**《数值计算方法》 实验报告**



**插值算法的实现**

**学 号 3022244012**

**姓 名 覃千尖**

**学 院 智算学部**

**专 业 计科1班**

**年 级 2022**

**任课教师 冯伟**

**2024年 10 月 6 日**

目录

[一． 实验内容及要求 2](#_Toc870252697)

[二． 实验结果分析 2](#_Toc1973442409)

[（一） 目标函数与插值函数的对比分析 2](#_Toc1909123795)

[1. 范德蒙德多项式插值 3](#_Toc1090452738)

[2. 拉格朗日插值 6](#_Toc613724068)

[3. 牛顿插值 8](#_Toc496454335)

[4. 分段线性插值 10](#_Toc934039750)

[5. 分段三次Hermite插值 13](#_Toc300618680)

[（二） 各个插值函数之间的对比分析 15](#_Toc1616617016)

[1. 未出现龙格现象下的五种插值法对比： 15](#_Toc519086068)

[2. 龙格现象及其解决方案： 19](#_Toc1200970762)

1. 实验内容及要求

实现**范德蒙德多项式插值**、**拉格朗日插值**、**牛顿插值**、**差分牛顿差值、分段线性插值**、**分段三次Hermite插值**，并完成各方法之间的对比。

输入：插值区间，参数作为标准函数的值，参数作为采样点的个数，参数作为实验点的个数。

要求：在区间上均匀采集个采集点，利用这个采集点，分别使用范德蒙德多项式插值、拉格朗日插值、牛顿插值、分段线性、分段三次Hermite插值进行插值，求出。

选取个点作为实验点，计算在这个实验点上插值函数与目标函数的平均误差。同时对比各插值方法之间的精度差异。

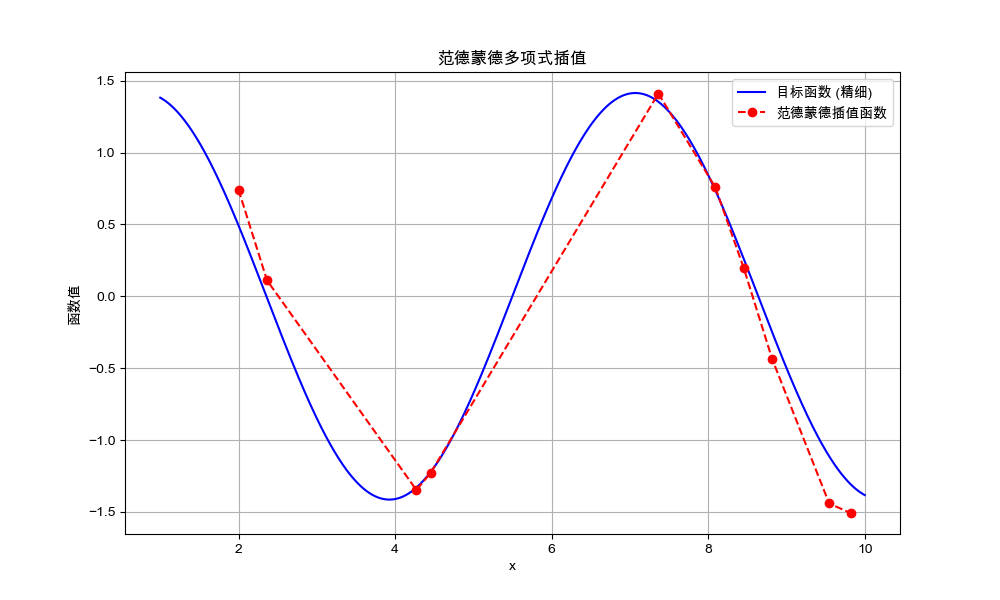
输出：对比函数曲线，平均误差

1. 实验结果分析
2. 目标函数与插值函数的对比分析
3. 初始条件： a = 1, b = 10,
4. 自变量：采样点n取5、10、15、20，观察在不同采样点个数的情况下，五种插值法的误差。
5. 范德蒙德多项式插值

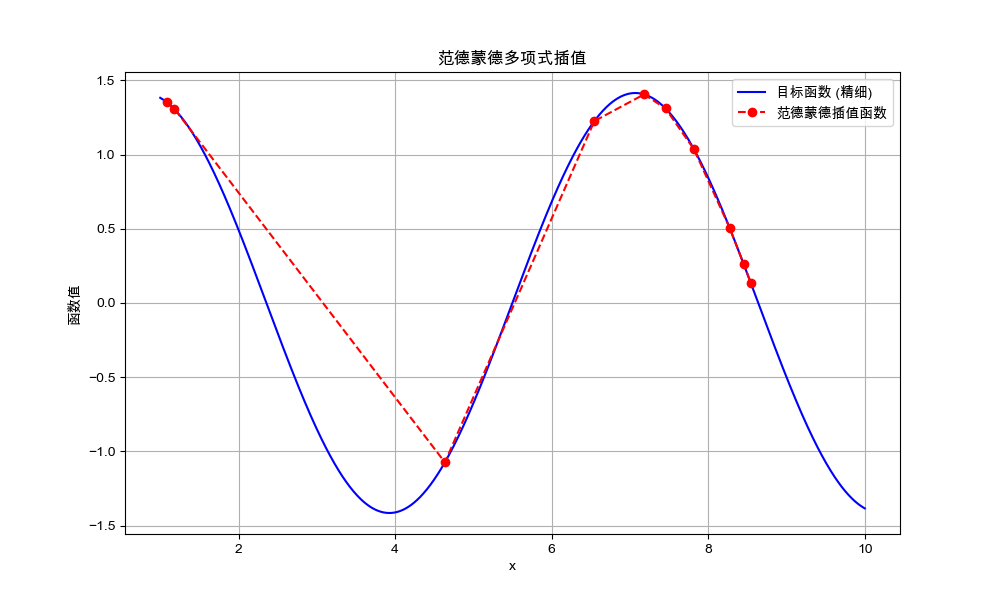
1）对比函数曲线：

取m = 10为随机采样实验点

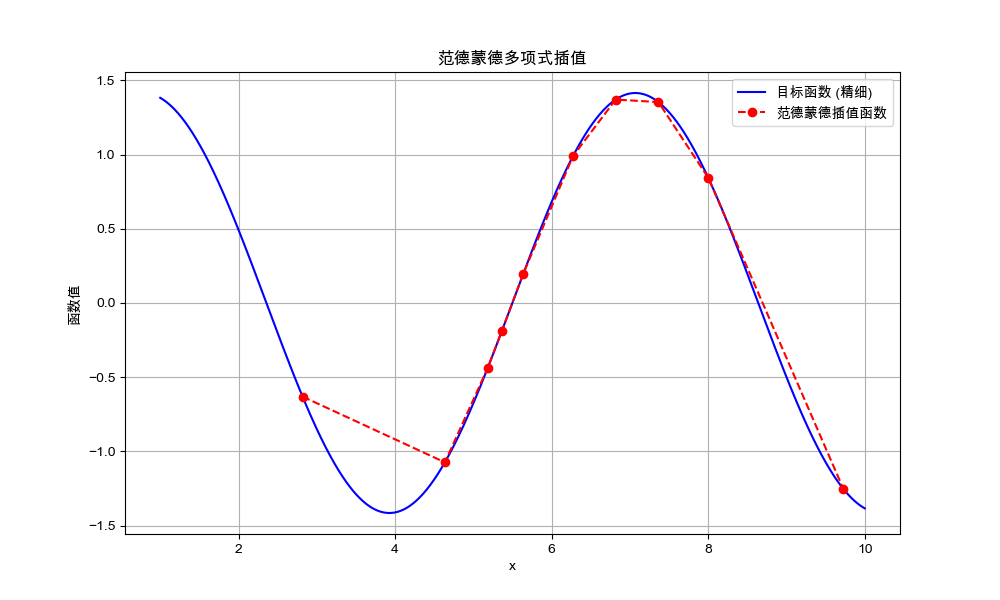
n = 5:



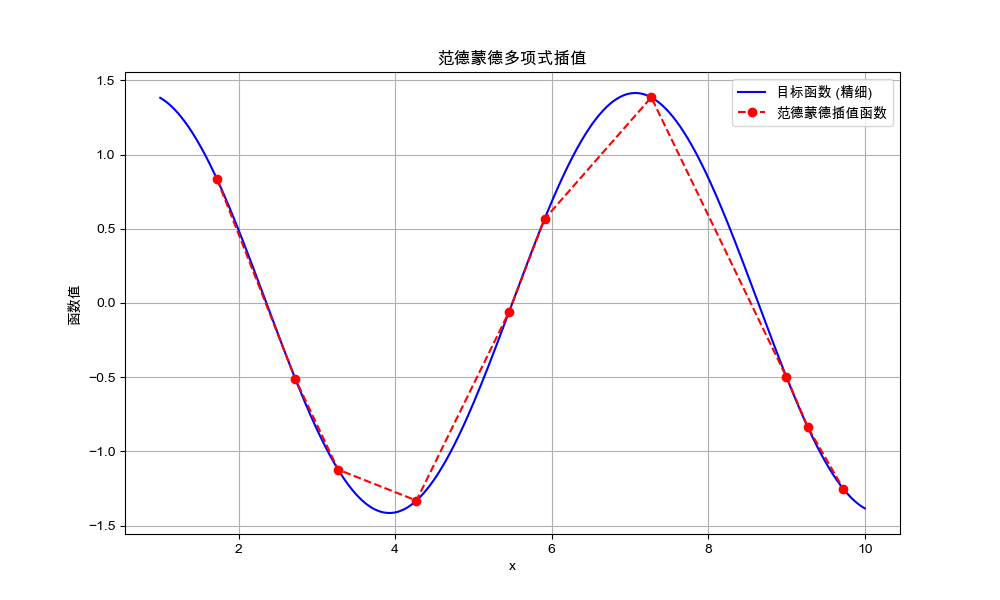
n = 10:



n = 15:



n = 20:



观察图像显然发现，n = 5时的插值函数与目标函数的差距是肉眼可见的，到了n = 20时，m个实验点计算得出的插值函数值与目标函数误差很小，几乎重合。

2）误差分析：

|  |  |
| --- | --- |
| 平均误差  n | | Rn | |
| 5 | 0.08475874125135963 |
| 10 | 0.0005683148171391928 |
| 15 | 4.2644646758294155e-09 |
| 20 | 2.0264287470261878e-11 |

显然，实验结果证明，采样点越多，范德蒙德插值法计算误差越小，仅仅是从5个采样点到20个采样点，误差就从数量级降低到了数量级。

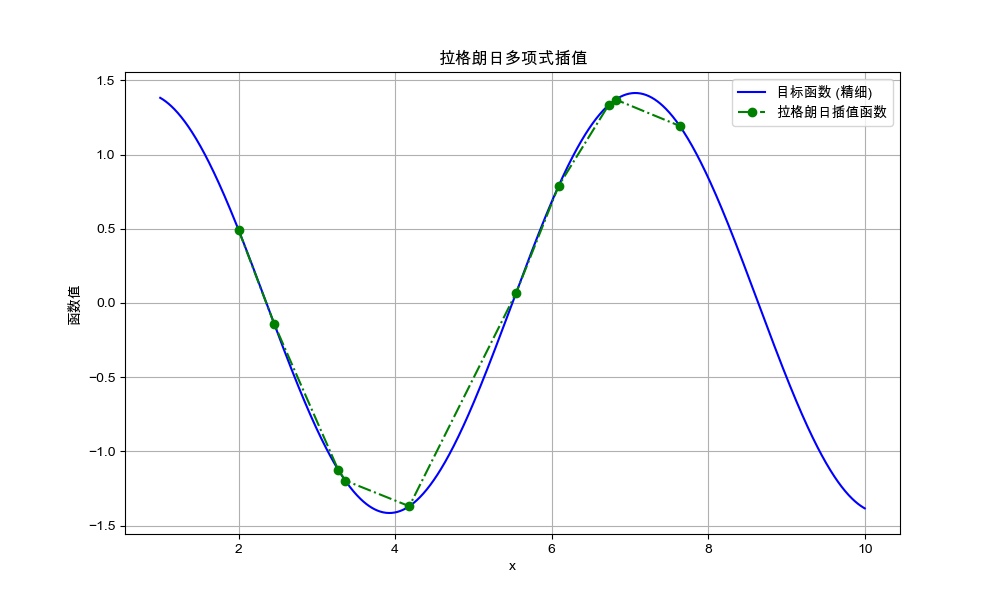
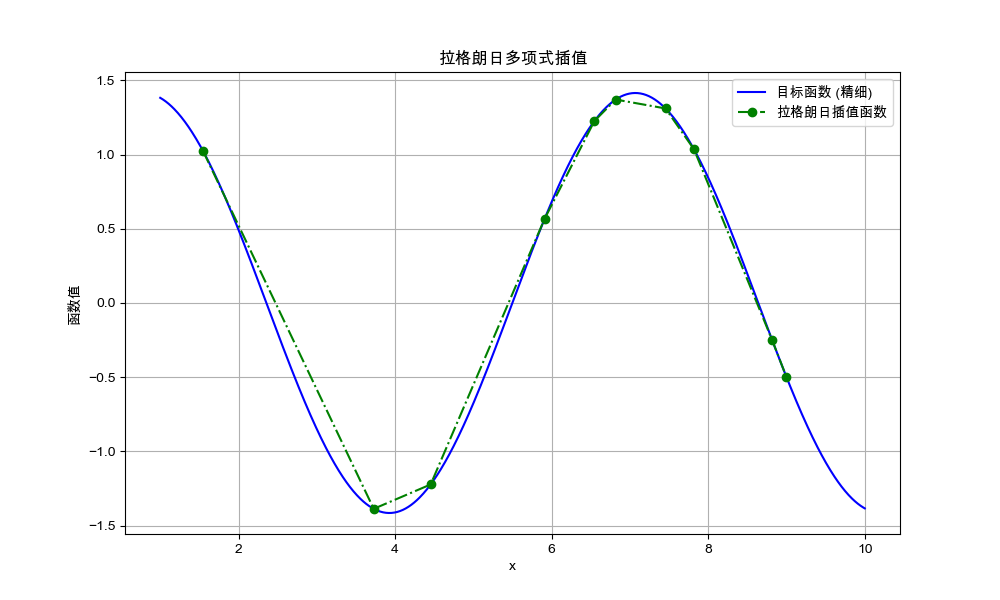
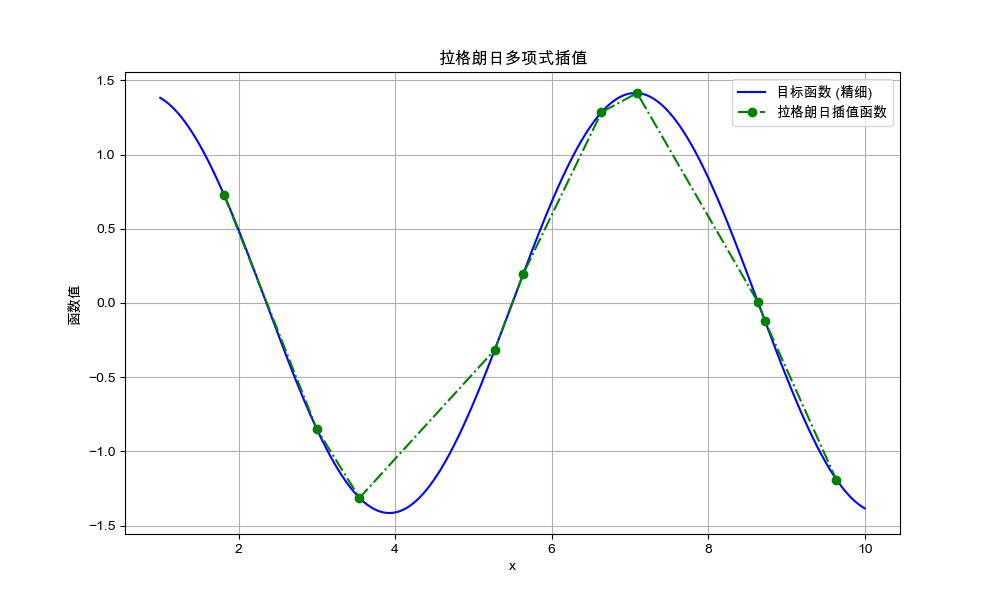
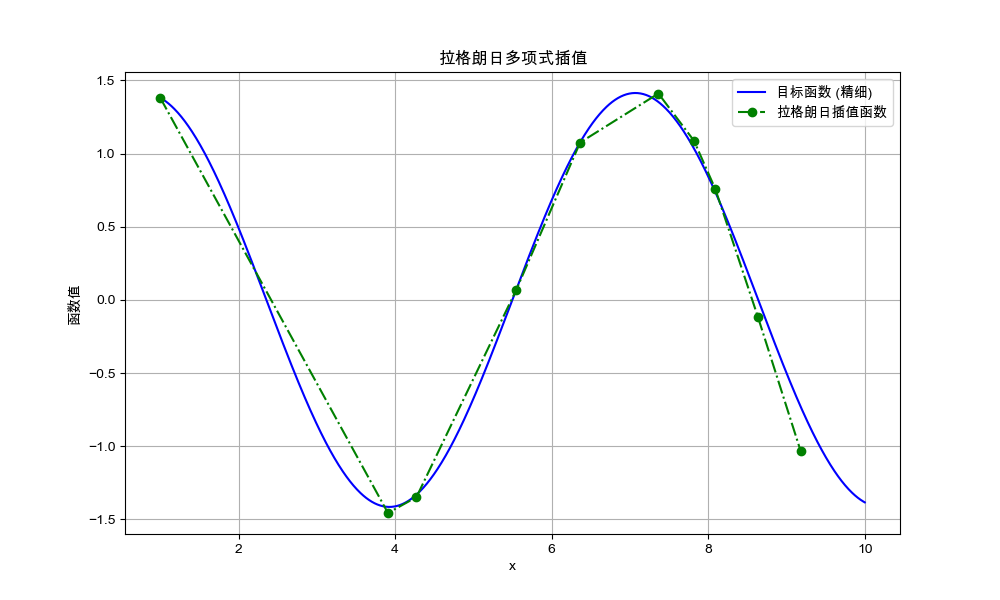
3）不足之处

但是对于范德蒙德插值法来说，n = 20时计算速度明显变慢了许多。

1. 拉格朗日插值

取m = 10为随机采样实验点

1. 对比函数曲线（n = 5、10、15、20）



1. 误差分析

|  |  |
| --- | --- |
| 平均误差  n | | Rn | |
| 5 | 0.061888089752256105 |
| 10 | 0.0004220696365131624 |
| 15 | 3.644114703384773e-09 |
| 20 | 2.5149465843199435e-13 |

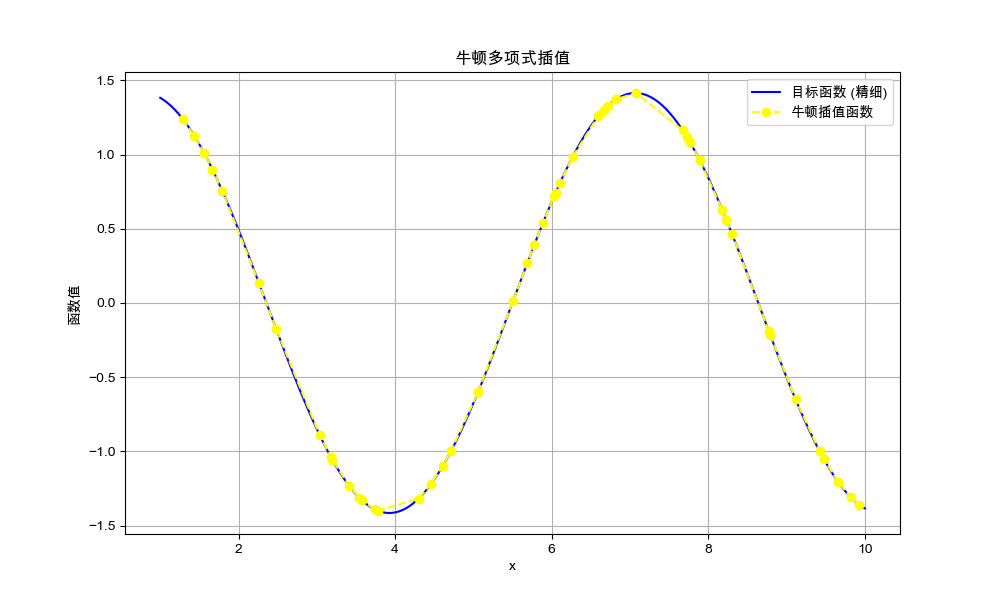
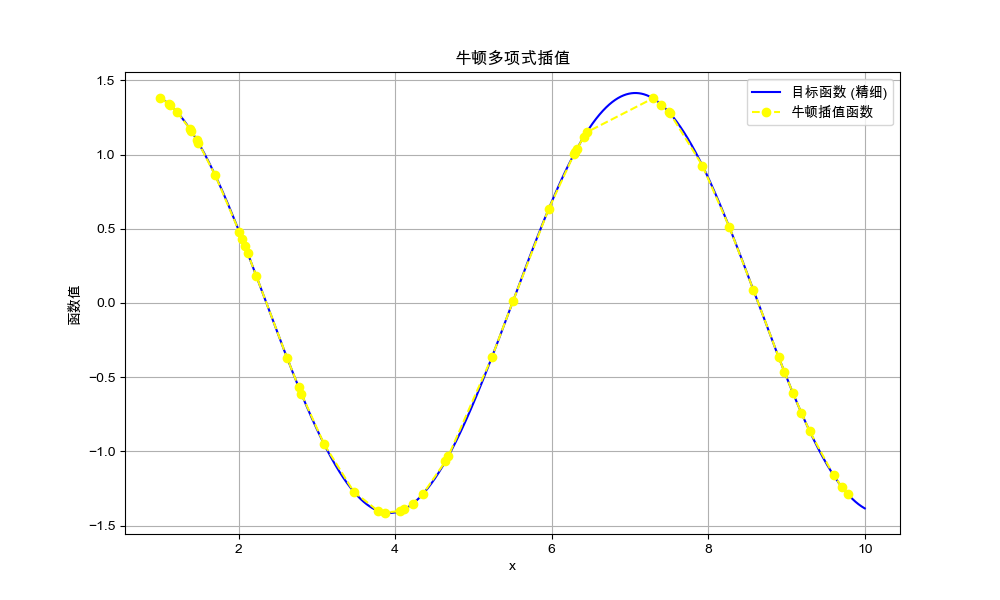
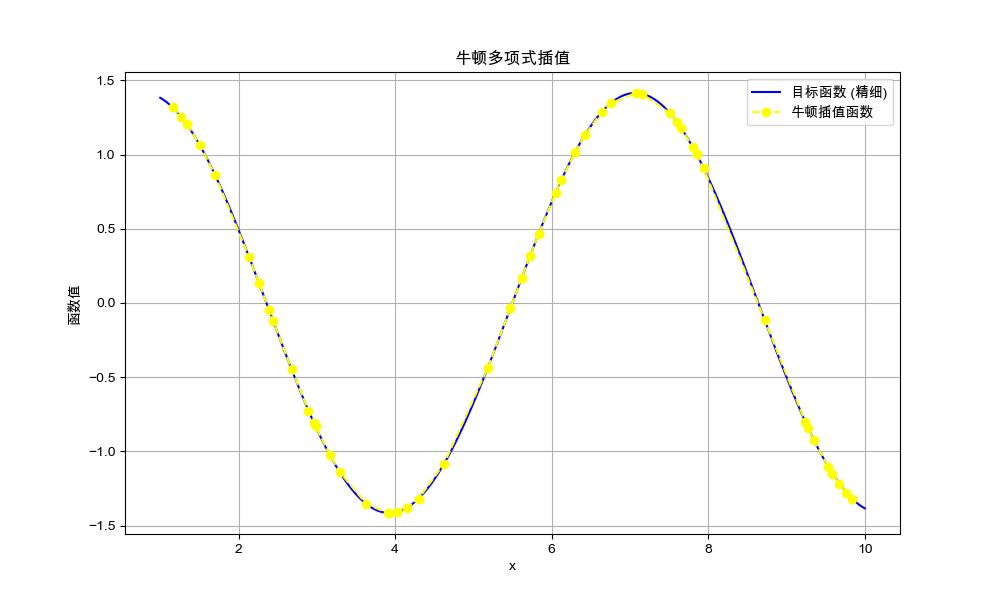
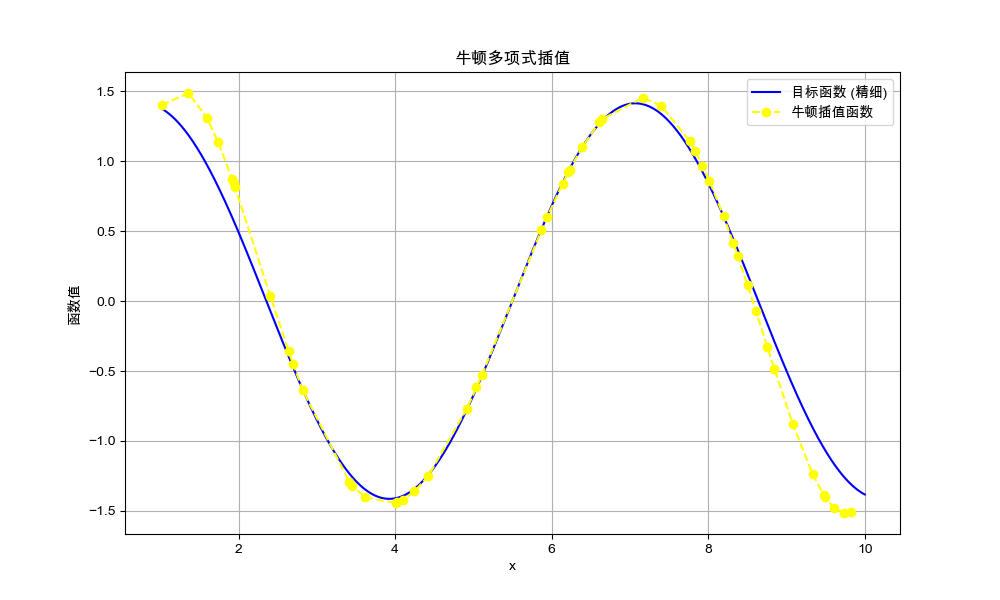
拉格朗日插值法的平均误差比范德蒙德插值法明显要小，特别是当n = 20时，误差精度比范德蒙德插值法降低了2个数量级，从到数量级。

1. 牛顿插值

采样点个数m=10的情况下无法准确观测到龙格现象，因此在此我们将采样点个数增加到**m=50**

1. 对比函数曲线（n = 5、10、15、20）

n = 5时，很明显的，在插值区间端点观测到了**龙格现象**！随着n的增大，龙格现象逐渐减弱。

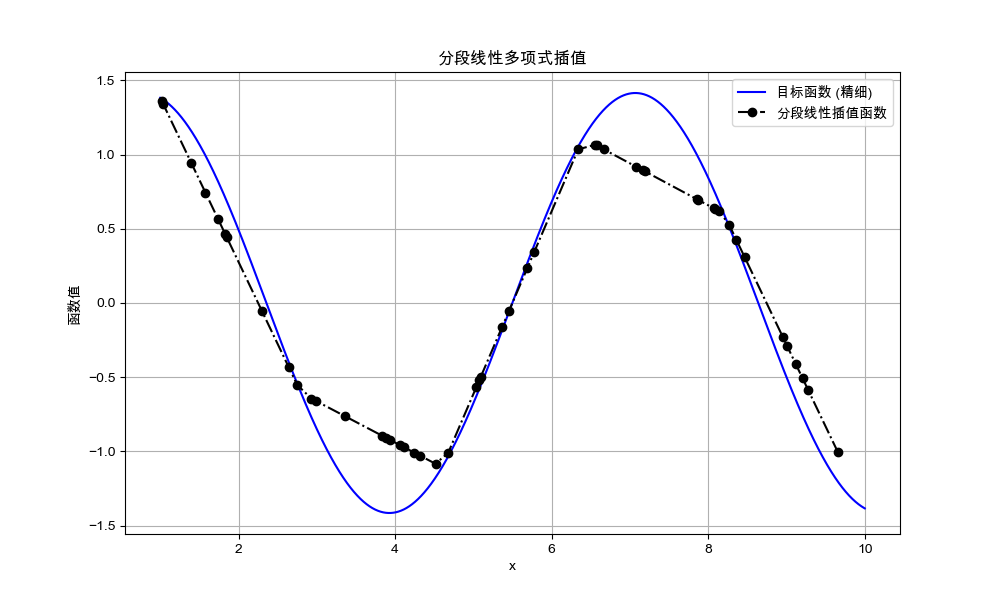


1. 误差分析：

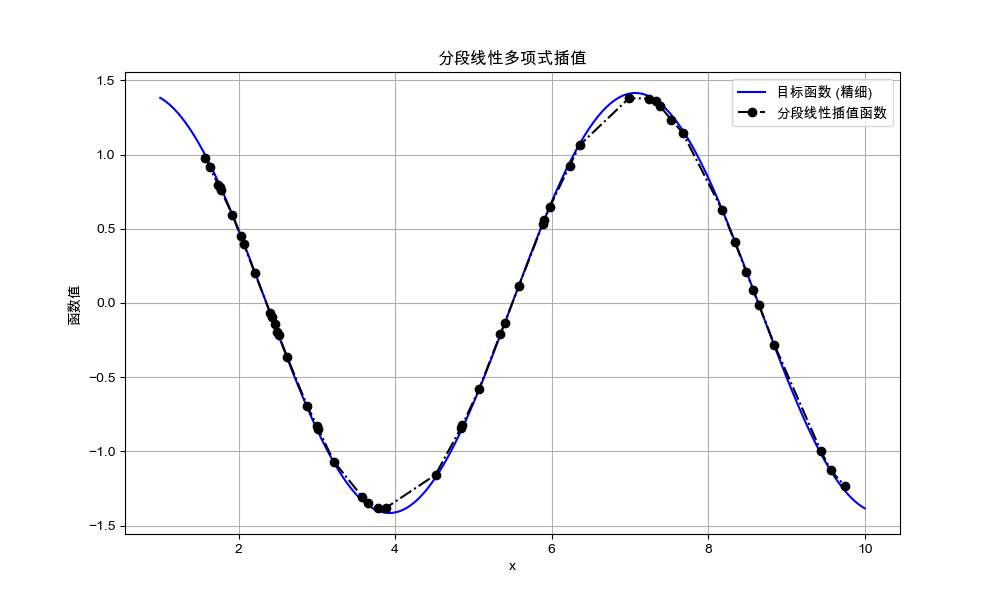
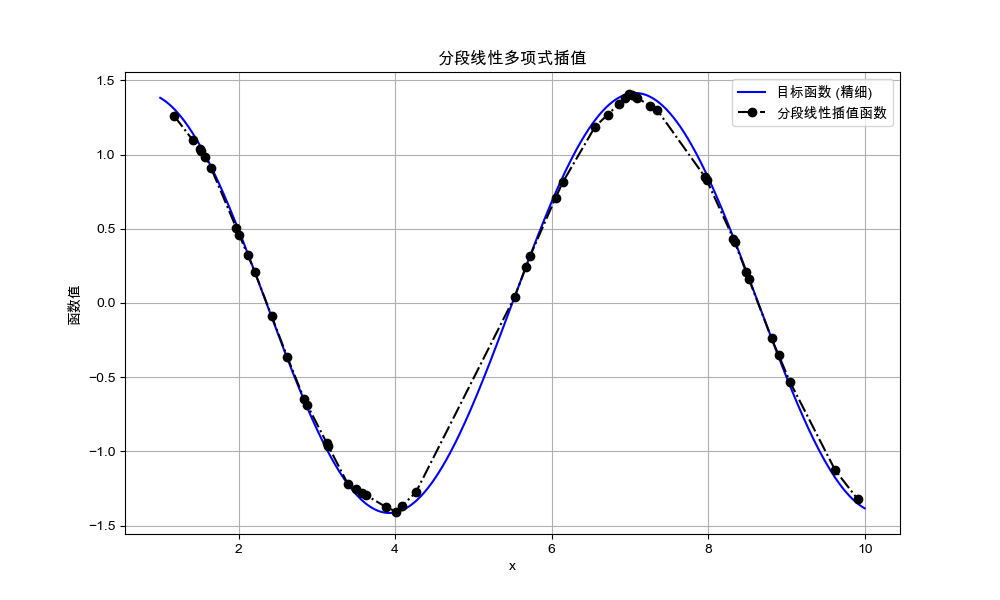
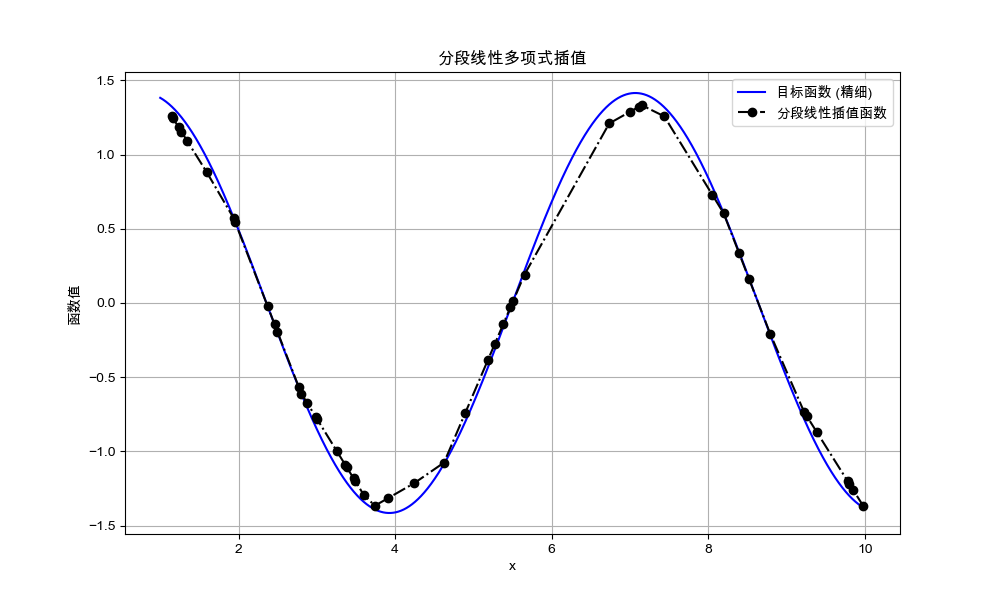
|  |  |
| --- | --- |
| 平均误差  n | | Rn | |
| 5 | 0.10611370138921732 |
| 10 | 0.0006322837392590923 |
| 15 | 6.712939720140976e-08 |
| 20 | 1.4774422657515275e-11 |

牛顿插值法和拉格朗日插值法本质上都是多项式插值，它们的插值结果理论上是相同的（假设插值节点相同），因此插值误差应该是一样的。然而我的算法模拟出的实验结果中牛顿插值的误差比拉格朗日插值大。以下是一些可能的原因：

1. 牛顿插值法构造时依赖于**均差表**，而均差表的计算涉及到小数相减、除法等操作。在一些情况下，这些运算会放大数值误差，特别是在插值节点非常接近时，容易产生较大的计算误差。
2. 牛顿插值法的插值公式是逐步构建的，每一步都依赖于前一步的计算结果。如果前几步的计算产生了误差，后续步骤会**累积误差**，导致最终插值结果的误差较大。而拉格朗日插值法通过独立的基函数计算插值多项式的每一项，误差在计算过程中不会像牛顿插值法那样逐步累积
3. 分段线性插值
4. 初始条件： a = 1, b = 10, ，m = 50
5. 自变量：采样点n取5、10、15、20，观察在不同采样点个数的情况下，五种插值法的误差。
6. 五种插值法曲线对比：（n取5、10、15、20）



n=5时，分段线性插值在驻点附近表现较差，原因是它无法捕捉驻点处函数的平滑变化，且少量的采样点导致函数局部特性未被充分解析。



1. 误差分析：

|  |  |
| --- | --- |
| 平均误差  n | | Rn | |
| 5 | 0.2013636252641802 |
| 10 | 0.0542005707347144 |
| 15 | 0.025962334310357264 |
| 20 | 0.01269803205216499 |

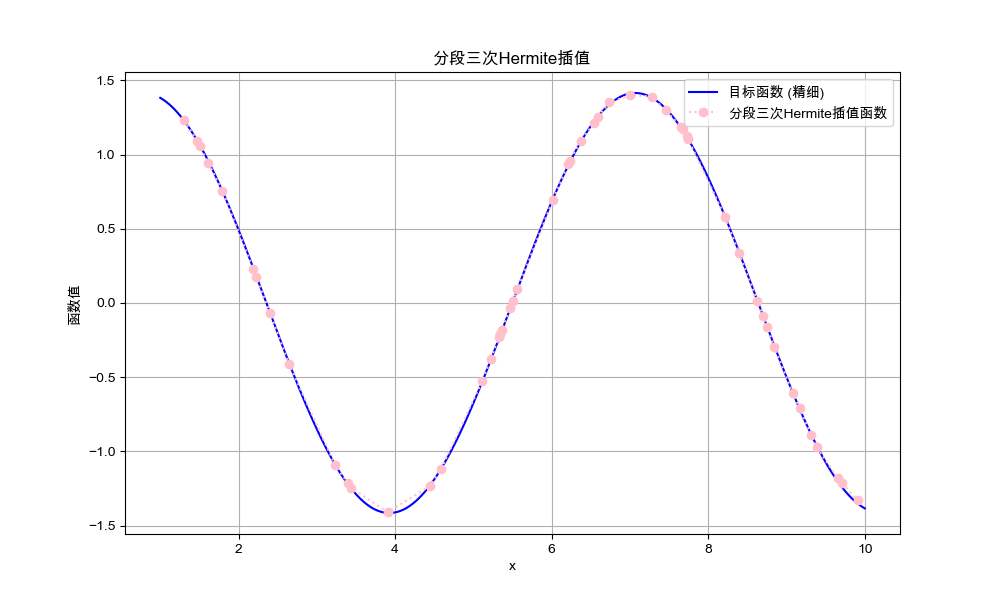
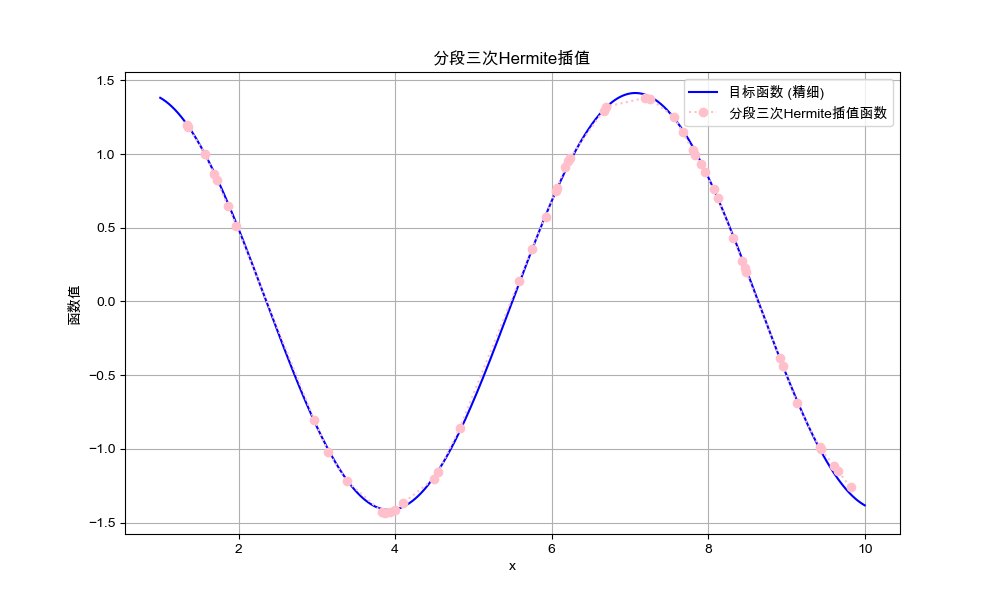
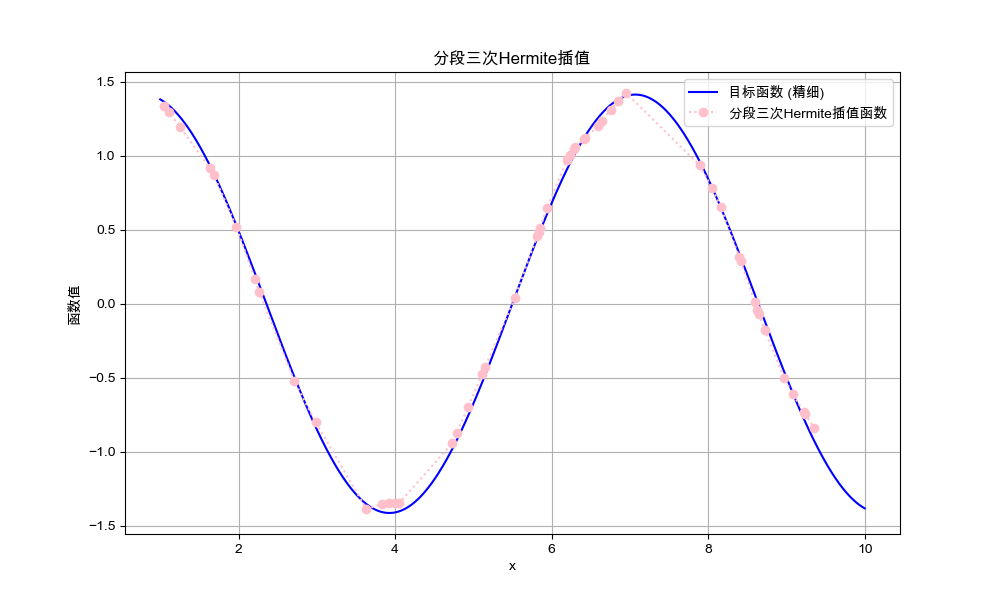
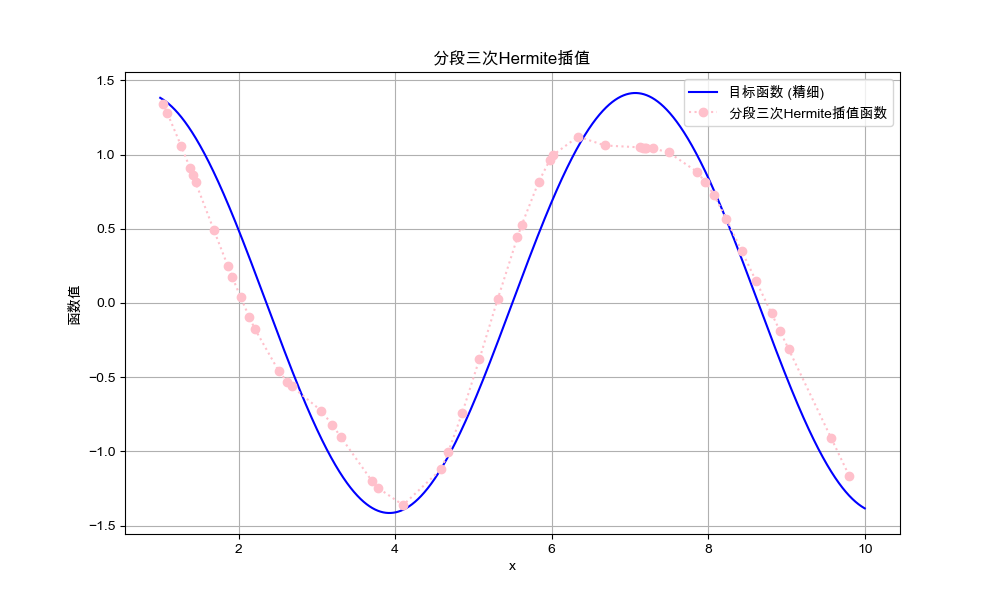
分段线性插值的精度随着采样点个数的增加而减少，但是却显著差于前三种插值法，n=20时分段线性插值精度在数量级，而拉格朗日插值已经达到了数量级，精度存在明显的差距。

1. 分段三次Hermite插值

1)初始条件： a = 1, b = 10, ，m = 50

2)自变量：采样点n取5、10、15、20，观察在不同采样点个数的情况下，五种插值法的误差。

3)五种插值法曲线对比：（n取5、10、15、20）



4)误差分析：

|  |  |
| --- | --- |
| 平均误差  n | | Rn | |
| 5 | 0.22209582634536035 |
| 10 | 0.038224715013779414 |
| 15 | 0.015543960269739037 |
| 20 | 0.006735694675206508 |

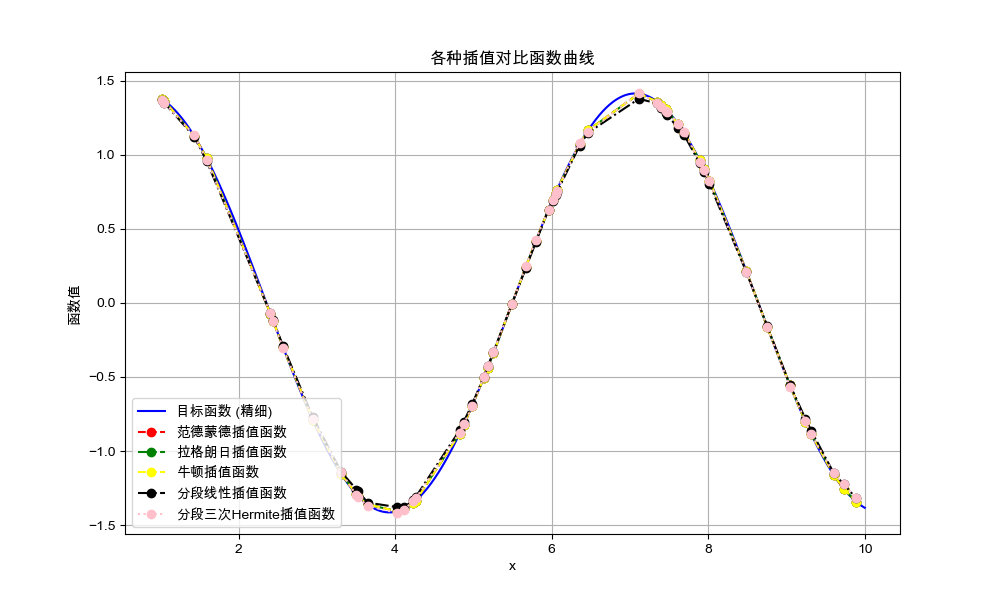
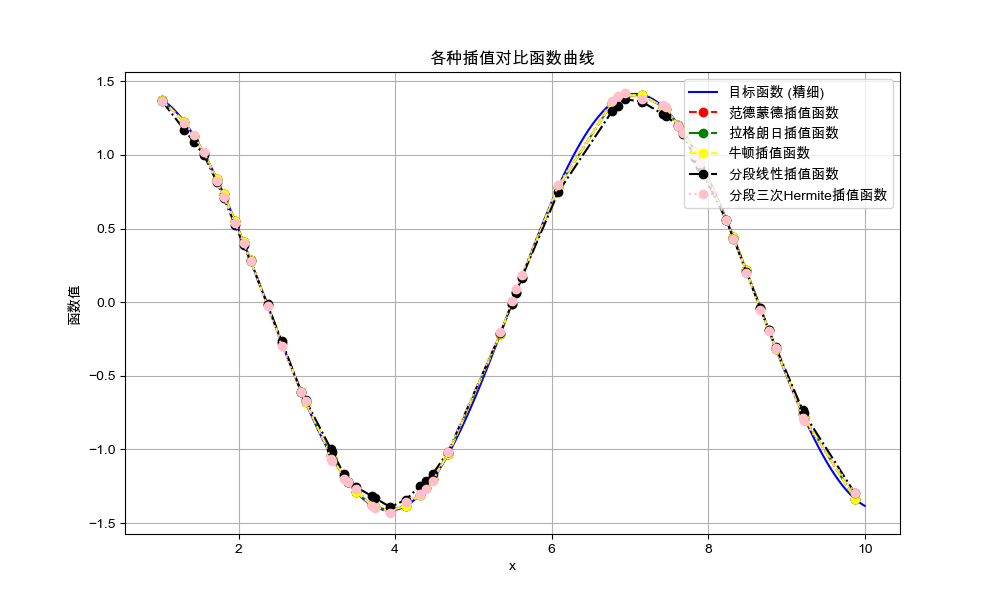
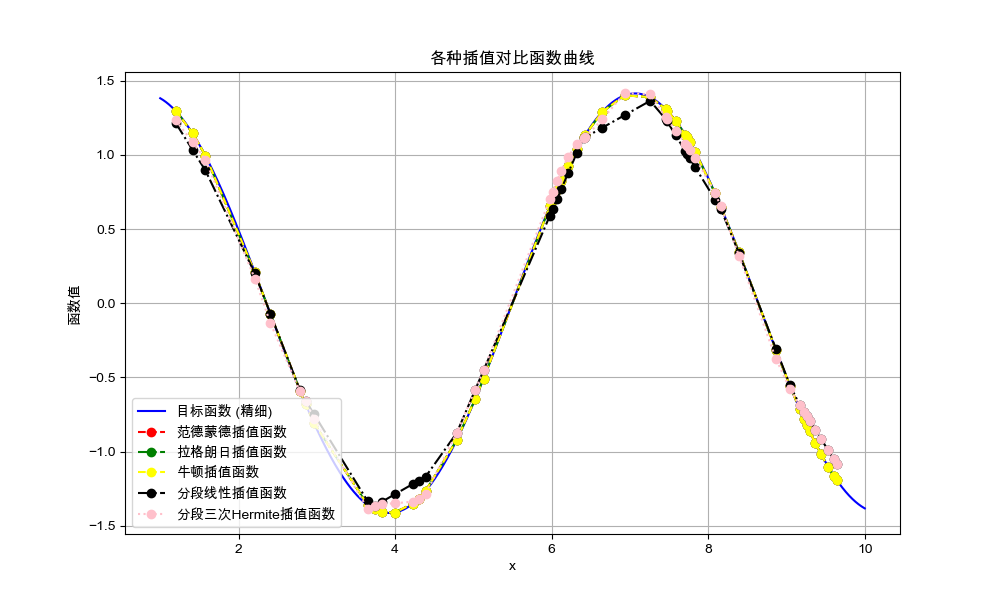
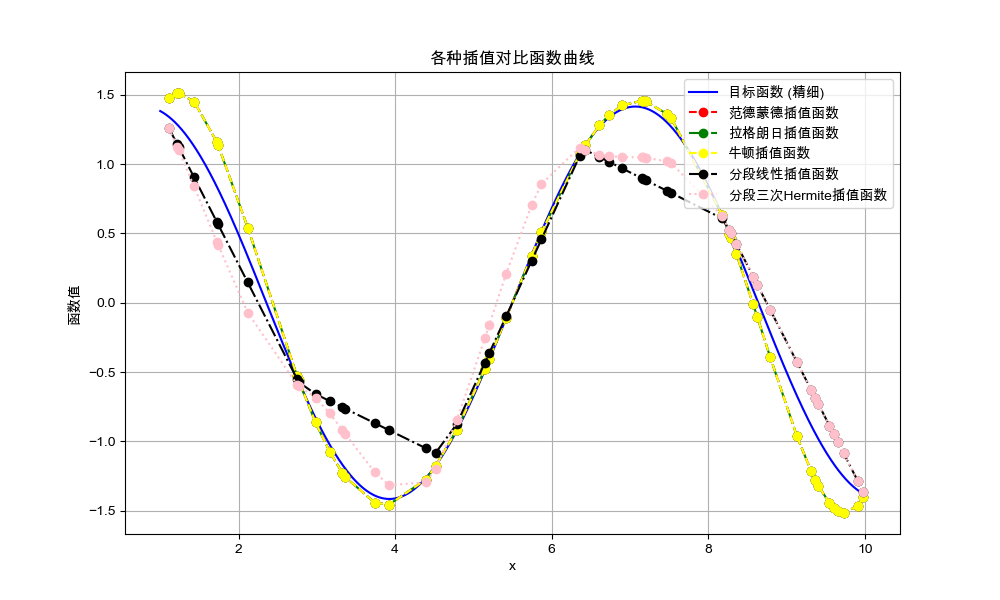
分段三次Hermite插值的精度比分段插值的精度要高一些，但是对比起拉格朗日、范德蒙德、牛顿插值来说，也算是精度较低的一种插值法了。

1. 各个插值函数之间的对比分析
2. 未出现龙格现象下的五种插值法对比：

1)初始条件： a = 1, b = 10,

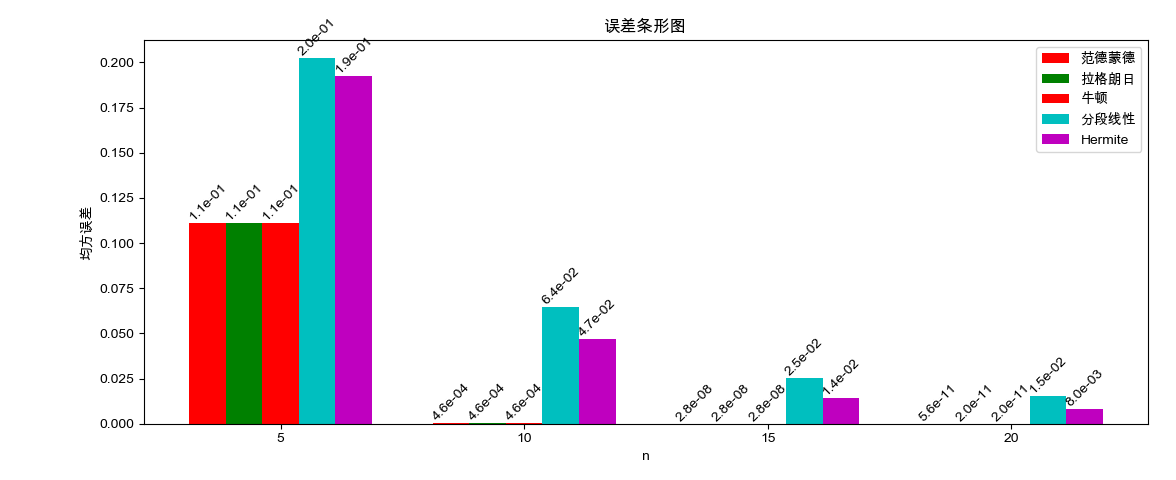
2)自变量：采样点n取5、10、15、20，观察在不同采样点个数的情况下，五种插值法的误差。

3)五种插值法曲线对比：（n取5、10、15、20）



4)误差分析：

**误差条形图：**



**误差表：**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 平  均  误差  n | 范德蒙德 | 拉格朗日 | 牛顿 | 分段线性 | Hermite |
| 5 | 0.11115742309965457 | 0.11115742309972676 | 0.11115742309972734 | 0.20232147400539005 | 0.19251559071880478 |
| 10 | 0.00046427904284127323 | 0.00046427904514932254 | 0.00046427904514906385 | 0.06442477235638683 | 0.04664820345867034 |
| 15 | 2.7897346321775762e-08 | 2.787634560196678e-08 | 2.787634920887322e-08 | 0.0253724430364894 | 0.01407280235182811 |
| 20 | 5.57551968483061e-11 | 1.950112470811005e-11 | 1.952578043695752e-11 | 0.015397208480121579 | 0.00800343632594138 |

分析：

* **范德蒙德插值：**

**优势：**理论上对于任意多项式函数都适用，误差收敛较快，在采样点较多时精度较高。

**劣势：**在实际计算中，由于范德蒙德矩阵容易变得病态（矩阵的条件数随着采样点的增加而急剧增加），容易导致数值不稳定性。

**精度对比：**对于 n = 10 及以上的采样点，范德蒙德插值精度非常高，与拉格朗日和牛顿插值方法相当。

* **拉格朗日插值：**

**优势：**计算简单，容易理解，适用于中等数量的采样点。与范德蒙德和牛顿方法相似，精度较高。

**劣势：**拉格朗日插值的公式比较复杂，随着采样点数增加，计算量急剧增加。而且，在高采样点数时插值多项式可能产生振荡现象（Runge现象），尤其是在边界处。

**精度对比：**与范德蒙德和牛顿插值精度几乎一致，但比分段线性和Hermite插值更为精确。

* **牛顿插值：**

**优势：**可以通过差商表格增量地计算插值多项式，效率高于拉格朗日插值法。此外，牛顿插值比拉格朗日方法更稳定，尤其是当新的数据点加入时，不需要重新计算整个多项式。

**劣势：**与拉格朗日插值法相同，也可能在高阶多项式时出现数值不稳定现象。

**精度对比：**在所有采样点数下，牛顿插值法精度与拉格朗日和范德蒙德插值相同，数值误差极小。

* **分段线性插值：**

**优势：**实现简单，适用于不需要高精度的场景。由于只使用局部点，因此计算速度快，适合需要快速结果的情况。

**劣势：**精度不高，尤其是在 n 较小时（如 n = 5 时误差为 0.202，比其他方法大得多）。其误差较大，尤其是对非线性函数的拟合效果不佳。

**精度对比：**分段线性插值在采样点少时误差最大，n 增加时，误差降低，但依然明显大于其他插值方法。

* **分段三次Hermite 插值：**

**优势：**Hermite 插值不仅考虑了函数值，还包括了导数信息，因此在边界处的拟合精度优于分段线性插值。在处理光滑曲线时，Hermite插值表现良好。

**劣势：**需要计算或估计函数的导数，对于某些问题导数可能难以获得或估计不准确。此外，计算量较大，尤其是需要考虑导数时。

**精度对比：**在所有 n 值下，Hermite 插值的误差比分段线性插值低，尤其在 n = 20 时，其误差低至 0.008。Hermite 插值在误差表现上仅次于范德蒙德、拉格朗日和牛顿插值。

**结论：**

**高精度方法：**范德蒙德、拉格朗日和牛顿插值方法在所有采样点下都表现出极高的精度，误差非常小，适合对精度要求非常高的场景。

**中等精度方法：**Hermite 插值在 n 较大时（如 n = 20）表现出较好的精度，且由于它引入了导数信息，适合需要较为平滑的插值结果的场景。

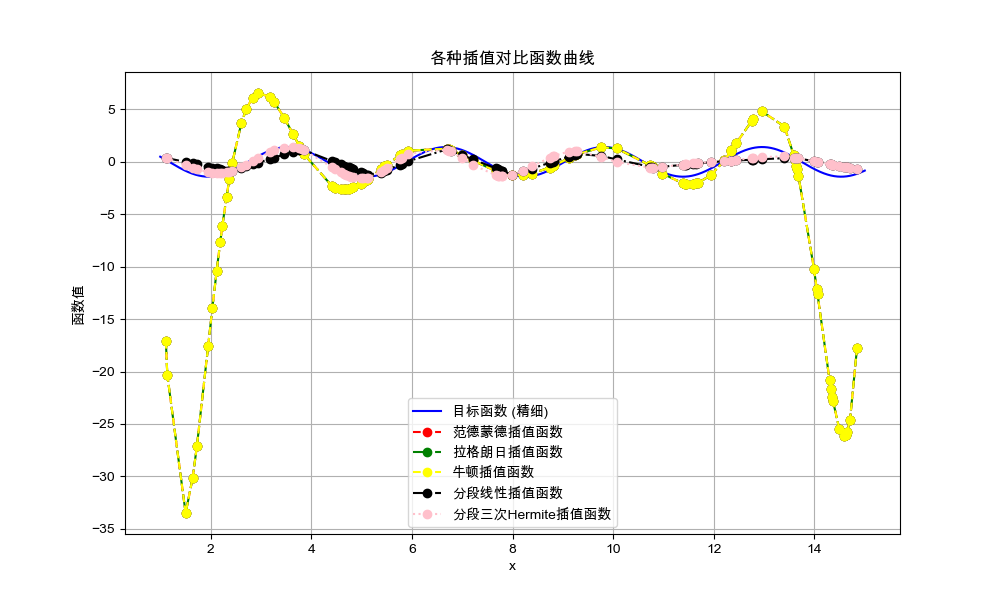
**低精度方法：**分段线性插值精度较低，适合对精度要求不高、但要求简单快速实现的场景。

1. 龙格现象及其解决方案：

1）初始条件： a = 1, b = 15, ， 实验点m=100

2）自变量：采样点n取10

3）五种插值法曲线对比：



对于范德蒙德插值法、拉格朗日插值法、牛顿插值法，在插值区间端点出现了明显的龙格现象！表明使用高次多项式插值并不总能提高准确性。

解决办法：**采用切比雪夫采样,龙格现象得到明显缓解。**

