

Teoría de grupos a través del cubo de Rubik

Javier Carrillo Alanís

1. Introducción

La Teoría de Grupos es una especialidad matemática que no está desarrollada explícitamente en el currículum de la Educación Secundaria Obligatoria. Sin embargo, sus fundamentos no son inaccesibles para los alumnos de esta etapa, y su estudio puede aportar flexibilidad a la hora de adquirir nuevos aprendizajes (objetos como los números enteros, las fracciones, los polinomios y los vectores tienen estructura de grupo, entre otros). Por otra parte, el Cubo de Rubik tiene estructura de grupo. más precisamente: el conjunto de todos los movimientos que se pueden efectuar, junto con la operación de composición de movimientos, es un grupo.

Esta comunicación resume la experiencia que durante el curso 2016/2017 se realizó en nuestro centro entorno a este tema, con alumnos de cuarto curso de ESO y de primero de bachillerato. En una primera etapa, enseñamos a los alumnos a resolver el Cubo de Rubik mediante algoritmos elementales. Posteriormente, se introdujo a los alumnos a la Teoría de Grupos. El hecho de que el Cubo de Rubik sea un grupo finito nos permitió ilustrar distintas propiedades (orden de un grupo, factorización en forma de ciclos, etc).

2. El concepto de grupo

La primera cuestión que se consideró para desarrollar esta experiencia fue cómo abordar el concepto de grupo a los alumnos. Se decidió dar la siguiente definición, eliminando las dificultades que pudieran surgir de la notación:

Un grupo es un conjunto G , dotado de una operación $*$, que cumple las siguientes propiedades:

- La operación $*$ es asociativa, es decir,
$$a * (b * c) = (a * b) * c$$
para cualesquiera a, b, c del conjunto G .
- Existe un elemento e en el conjunto G que cumple, para cualquier a de
$$a * e = e * a = a$$
Llamaremos a e elemento neutro del grupo.
- Para cualquier a del conjunto G existe otro elemento a' en G que cumple
$$a * a' = a' * a = e$$

Llamaremos a a' elemento opuesto de a .

Esta era la primera vez que se presentaba a los alumnos una definición de estructura algebraica. Posteriormente se discutieron los siguientes ejemplos de grupos:

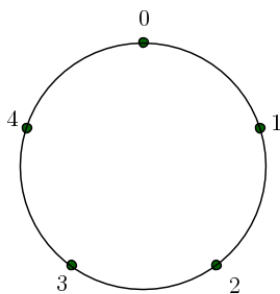
- Los números enteros, con la suma.
- Los números racionales, sin el cero, con el producto.
- Los polinomios, con la suma.
- Los vectores del plano, con la suma.

La comprensión de concepto de grupo fue progresiva a medida que discutíamos los distintos ejemplos. Resultó aclarador discutir los siguientes casos, que no cumplen la definición de grupo:

- Los números enteros, con el producto.
- Los números racionales, con el producto.
- Los polinomios, con el producto.

Los alumnos fueron capaces de identificar los elementos neutros y opuestos de los distintos ejemplos a medida que se presentaban.

A continuación se estudiaron los enteros módulo p como ejemplo de grupo finito. Para facilitar la comprensión se decidió presentarlos de una forma intuitiva (por ejemplo, la suma en los enteros módulo 5 equivale a sumar en un reloj de 5 horas) y prescindiendo de una definición formal.



A partir de este ejemplo se definió el orden de un elemento de un grupo finito.

El orden de un elemento a en un grupo G es igual a n si

$$a * a * (n \text{ veces}) * a = e$$

Al escribir la siguiente tabla de los enteros módulo 5 se observa que el orden de todos los elementos en este grupo es igual a 5.

- $1+1+1+1+1=5=0$

- $2+2+2+2+2=10=0$
- $3+3+3+3+3=15=0$
- $4+4+4+4+4=20=0$

Otros ejemplos que consideramos fueron los enteros módulo 5 (salvo el cero) con el producto, y los enteros módulo 6. Se sugirió a los alumnos que consideraran las siguientes cuestiones:

- Al componer un elemento consigo mismo, ¿siempre se obtiene el elemento neutro en algún momento?
- ¿Es único el número de veces que hay que componer para obtener el elemento neutro?
- Observando los órdenes de los elementos de los enteros módulo 5 y módulo 6, con la suma, ¿existe alguna relación con el número de elementos del grupo?

Esta última cuestión sirvió de introducción al Teorema de Lagrange:

Teorema de Lagrange: En un grupo finito, el orden de los elementos del grupo divide al número de elementos del grupo.

3. Grupos de permutaciones

El siguiente ejemplo de grupo que se mostró fueron los grupos de permutaciones. Estos grupos son necesarios para estudiar el cubo de Rubik. Se definió una permutación como una variación de los elementos de un conjunto ordenado, recurriendo a la notación en forma de ciclo. Por ejemplo, la permutación $s=(A\ B\ D)\ (C)$ actuando sobre el conjunto $X=(A, B, C, D)$ da como resultado $sX=(D, A, C, B)$.

Se presentaron en el aula mediante ejemplos las siguientes propiedades:

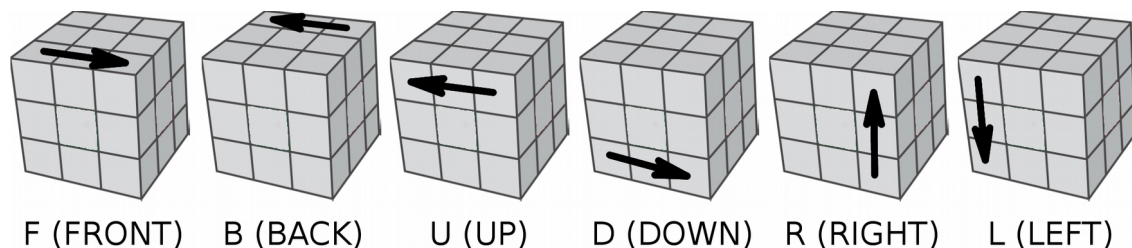
- El orden de un ciclo es igual al número de elementos que contiene.
- El orden de una permutación que se descompone en ciclos disjuntos es el mínimo común múltiplo de los órdenes de estos ciclos.
- Cualquier ciclo puede descomponerse en ciclos de orden 2 (no necesariamente disjuntos), que se denominan trasposiciones.
- Una permutación es par (o impar) si se descompone en un número par (o impar) de trasposiciones. La paridad no depende de las descomposiciones particulares.

A continuación se discutió sobre la estructura de grupo de las permutaciones. Los alumnos encontraron dificultades para determinar los inversos de algunas permutaciones, pues los grupos de permutaciones no son conmutativos.

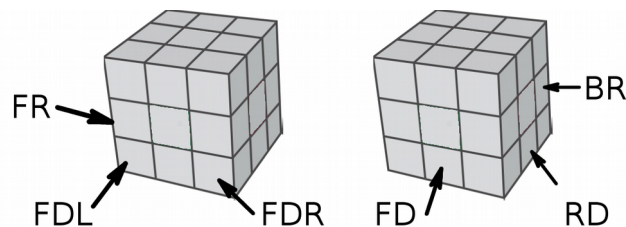
4. El grupo de permutaciones del cubo de Rubik

Para estudiar el grupo de permutaciones del cubo de Rubik recurrimos a la notación de movimientos y piezas mediante las letras F, B, U, D, R, L.

La notación para movimientos es la siguiente:



La notación para aristas y esquinas es la siguiente:



En este punto, se comenzaron a denotar los movimientos del cubo como permutaciones de las piezas. Por ejemplo, el movimiento de la cara frontal F es

$$F = (FU \ FR \ FD \ FL) (FUR \ FDR \ FDL \ FUL)$$

Los alumnos observaron que, como esta permutación se descompone en dos ciclos disjuntos de orden cuatro, su orden es cuatro. Es decir: hay que mover la cara frontal 4 veces para llegar a la posición inicial. Otro ejemplo que consideramos inmediatamente es el movimiento FFRR, cuya descomposición es

$$FFRR = (FU \ FD) (FL \ BR \ FR) (RU \ RD) (UFL \ UBR \ FDR) (UFR \ DFL \ BRD)$$

El orden de este movimiento es igual a 6. A diferencia del ejemplo anterior, este hecho no es elemental si no se determina la descomposición de la permutación correspondiente.

Los alumnos encontraron una dificultad en la interpretación de los movimientos del cubo de Rubik como un grupo, pues no identificaban el movimiento “no mover ninguna cara” como un movimiento.

Aplicamos la teoría de grupos al cubo de Rubik para deducir las siguientes propiedades:

- Partiendo de un cubo resuelto, si se realiza un movimiento un número suficiente de veces se recupera la posición inicial. Este número es el orden de la permutación.
- Como el cubo de Rubik tiene $43252 \cdot 10^{19}$ permutaciones, todos los órdenes de las permutaciones deben dividir a esta cifra. Por ejemplo, no existe ningún movimiento que al repetirse 17 veces devuelva al cubo a su posición original.
- Todas las permutaciones del cubo de Rubik tienen orden par, porque los movimientos de cada cara se descomponen en seis trasposiciones.
- Como consecuencia de la propiedad anterior, no es posible intercambiar las posiciones de únicamente dos piezas del cubo. Como todos los movimientos son pares, el movimiento en el que intervienen menos piezas es $(A\ B)\ (A\ C)$, es decir, $(A\ B\ C)$, en el que se modifica la posición de tres piezas.

5. Bibliografía y referencias web

- [1] Davis, Tom. *Group Theory via Rubik's Cube*. <http://www.geometer.org/rubik/group.pdf>
- [2] MIT. *The Mathematics of the Rubik's Cube. Introduction to Group Theory and Permutation Puzzles*. <http://web.mit.edu/sp.268/www/rubik.pdf>