MIMO推导

A .Signal and Channel Model

$$\mathbf{y_j} = \sqrt{\mathbf{p_u}} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{L}} \mathbf{H_{jl} x_l} + \mathbf{n_j} \tag{1}$$

> L hexagonal cells K Single users Mantenna
> 在这里xl服从复高斯分布是在一个cell内的传输信号
> p_u是这个cell内所有用户发射功率的平均值（开根号为幅值）
> n_j为接受处的噪音符合复高斯分布
> H_{jl}则表征了第l个cell到第j个接受机处的信道

接下来集中探索信道 H_{jl}的形式

$$\mathbf{H}_{jl} \triangleq [\mathbf{h_{jl1}}, \ldots, \mathbf{h_{jlk}}, ..\mathbf{h_{jlK}}] \tag{2}$$

> 这个式子本质上在描述一个cell里面的单独一个用户与接受段的信道

并且我们对信道加入衰落以更好描述其性质

$$\mathbf{h}_{jlk} = \underline{\mathbf{h}}_{jkl} \beta_{jkl}^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

> 在这个式子里β是大尺度衰落的系数
> $\underline{h}_{jkl}$是服从复高斯分布的

B.Channel Estimation

在本节中我们会通过发送导频信号来估计信道信息，首先我们来定义uplink pilot sequence

$$\mathbf{s}_{lk} = \sqrt{\rho_{lk}} \underline{\mathbf{s}}_{lk} \tag{4}$$

> lk指的是第l个cell里的第k个用户
> 导频矩阵是$\tau * 1$的
> 发送信号时是乘上了幅值$\sqrt{\rho_{lk}}$的

但我们仍然难以把握导频信号的规律，那么不妨假设其具有正交性以方便计算

$$\underline{\mathbf{s}}_{lk}^H \underline{\mathbf{s}}_{lk} = 1 \text{ and } \underline{\mathbf{s}}_{lk1}^H \underline{\mathbf{s}}_{lk2} = 1 \quad \forall k1 \neq k2 \tag{5}$$

> 成立的条件是$\tau \geqq K$ 也就是导频信号的长度大于用户数

由于我们想去探寻最差情况下MIMO表现，我们不妨加入导频污染（用户之间的相互影响）

$$\underline{\mathbf{s}}_{ik} = \underline{\mathbf{s}}_{jk} \tag{6}$$

> 也就是说不同cell内的第k个用户是发送了同样的（相互影响的导频）

并且我们可以列出此时第j个接受机里接受到的信号

$$\mathbf{Y}_j = \sum_{l=1}^{L} \sum_{n=1}^{K} \sqrt{\rho_{ln}} \mathbf{h}_{jln} \underline{\mathbf{s}}_{jn}^H + \mathbf{N}_j \tag{7}$$

> N_j是符合复高斯分布的接受端噪声
> 其实就是每个cell中的每个用户通过和j相关的信道发送导频信号并且在接收端叠加高斯噪声

B-1 LS信道估计法及其详细推导

LS信道估计法的表达式已经被定义

$$\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS} \triangleq \frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{Y}_j\underline{\mathbf{s}}_{jk} \tag{8}$$

现在将5-7带入8注意到导频的正交性，以及导频污染带来的复用

带入式子7

$$\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS} = \frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}(\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{K}\sqrt{\rho_{ln}}\mathbf{h}_{jln}\underline{\mathbf{s}}_{jn}^{H} + \mathbf{N}_j)\underline{\mathbf{s}}_{jk} \tag{8.1}$$

$$\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS} = \sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{K}\frac{\sqrt{\rho_{ln}}}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jln}\underline{\mathbf{s}}_{jn}^{H}\underline{\mathbf{s}}_{jk} + \frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{N}_j\underline{\mathbf{s}}_{jk} \tag{8.2}$$

不难发现，此时可以利用导频信号的正交性进行化简

$$\begin{cases}\underline{\mathbf{s}}_{jn}^{H}\underline{\mathbf{s}}_{jk} = 1 \quad n = k(1)\\ \underline{\mathbf{s}}_{jn}^{H}\underline{\mathbf{s}}_{jk} = 0 \quad n \neq k(2)\end{cases} \tag{8.3}$$

因此观察B.2发现第二个积分的范围内仅有k=j保留下来了，而且ρ_{ln}功率的下标改为ρ_{lk}

$$\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS} = \sum_{l=1}^{L}\frac{\sqrt{\rho_{lk}}}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jlk} + \frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{N}_j\underline{\mathbf{s}}_{jk} \tag{8.4}$$

进一步不妨将$l = j$的部分单独提出，以得到h_{jjk} 于是我们得到了式子9

$$\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS} = \mathbf{h}_{jjk} + \sum_{l\neq j}^{L}\frac{\sqrt{\rho_{lk}}}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jlk} + \frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{N}_j\underline{\mathbf{s}}_{jk} \tag{9}$$

B-2 MMSE信道估计法及其详细推导

$$\widehat{\mathbf{h}}_{MMSE}^{LS} \triangleq \mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}(\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS})^H](\mathbb{E}[\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS}(\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS})^H])^{-1}\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS} \tag{10}$$

接下来的核心内容便是利用无关性化简上述式子

B-2-1化简$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}(\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS})^H]$

$$\mathbf{h}_{jjk}(\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS})^H = \mathbf{h}_{jjk}(\mathbf{h}_{jjk} + \sum_{l\neq j}^{L}\frac{\sqrt{\rho_{lk}}}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jlk} + \frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{N}_j\underline{\mathbf{s}}_{jk})^H \tag{10.1}$$

$$\mathbf{h}_{jjk}(\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS})^H = \mathbf{h}_{jjk}\mathbf{h}_{jjk}^H + \mathbf{h}_{jjk}\sum_{l\neq j}^{L}\frac{\sqrt{\rho_{lk}}}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jlk}^H + \frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jjk}\underline{\mathbf{s}}_{jk}^H\mathbf{N}_j^H \tag{10.2}$$

此时两边同时求期望

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}(\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS})^H] = \mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}\mathbf{h}_{jjk}^H + \mathbf{h}_{jjk}\sum_{l\neq j}^{L}\frac{\sqrt{\rho_{lk}}}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jlk}^H + \frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jjk}\underline{\mathbf{s}}_{jk}^H\mathbf{N}_j^H] \tag{10.3}$$

$$= \mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}\mathbf{h}_{jjk}^H] + \mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}\sum_{l\neq j}^{L}\frac{\sqrt{\rho_{lk}}}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jlk}^H] + \frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}\underline{\mathbf{s}}_{jk}^H\mathbf{N}_j^H] \tag{10.4}$$

由于信道衰落前的信号$\mathbf{h}_{jjk}$服从复高斯分布，因此其期望为0，方差为1矩阵，所以

$$\mathbb{D}[\mathbf{h}_{jjk}] = ((\beta_{jjk})^{1/2})^2\mathbb{D}[\underline{\mathbf{h}}_{jjk}]$$

$$\mathbb{D}[\mathbf{h}_{jjk}] = cov[\mathbf{h}_{jjk}, \mathbf{h}_{jjk}] = \beta_{\mathbf{jjk}}I$$

$$cov[\mathbf{h}_{jjk}, \mathbf{h}_{jjk}] = \mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}\mathbf{h}_{jjk}^H] + \mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}]\mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}^H] = \beta_{\mathbf{jjk}}I$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}] = \mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}^H] = \mathbf{0}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}\mathbf{h}_{jjk}^H] = \beta_{\mathbf{jjk}}I$$

而对于两个分别复从两个独立复高斯分布的随机变量

$$l \neq j$$

$$cov[\mathbf{h}_{jjk}, \mathbf{h}_{jlk}] = \mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}\mathbf{h}_{jlk}^H] + \mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}]\mathbb{E}[\mathbf{h}_{jlk}^H] = \mathbf{0}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}] = 0$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}\mathbf{h}_{jlk}^H] = 0$$

由上述式子

> **两个独立高斯分布的内积的期望为0 【1】**
> **一个高斯分布与其自己的内积的期望等于其方差 [2]**

不再做证明，同理由于$\underline{\mathbf{s}}_{jk}^{H}\mathbf{N}_j^H$服从复高斯分布所以

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}(\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS})^H]=\beta_{\mathbf{jjk}}I$$

$$\mathbb{E}[\sum_{l\neq j}^{L}\frac{\sqrt{\rho_{lk}}}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jln}^H]=0$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}\underline{\mathbf{s}}_{jk}^{H}\mathbf{N}_j^H]=0$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{jjk}(\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS})^H]=\beta_{\mathbf{jjk}}I \tag{10.5}$$

B-2-2 化简$\mathbb{E}[\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS}(\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS})^H]$

$$\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS}(\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS})^H=(\mathbf{h}_{jjk}+\sum_{l\neq j}^{L}\frac{\sqrt{\rho_{lk}}}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jln}+\frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{N}_j\underline{\mathbf{s}}_{jk})(\mathbf{h}_{jjk}^H+\sum_{l\neq j}^{L}\frac{\sqrt{\rho_{lk}}}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jln}^H+\frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}\underline{\mathbf{s}}_{jk}^H\mathbf{N}_j^H)$$

$$=(\mathbf{h}_{jjk}\mathbf{h}_{jjk}^H+\mathbf{h}_{jjk}\sum_{l\neq j}^{L}\frac{\sqrt{\rho_{lk}}}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jln}^H+\frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jjk}\underline{\mathbf{s}}_{jk}^H\mathbf{N}_j^H+\sum_{l\neq j}^{L}\frac{\sqrt{\rho_{lk}}}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jln}\mathbf{h}_{jjk}^H+\sum_{l_1\neq j}^{L}\frac{\sqrt{\rho_{l1k}}}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jl_1n}\sum_{l_2\neq j}^{L}\frac{\sqrt{\rho_{l2k}}}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jl2n}^H+$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}\sum_{l\neq j}^{L}\frac{\sqrt{\rho_{lk}}}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jln}\underline{\mathbf{s}}_{jk}^H\mathbf{N}_j^H+\frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{N}_j\underline{\mathbf{s}}_{jk}\mathbf{h}_{jjk}^H+\frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{N}_j\underline{\mathbf{s}}_{jk}\sum_{l\neq j}^{L}\frac{\sqrt{\rho_{lk}}}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{h}_{jln}^H+\frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}\mathbf{N}_j\underline{\mathbf{s}}_{jk}\frac{1}{\sqrt{\rho_{jk}}}\underline{\mathbf{s}}_{jk}^H\mathbf{N}_j^H$$

由于展开式子以及结论 **【1】【2】其中第一项来源于上式第一项，第二项来自于上式第五项【3】**，第三项来自于上式最后一项

$$\mathbb{E}[\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS}(\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS})^H]=\ （\beta_{jjk}+\sum_{l\neq j}^{L}\frac{\rho_{lk}}{\rho_{jk}}\beta_{jlk}+\frac{1}{\rho_{jk}})I \tag{10.6}$$

> **[3]** 当且仅当$l_1=l_2$时为一个高斯分布自己的内积的期望，此时式子保留结果为βI，其余的交叉项均为0，类似于正交性

B-2-3综合上面的式子

将10.6 10.5带入10

$$\mathbb{E}[\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}(\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS})^H](\mathbb{E}[\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS}(\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS})^H])^{-1}\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS}=\beta_{\mathbf{jjk}}I[(\beta+\sum_{l\neq j}^{L}\frac{\rho_{lk}}{\rho_{jk}}+\frac{1}{\rho_{jk}})I]^{-1}\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS}$$

$$=\beta_{\mathbf{jjk}}II^{-1}\frac{1}{\beta_{jjk}+\sum_{l\neq j}^{L}\frac{\rho_{lk}}{\rho_{jk}}\beta_{jlk}+\frac{1}{\rho_{jk}}}\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS}$$

$$= \frac{\beta_{\mathbf{jjk}}\rho_{jk}}{\sum_{l=1}^{L}\rho_{lk}\beta_{jlk}+1}\widehat{\mathbf{h}}_{jjk}^{LS} \tag{11}$$

综上所述，目标达成