Информатика. Алгебра логики, все основные сведения.

Алгебра логики - раздел математики, в котором изучаются логические операции над высказываниями. Нам нужно будет работать с бинарной логикой, то есть высказывания могут быть только истинными или ложными.

Например:

- 19 - простое число
- 8 кратно 3
- 21 - число палиндром

Логическая переменная - это переменная, которая обозначает любое высказывание и может принимать логические значения «истина» или «ложь».

Логическая операция - операция над высказываниями, которая позволяет составить новые высказывания путем соединения простых.

Например:

- 19 - простое число и число, делящееся на 3 (Ложно)
- 25 делится на 5 и делится на 7 (Ложно)
- 25 делится на 5 или делится на 7 (Истино)

Перечислим интересные нам операции:

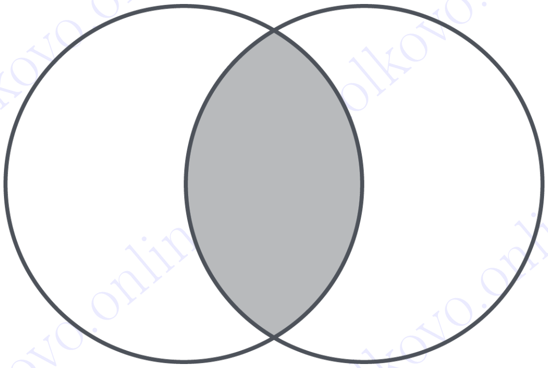
1. **Конъюнкция** - логическое И (логическое умножение). При конъюнкции высказывание истино тогда и только тогда, когда истины все входящие в него простые высказывания. Обозначается $\wedge$.

   Например:

   - (25 делится на 5) $\wedge$ (25 делится на 7) - выражение является ложным, так как правая скобка является ложной.
   - (трава зелёная) $\wedge$ $(2 + 2 = 4)$ - выражение является истинным, так как обе скобки являются истинными.

- (коровы пьют молоко) $\wedge$ (овечки едят волков) - выражения является ложным, так как обе скоби являются ложными.

Наглядный вид конъюнкции на кругах Эйлера:



На картинке можно увидеть, что конъюнкция берет пересечение двух высказываний.

Таблица истинности для конъюнкции:

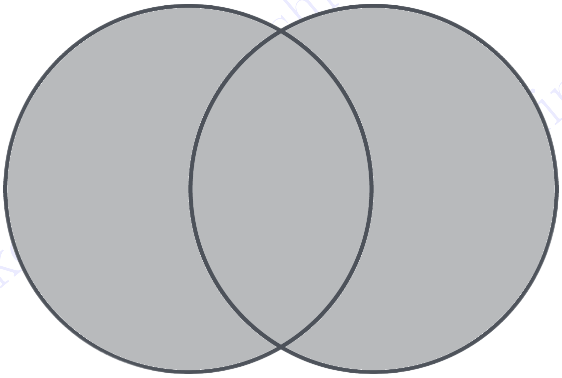
x	y	x $\wedge$ y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2. **Дизъюнкция** - логическое ИЛИ (логическое сложение) При дизъюнкции выражение ложно тогда и только тогда, когда ложны все входящие в него простые высказывания. Обозначается $\vee$.

   Например:

   - (25 делится на 5) $\vee$ (25 делится на 7) - выражение истино, так как истина левая скобка.
   - (трава красная) $\vee$ ($2 + 2 = 5$) - выражение ложно, так как обе скобки являются ложными.

   Наглядный вид дизъюнкции на кругах Эйлера:



На картинке можно увидеть, что дизъюнкция берет так называемое объединение двух высказываний, то есть ситуация, когда хоть одно является истинным.

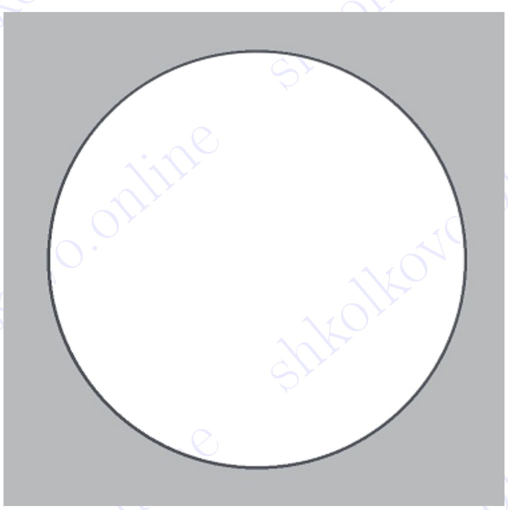
Таблица истинности для дизъюнкции:

x	y	x ∨ y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. **Отрицание** - операция, которая делает истинное высказывание ложным, а ложное истинным. Обозначается $\bar{x}$.

   Например: НЕ(x равен 5) обозначает, что x не равен 5.

   Наглядный вид отрицания на кругах Эйлера:

   Как можно увидеть, отрицание берет все, что не входит данную область.

Таблица истинности для отрицания:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

4. **Эквиваленция** - проверка двух высказываний на совпадение значений, то есть она истина, когда оба высказывания истины или оба ложны.

   Таблица истинности для эквиваленции:

x	y	$x \equiv y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

5. **Импликация** - логическое следование. Ложно тогда и только тогда, когда из истинного высказывания следует ложно. Обозначается $\rightarrow$.

   Импликацию можно понять на примере дождя, но для этого сначала приведем таблицу истинности импликации:

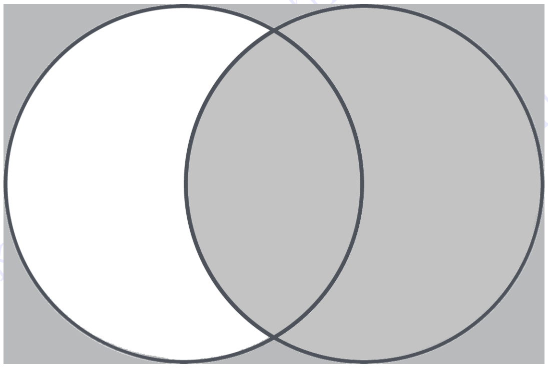
x	y	x→y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

   Пример про дождь:

   - Если не идёт дождь $(x = 0)$ и ты не взял зонт $(y = 0)$, значит, ты сухой. $(x \rightarrow y = 1)$
   - Если не идёт дождь $(x = 0)$ и ты взял зонт $(y = 1)$, значит, ты сухой. $(x \rightarrow y = 1)$

- Если идёт дождь ($x = 1$) и ты не взял зонт ($y = 0$), значит, ты промок. ($x \to y = 0$)
- Если идёт дождь ($x = 1$) и ты взял зонт ($y = 1$), значит, ты сухой. ($x \to y = 1$)

Наглядный вид импликации на кругах Эйлера:



Операции можно скрещивать. Например, чтобы составить отрицание импликации, распишите таблицу истинности импликации и навесьте отрицание. То есть:

x	y	$\overline{x \to y}$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Основные формулы алгебры логики:

1. $x \wedge \bar{x} = 0$
2. $x \wedge x = x$
3. $x \to y = \bar{x} \vee y$

Переместительный закон:

4. $x \vee y = y \vee x$
5. $x \wedge y = y \wedge x$

Сочетательный закон:

6. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

7. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

   Формулы поглощения:

8. $x \vee (x \wedge y) = x$
9. $x \wedge (x \vee y) = x$
10. $x \vee (\bar{x} \wedge y) = x \vee y$
11. $x \wedge (\bar{x} \vee y) = x \wedge y$

    Законы де Моргана:

12. $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$
13. $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$

    Формулы склеивания:

14. $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x$
15. $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = x$

Для лучшего понимания, лучше составьте таблицы истинности для каждого закона и проверьте их.

Задача на таблицу истинности:

Для лучшего понимания алгебры логики разберем еще 2 задачу ЕГЭ:

Логическая функция F задаётся выражением:

$(x \to \bar{y}) \to (\bar{x} \equiv \bar{z})$

Ниже представлен фрагмент таблицы истинности функции F.

???	???	???	F
1	0	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0

Определите, какому столбцу истинности функции F соответствует каждая переменная x, y, z.

Рассуждать нужно подобным образом:

Импликация ложна в случае, когда первая скобка будет истинной, а вторая скобка будет ложной. Вторая скобка ложна в случае, когда переменные x, z имеют разные значения. Из первой и третьей строчек мы можем сделать вывод о том, что эти переменные не могут занимать второй и третий, первый и второй столбцы. Следовательно, y занимает второй столбец. Рассмотрим вторую строку, в ней $y = 1$. Так как $(x \to \bar{y}) = 1$, то $x = 0$. Значит x занимает третий столбец, а z занимает первый.

Задача на неполную таблицу истинности:

Логическая функция F задаётся выражением:

$(z \equiv x) \vee (\overline{y} \wedge x)$

Ниже представлен фрагмент таблицы истинности функции F, содержащий неповторяющиеся строки, при которых фукнция F ложна.

???	???	???	F
0	0	1	0
0	???	???	0
???	1	0	0

Определите, какому столбцу истинности функции F соответствует каждая переменная x, y, z.

Рассуждать тут нужно подобным образом:

1. $F = 0$ тогда, когда дизъюнкция ложна, а ложна она в случае, когда обе скобки ложны. Значит z, x имеют разные значения. Предположим, что x занимает третий столбец. Обратимся к первой строке. Но тогда конъюнкция во второй скобке истинна, что делает $F = 1$. Если y занимает третий столбец, то $z = x = 0$, что также делает $F = 1$. Следовательно, третий столбец занят переменной z.

2. Обратимся к третьей строке, в ней $z = 0$, значит, $x = 1$. Тогда $y = 1$.

3. Теперь обратимся ко второй строчке. Предположим, что в ней $z = 0$. Тогда $x = 1$, а значит, занимает второй столбец. Но тогда $y = 1$, что не подходит для второй строки. Значит в ней $z = 1$. Тогда $x = 0$, а значит, $y = 0$, либо $y = 1$. В первом случае строка совпадет с первой строкой, значит подойдёт второй вариант. Таким образом, y занимает второй столбец, а x занимает первый.

Введение в метод друзей врагов:

Для примера разберем задачу:

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [8; 12]$ и $Q = [4; 30]$. Укажите наибольшую возможную длину промежутка A, для которого формула

$$((x \in P) \equiv (x \in Q)) \rightarrow \overline{(x \in A)}$$

тождественно истинна (т.е. принимает значение 1 при любых значениях переменной x).

Представим, что мы нажили неведомых врагов, которые во что бы то ни было хотят сделать это выражение ложным. Нужно помнить, что враги могут контролировать только x, A им не подконтрольно. Напишем, чего хотят враги:

$$\begin{cases} x \in A \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in P \\ x \in Q \end{cases} \\ \begin{cases} x \notin P \\ x \notin Q \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}$$

Отсюда следует, что врагам нужно, чтобы или x был и в P, и в Q, или же x не был ни в P, ни в Q, при этом всём x должен находиться в промежутке A.

Так как нам нужно, чтобы выражение всегда было истино, заведем друзей, которые будут ломать мечты врагов. Друзья уже имеют право изменять A по своему усмотрению в отличии от врагов. Как будут рассуждать друзья:

Обратим внимание, что отрезок P ($[8; 12]$) находится в отрезке Q ($[4; 30]$). Таким образом, получается, что система врагов ломается, если x принадлежит отрезку $[4; 30]$, но при этом не принадлежит отрезку $[8; 12]$, или же, если x не принадлежит промежутку A.

Следовательно, друзьям необходимо сделать такой A, что если x попадает в данный промежуток, то при этом x также будет входить в Q, но не входить в P. Под ответ подходят два промежутка - $[4; 8)$ (длина - 4) и $(12; 30]$ (длина - 18), но так как в условии задачи просят найти наибольшую возможную длину промежутка A, то ответ - 18.