



MASTER 2 I.S.I.F.A.R

VALORISATION DES PRODUITS DÉRIVÉS - RAPPORT

Smile Dynamics

Antoine MARRO
Shuo QI
Zakarya HAKKOU

Professeur : Monsieur Fouad ARRAFI

6 juin 2020

Table des Matières

1 Synthèse générale	3
2 Le modèle de Heston	5
2.1 Construction du modèle	5
2.2 La volatilité implicite dans le modèle de Heston	6
3 Perspectives et autres approches	8

Abstract

L'apparition de nouvelles options exotiques (Reverse Cliquets, Napoléons...) appelle à un *pricing* prenant davantage en compte les dynamiques futures des volatilités implicites, quitte à représenter la surface de volatilité immédiate avec moins de précision. Pour *pricer* ces options, il faut donc utiliser un modèle qui permette de prendre en compte la dynamique du smile de volatilité.

Bien que le modèle de Black-Scholes soit extrêmement populaire du fait de sa simplicité de calibration, il ne permet pas de *pricer* correctement les produits dérivés puisqu'il impose une volatilité constante. Il a donc fallu trouver d'autres modèles, tel que celui de Heston permettant de décrire le smile de volatilité implicite. Dans cette synthèse de [L.04], nous nous intéresserons plus particulièrement à ce modèle.

Le lecteur trouvera attaché à ce rapport un notebook Jupyter nommé "Calibration.html". Dans ce notebook, nous calibrons le modèle de Heston aux données relevées sur une journée, en prenant en entrée une matrice de volatilités correspondant à des couples strike-maturité. Pour une étude exhaustive de la qualité de représentation de la surface de volatilité de ce modèle, il nous aurait fallu disposer d'un échantillon de données sur plusieurs mois ou années. Nous nous contentons donc, pour illustrer cette calibration, de tracer les graphes des différents paramètres en fonction de la maturité des options, touchant ainsi à la "term-structure" de la volatilité du modèle de Heston laissée de côté par l'auteur.

Synthèse générale

La volatilité constitue un des paramètres importants à déterminer afin de pricer les produits dérivés. La surface de volatilité, dans le modèle de Black-Scholes, est plane par construction. Elle ne prend donc pas en compte les phénomènes de *skew* (volatilité implicite qui décroît en fonction du strike) et de *smile* (légère remontée de la volatilité implicite pour de grands strikes). La structure par termes des options (évolution de la volatilité en fonction de la maturité des options) est également un phénomène dont il est fait abstraction dans le modèle de Black-Scholes.

Les *Napoléons* constituent un exemple particulièrement illustratif du besoin de prendre en compte les gammas de volatilité dans le pricing d'une option. Comme décrit dans [C.04], un *Napoléon* est un produit à capital garanti qui offre un coupon p.a. relativement élevé (typiquement 8%), plus la pire performance mensuelle du sous-jacent. Le vendeur de ce produit est ainsi exposé au gamma de volatilité :

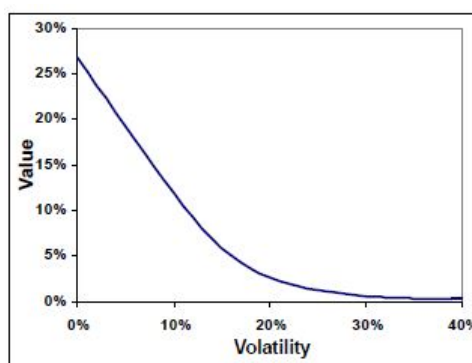


FIGURE 1.0.1: Valeur initiale du coupon variable d'un Napoléon en fonction de la volatilité du sous-jacent

Notons que $|\frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2}|$ est une fonction décroissante de la volatilité :

- Si la volatilité du sous-jacent est très élevée, la probabilité que la pire performance mensuelle du sous-jacent efface totalement le coupon de 8% est également élevée : l'émetteur du contrat n'est pas exposé à la volatilité, autrement dit le vega est faible.
- Si en revanche la volatilité est faible, le vega du produit devient fort. Ainsi, l'émetteur, qui est long vega, doit vendre de la volatilité quand la volatilité du produit diminue, et en acheter quand la volatilité du sous-jacent augmente.

De plus, si le spot décroît, le hedger devra racheter du vega - en achetant des options - comme en témoigne la figure 1.0.2. Or, les mouvements de spot étant négativement corrélés avec les mouvements de volatilité implicite, acheter les options nécessaires sera d'autant plus cher. Le PnL du hedger sera alors négatif. On a donc vu qu'il est nécessaire pour les émetteurs de tels contrats de prendre en compte les cross-gamma : $\frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2}$ et $\frac{\partial^2 P}{\partial \sigma \partial S}$.

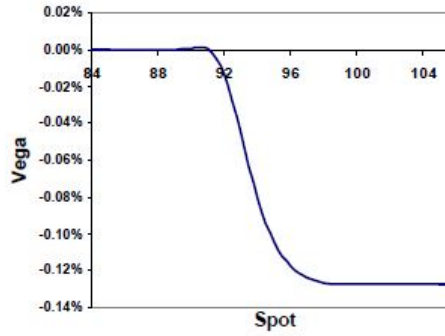


FIGURE 1.0.2: Vega du coupon variable d'un Napoléon à la fin du premier mois, en fonction du spot du sous-jacent

Une première correction à cela réside dans l'utilisation du modèle à volatilité locale (Dupire, 1994). Ce modèle permet en effet de reproduire le smile de volatilité exact du marché au moment du pricing. En revanche, tout au long de la vie de l'option, l'évolution de la volatilité n'est dictée que par l'évolution du spot du sous-jacent, et se base sur le smile de volatilité initial - connu au moment du *pricing* de l'option. En d'autres termes, le smile de volatilité est statique dans le modèle à volatilité locale.

Nous discuterons ici de l'article de Lorenzo Bergomi, [L.04], dans lequel il pose le problème du modèle à volatilité locale et introduit des modèles à volatilité stochastique tels que le modèle de Heston ou de Jump et Lévy.

Modèles de Jump/Lévy

Il est essentiel de prendre en compte la possibilité d'un mouvement quasi-instantané de grande amplitude (saut) dans le cours des actifs, afin d'évaluer des options et surtout pour la gestion des risques.

Les processus de Lévy sont une classe de processus avec sauts à la fois assez riche pour décrire la réalité des marchés et assez simple pour permettre un traitement rigoureux et des calculs explicites.

Soit le processus de diffusion de saut - *jump-diffusion* - dont voici la dynamique pour le spot :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ_t + J S dq_t$$

avec :

- μ : le drift historique,
- σ : la volatilité,
- J : la taille des sauts.

Les modèles de Jump/Lévy ont des processus de sauts discontinus, donc le pricing d'options sera discontinu. Ainsi, les deltas seront beaucoup plus simples à obtenir dans le modèle de Lévy que dans d'autres modèles de smile. Egalement, les modèles de Jump/Lévy génèrent un *skew* sans degrés de libertés supplémentaires.

Bien que ces modèles à sauts soient populaires puisqu'ils permettent de reproduire le phénomène de smile de volatilité pour une maturité donnée, ils contiennent des problèmes d'ordre structurels. En effet, les smiles forward ne dépendent pas de la date forward. Egalement, les deltas pour les options vanille sont indépendants des modèles et peuvent être lus directement sur le smile.

Néanmoins, dans la suite de notre synthèse, nous nous concentrerons sur le modèle de Heston et son application.

Cette synthèse est organisée de la façon suivante : dans la section 2, nous présenterons le modèle de Heston, typique des modèles de volatilité stochastique à un facteur, et discuterons de la dynamique de volatilité implicite dans ce modèle. La dernière section évoque d'autres méthodes permettant de capturer la volatilité du marché, afin d'être plus précis dans le *pricing* d'options.

Le modèle de Heston

2.1 Construction du modèle

Heston propose en 1993 le modèle de volatilité stochastique à un facteur suivant :

$$\begin{aligned}dS &= \mu S dt + \sqrt{V} S dZ_t \\dV &= -k(V - V_0)dt + \sigma\sqrt{V}dW_t\end{aligned}$$

Et on note :

- ρ la corrélation entre les browniens Z et W
- $m_\Delta(t, S, V)$ (resp. $v_\Delta(t, S, V)$) les fonctions de moyenne (resp. de variance) associées au PnL d'un hedger de dérivé dont le sous-jacent est de prix S .

La fonction de volatilité V suit ce que l'on appelle un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Il s'agit d'un processus stochastique de retour à la moyenne décrit par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = -\theta(r_t - \mu)dt + \sigma dW_t$$

avec :

- θ : un taux de retour à la moyenne (la vitesse de convergence),
- μ : un niveau de retour à la moyenne (la moyenne espérée),
- σ : un paramètre "vol de vol",
- W_t : un processus de Wiener.

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est intéressant car il a une solution simple pour le paramètre r_t , qui entraîne la volatilité spot. Cela peut amener à une meilleure compréhension du lien entre le retour à la moyenne et la "vol de vol".

La dynamique de Heston permet, pour le PnL du hedger, de dériver les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial m}{\partial t} + Lm - rm &= -(\mu + r + q)S\Delta \\ \frac{\partial v}{\partial t} + Lv - 2rv &= -VS^2(\Delta + \frac{\partial m}{\partial S} + \frac{\rho\sigma}{S}\frac{\partial m}{\partial V})^2 - (1 - \rho^2)\sigma^2V(\frac{\partial m}{\partial V})^2\end{aligned}$$

où l'opérateur différentiel L est défini tel que :

$$L = \mu S \frac{\partial}{\partial S} - k(V - V_0) \frac{\partial}{\partial V} + \frac{1}{2}VS^2 \frac{\partial^2}{\partial V^2} + \frac{1}{2}\sigma^2V^2 \frac{\partial^2}{\partial V^2} + \rho\sigma SV \frac{\partial^2}{\partial S \partial V}$$

Et étant donné que le PnL n'est plus incertain à maturité, on a évidemment en conditions terminales :

$$m_\Delta(T, S, V) = -f(S)$$

$$v_\Delta(T, S, V) = 0$$

On peut alors montrer que le Δ qui minimise la fonction de variance s'écrit :

$$\Delta = -\frac{\partial m}{\partial S} - \frac{\rho\sigma}{S} \frac{\partial m}{\partial V}$$

On constate alors que :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Lv - 2rv = -(1 - \rho^2)\sigma^2 V \left(\frac{\partial m}{\partial V}\right)^2$$

Autrement dit, le terme source de la variance du PnL ne disparaît pas totalement, et il n'y a donc pas de pricing risque-neutre dans ce modèle. En injectant la valeur du Δ dans l'EDP de m , nous avons l'équation de pricing :

$$-\frac{\partial m}{\partial t} + (q - r)S \frac{\partial m}{\partial S} - k(V - \bar{V}_0) \frac{\partial P}{\partial V} - \frac{1}{2}VS^2 \frac{\partial^2 m}{\partial S^2} - \frac{1}{2}\sigma^2 V \frac{\partial^2 m}{\partial V^2} - \rho\sigma SV \frac{\partial^2 m}{\partial S \partial V} = -rm$$

$$\bar{V}_0 = V_0 - \frac{(\mu - r + q)\rho\sigma}{k}$$

On remarque :

- Si $\sigma = 0$ (i.e. la fonction de volatilité du spot n'a plus de composante stochastique), on retombe sur le delta du modèle de Black-Scholes, et l'équation de prix des actifs contingents s'identifie avec l'équation de Feynman-Kac en modèle de Black-Scholes. Les cross-gammas ne sont alors plus considérés dans le pricing. En ce sens, le modèle de Heston est une généralisation du modèle de Black-Scholes.
- \hat{V}_0 peut s'interpréter comme une renormalisation de V_0 , due au fait que les variations de volatilité sont partiellement couvertes par la couverture en delta mise en oeuvre sur le sous-jacent.

2.2 La volatilité implicite dans le modèle de Heston

Par construction, dans le modèle de Heston, les dynamiques de spot - S - et de volatilité - V - sont modélisées. En revanche, les dynamiques de ρ , σ et donc de \hat{V}_0 sont ignorées par le modèle : ces valeurs sont par construction supposées constantes. L'auteur a utilisé la formule de prix du modèle de Heston et procédé à son inversion pour identifier le comportement de ses différents paramètres en fonction des prix de marché. Les résultats obtenus sont illustrés dans la figure 2.2.1 :

- Notre première observation est que les valeurs supposées constantes dans le modèle de Heston sont en réalité variables. Cela vient du fait que nous considérons, dans l'inversion de la formule de prix, des options d'une grande différence en termes de strikes et de maturités. Le modèle de Heston ne peut ainsi modéliser correctement toutes ces options qu'en autorisant un shift de ses paramètres supposés constants.
- Introduire une **fonction de shift** dans le modèle de Heston peut être intéressant pour modéliser correctement le comportement d'une grande variété d'options. Une telle fonction de shift, qui réduirait le biais du modèle dans le compromis biais-variance, peut être difficile à modéliser dans le cas où les données de marché sont lacunaires. On pourrait alors lui préférer une modélisation de type *Vasicek-Hull-White*, en autorisant les divers paramètres du processus de volatilité à varier en fonction du temps.

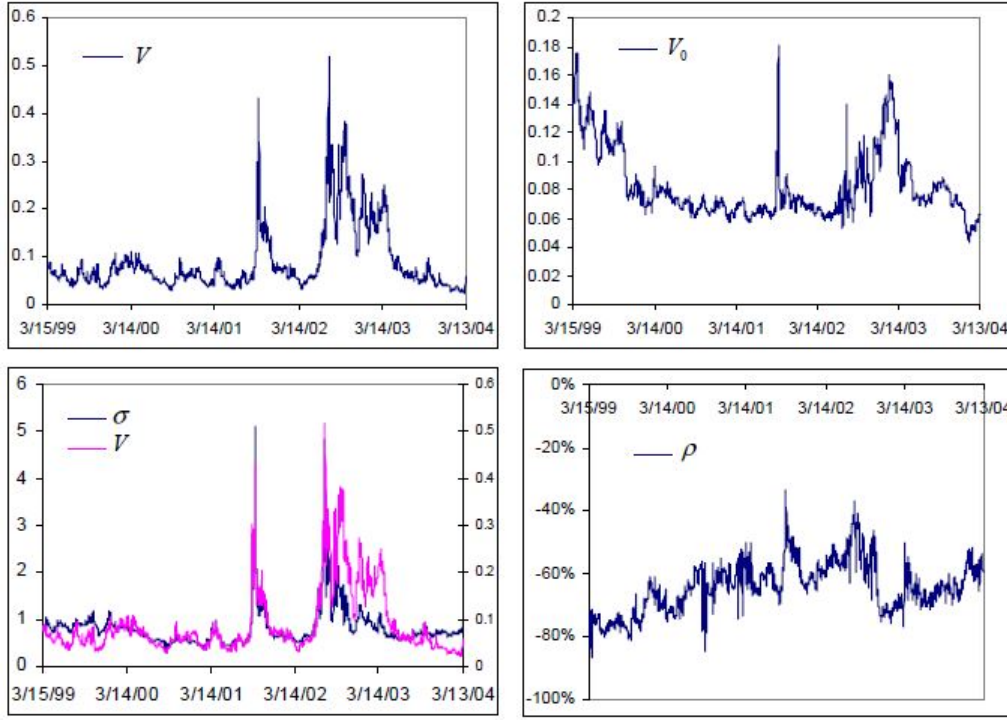


FIGURE 2.2.1: Calibration évolutive du modèle de Heston entre mars 1999 et mars 2004

L'auteur a également comparé sur toute cette période les volatilités implicites - générées avec le modèle de Heston - et les volatilités réalisées. Pour ce faire, on reprend la définition du modèle de Heston :

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sqrt{V} S dZ_t \\ dV &= -k(V - V_0)dt + \sigma \sqrt{V} dW_t \end{aligned}$$

On a alors les variations et covariations quadratiques suivantes :

$$\begin{aligned} V_Q(S) &= V S^2 dt \\ V_Q(V) &= V \sigma^2 dt \\ Cov_Q(V, S) &= \sigma \rho V S dt \end{aligned}$$

Idéalement, chacune de ces covariations quadratiques devrait être en moyenne égale à la variation effective de la variable correspondante, ce qui n'est en pratique pas le cas.

Prenons l'exemple de la variation quadratique du paramètre de volatilité V . On calcule sur cette période :

$$R_V = \left\langle \frac{\delta V^2}{\sigma^2 V} \right\rangle = 0.4$$

où $\langle . \rangle$ représente la moyenne sur les variations journalières.

On a alors :

$$\frac{\sigma_{realised}}{\sigma_{implied}} = \sqrt{R_V} = 0.63$$

Ainsi, la calibration du modèle de Heston surestime la volatilité de la volatilité des options d'un facteur environ égal à 2 sur la période observée. La même méthode appliquée à la covariation des processus de spot et de vol donne un ratio d'environ 1. Le modèle de Heston capture correctement la corrélation spot-vol des options.

Perspectives et autres approches

Nous avons étudié certains modèles de volatilité stochastique. Nous avons pu voir que ces modèles permettent de résoudre une des lacunes du modèle de Black-Scholes. En effet, ce modèle ne prend pas en compte le fait que la volatilité sous-jacente peut ne pas être constante pendant la durée de vie du produit dérivé, et que celui-ci est affecté par le changement de valeur du sous-jacent.

Nous pouvons aussi discuter des recherches du professeur Rama Cont - voir [RJ02] -, qui obtient un modèle permettant de "diffuser la surface de volatilité", à l'aide de techniques tels que l'estimation non paramétrique de Nadaraya-Watson et de Kernel gaussien. Ces techniques permettent d'apporter de l'aléatoire en propageant des *séries temporelles* qui représentent la surface de volatilité. Ces séries temporelles sont par la suite utilisées dans la procédure appelée décomposition de Karhunen Loeve, empruntée à la Data Science, qui permet de récupérer des facteurs de risque orthogonaux. Ces facteurs de risque résument ainsi l'information servant à générer la dynamique des surfaces de volatilité, tout en permettant leur ajustement de manière strictement indépendante. L'identification de tels facteurs orthogonaux permet ainsi d'éviter les problèmes de compromis rencontrés dans la calibration des modèles de spot à volatilité stochastique.

Conclusion

Cette synthèse avait pour objectif d'étudier la dynamique des volatilités implicites, en présentant notamment les idées principales et résultats théoriques de [L.04].

Nous avons, dans un premier temps, rappelé le cadre général de notre travail, en effectuant une synthèse globale de l'article permettant de mieux comprendre notre sujet. Nous avons pu remarquer que l'analyse et le contrôle de la dynamique des volatilités implicites constitue une problématique centrale dans la construction de modèles permettant de *pricer* des options exotiques et *path-dependent*. Nous avons présenté certaines propriétés dynamiques des volatilités implicites pour les deux classes de modèles les plus populaires : le modèle de Heston, qui est un exemple de modèle à volatilité stochastique, et les modèles Jump/Lévy. Cependant, nous avons axé notre étude sur le modèle de Heston et constaté que sa calibration surestime la volatilité réelle des options.

Enfin, nous avons pu proposer d'autres techniques permettant de capter la dynamique de smile de la volatilité avec plus de précision, et ainsi d'améliorer le *pricing* d'options.

Bibliographie

- [C.04] Jeffery C. "*Reverse cliquets : end of the road ?*". 2004.
- [L.04] Bergomi L. "*Smile Dynamics*". 2004.
- [RJ02] Cont R. and da Fonseca J. "*Dynamics of implied volatility surfaces*". 2002.