) = a$$
$$T(3) = b$$

(1) Trouver la solution exacte de la récurrence pour $n \in P_3 = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}, n = 3^k\}$.

(2)Trouver, si possible, l'ordre exacte de $T(n)$, sinon O et Ω, pour $n \in P_3$.

(3) Que peut-on dire de $T(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ (son ordre)?

Dans tous les cas, réponses vont dépendre de a et de b et il faudra peut-être trouver des conditions sur les valeurs de ces derniers.

Ici, comme ailleurs en algortihmique, on cherche le meilleur ordre que l'on puisse trouver. Dire que, par exemple, $3n^2 + 2n + 10 \in O(2^{2^n})$ n'est pas très utile, on cherche $3n^2 + 2n + 10 \in O(n^2)$, etc.

Answer 2

(1) Lors que $n \in P_3$, soit

$$n = 3^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

Soit

$$S(k) = T(3^k)$$

Lors que $k > 1$, on a

$$\begin{aligned} S(k) = T(n) &= 6T((\lceil \frac{n}{3} \rceil) - 9T(\lceil \frac{n}{9} \rceil) \\ &= 6T(3^{k-1}) - 9T(3^{k-2}) \\ &= 6S(k-1) - 9S(k-2) \end{aligned}$$

On a la polynôme caractéristique:

$$p(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

Alors, $S(k)$ peut être réécrit comme:

$$\begin{gathered} S(k) = c_1 3^k + c_2 k 3^k \\ \Leftrightarrow \\ T(n) = c_1 n + c_2 n \log_3 n \end{gathered} \tag{f.1}$$

$$\begin{aligned} T(1) &= c_1 + c_2 \cdot 1 \cdot \log_3 1 = c_1 = a \\ T(3) &= 3c_1 + 3c_2 \log_3 3 = 3(c_1 + c_2) = b \\ c_1 &= a,\ c_2 = \frac{b}{3} - a \end{aligned} \tag{f.2}$$

Lors que on a (f.1) et (f.2), on arrive:

$$T(n) = an + (\frac{b}{3} - a)\, n \log_3 n$$

Lors que $T(n) > 0$ pour $\forall n \in P_3$, il faut que: $a > 0, b > 0$, and

$$\frac{b}{3} - a > 0 \Leftrightarrow b > 3a$$

(2)

$$T(n) \in \Theta(n \lg n)$$

On preuve que $T(n) \in O(n \lg n)$ et $\lim_{n \to \infty} \frac{T(n)}{n \lg n} \in \mathbb{R}^+$

Partie 1

$$\begin{aligned} T(n) &= an + (\frac{b}{3} - a)\, n \log_3 n \\ &= an + \frac{\frac{b}{3} - a}{\lg 3} n \lg n \\ &\leq an \lg n + \frac{\frac{b}{3} - a}{\lg 3} n \lg n, (\text{ lors que } n \geq 2) \\ &= \left(a + \frac{\frac{b}{3} - a}{\lg 3}\right) n \lg n \end{aligned}$$

C'est-à-dire: $\exists n_1 = 2, c_1 = a + \frac{\frac{b}{3} - a}{\lg 3}, \forall n \geq n_1, T(n) \leq c_1 n \lg n$, alors:

$$T(n) \in O(n \lg n)$$

Partie 2

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{n\lg n}\in\mathbb{R}^+ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n\lg n}{an+(\frac{b}{3}-a)\,n\log_3 n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{a}{\lg n}+\frac{\frac{b}{3}-a}{\lg 3}}\\ &= \frac{\lg 3}{\frac{b}{3}-a}\\ &\in\mathbb{R}^+\end{aligned}$$

C'est-à-dire:

$$T(n)\in\Theta(n\lg n)$$

(3)

Quand $n\in P_3$, on a $T(n)\in O(n\lg n)$, on a:

$$T(n)\in\Theta(n\lg n\mid P_3)$$

Soit $n_0=1,\forall n>n_0$, on a:

$$\begin{aligned}T(n+1)-T(n) &= \Big(a(n+1)+(\frac{b}{3}-a)(n+1)\log_3(n+1)\Big)-\Big(an+(\frac{b}{3}-a)n\log_3 n\Big)\\ &= a+(\frac{b}{3}-a)n\log_3\frac{n+1}{n}+(\frac{b}{3}-a)\log_3(n+1)\\ &>0\\ &\Rightarrow T(n+1)>T(n)\end{aligned}$$

C'est-à-dire que $n_0=1$ est la constante prouvant que $T(n)$ est e.n.d.

Soit $f(n)=n\lg n,\ b=3,\exists n_b=b,c_b=2b,\forall n\geq n_b$, on a:

$$f(b\ n)=bn\lg(bn)=bn(\lg b+\lg n)\leq 2bn\lg n=c_bf(n)$$

Alors, on peut dire que $f(n)=n\lg n$ est 3-lisse.

Soit $b=3,n_0=1,n_1=2,n_b=b,c_1=a+\frac{\frac{b}{3}-a}{\lg 3},c_b=2b,$

$\exists n_2=\max\{n_0,n_b,n_1\},\forall n\geq n_2,$

$$\begin{aligned}T(n) &\leq T(b\cdot b^{\lfloor\log_b n\rfloor}) && \text{(e.n.d. de } T(n))\\ &\leq c_1f(b\cdot b^{\lfloor\log_b n\rfloor}) && (Tn\in O(f(n)))\\ &\leq c_1c_bf(b^{\lfloor\log_b n\rfloor}) && (f(n)\text{ est b-lisse})\\ &\leq c_1c_bf(n) && \text{(e.n.d. de } f(n))\end{aligned}$$

Finalement, on peut dire que

$$T(n)\in O(f)=O(n\lg n)$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, On a déja:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{n\lg n}\in\mathbb{R}^+$$

On peut dire que pour $n\in\mathbb{N}$,

$$T(n)\in\Theta(n\lg n)$$