Devoir02 IFT2125-A-H19

Etudiant: Qiang Ye (20139927)

Date: 16 Jan 2019

mailto: samuel.ducharme@umontreal.ca

Question

Prouvez que $\lg(n!) \in \Theta(n \lg n)$. Rappel: $\lg x = \log_2 x$.

Answer

Soit functionnes $f,\ g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$.

On a,

$$f(x) \in \Theta(g(x)) \Leftrightarrow f(x) \in O(g(x)) \wedge f(x) \in \Omega(g(x))$$

Alors,

$$\lg(n!) \in \Theta(n\lg n) \Leftrightarrow \lg(n!) \in O(n\lg n) \wedge \lg(n!) \in \Omega(n\lg n)$$

Partie 1: prouver que $\lg(n!) \in O(n\lg n)$

$$\begin{aligned}
\lg(n!) &= \lg\Big(\prod_{i=1}^{n} i\Big) \\
&= \lg\Big(n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1\Big) \\
&\leq \lg(n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n \cdot n) \\
&= \lg(n^n) \\
&= n\lg n
\end{aligned}$$

$\exists\ n_0 = 1, c = 1$, tel que: $\forall n \geq n_0$, on a,

$$\lg(n!) \leq c\ n\lg n$$

On peut dire,

$$\lg(n!) \in O(n\lg n)$$

Partie 2: prouver que $\lg(n!) \in \Omega(n\lg n)$

$$\begin{aligned}
\lg(n!) &= \lg(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \cdots (n-1) \cdot n) \\
&= \lg 1 + \lg 2 + \cdots + \lg\lceil \frac{n}{2} \rceil + \cdots + \lg(n-1) + \lg n \\
&\geq 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots + \lg\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lg(\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1) + \cdots + \lg(n-1) + \lg n \\
&= \lg\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lg(\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1) + \cdots + \lg(n-1) + \lg n \\
&\geq \lg\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lg\lceil \frac{n}{2} \rceil + \cdots + \lg\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lg\lceil \frac{n}{2} \rceil \\
&= \lceil \frac{n}{2} \rceil \lg\lceil \frac{n}{2} \rceil \\
&\geq \frac{n}{2}\lg\frac{n}{2}
\end{aligned}$$

Lorsque $n \geq 4$, on a

$$\frac{n}{2} \geq \sqrt{n}$$

, alors,

$$\begin{aligned}\lg(n!) &\geq \frac{n}{2}\lg\frac{n}{2}\\ &\geq \frac{n}{2}\lg(\sqrt{n})\\ &= \frac{1}{4}n\lg n\end{aligned}$$

$\exists\ n_0 = 4, c = \frac{1}{4}$, tel que: $\forall n \geq n_0$, on a,

$$\lg(n!) \geq c\ n\lg n$$

On peut dire,

$$\lg(n!) \in \Omega(n\lg n)$$

Finalement, on peut dire,

$$\lg(n!) \in \Theta(n\lg n)$$