T1. 用牛顿法求 $\sqrt[3]{43}$ 的值（即方程 $x^3-43=0$ 的实数根），结果精确到 0.001，并分析迭代过程中累积的舍入误差。

牛顿法，取 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$　　$f(x) = x^3-43$　$f'(x) = 3x^2$

$\therefore \varphi(x) = x - \frac{x^3-43}{3x^2} = \frac{2x^3+43}{3x^2}$　　$\therefore x_{n+1} = \frac{2x_n^3+43}{3x_n^2}$

取 $x_0=3$　$\therefore x_1=3.593$，$x_2=3.506$，$x_3=3.503$　$x_3=\varphi(x_3)$

$\therefore \sqrt[3]{43} \approx 3.503$

$\max\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| \le \varphi'(3.6) = 0.052 = L$

$e_{舍0}=0$　$e_{舍1} = \frac{1}{2}\times10^{-3}$，$e_{舍2}=\frac{1}{2}\times10^{-3} + L\cdot e_{舍1} = 5.26\times10^{-4}$

$e_{舍3}=\frac{1}{2}\times10^{-3} + L\cdot e_{舍2} = 5.27\times10^{-4}$

T2. 试证明，方程 $6-2x+\cos x=0$ 有且仅有一个根。对任意的实数 x_0，迭代法 $x_{k+1} = 3+\frac{1}{2}\cos x_k$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛到方程的根。

先证方程有且仅有一根。　$6-2x+\cos x = f(x)$　$\therefore f'(x) = -2-\sin x < 0$

$\therefore f(x)$ 在 R 上单调递减。$\because f(-\pi) = 5+2\pi > 0$　$f(\pi) = 5-2\pi < 0$

$f(x)$ 必有且仅有一个根，且该根在 $(-\pi,\pi)$ 上。

下证迭代法 $x_{k+1}=3+\frac{1}{2}\cos x_k$ 收敛（到方程唯一的根上）

设 $\varphi(x) = 3+\frac{1}{2}\cos x$　$\therefore \varphi(x) \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$　　$\varphi'(x) = -\frac{1}{2}\sin x$

$\because \varphi'(\xi)$　$(\xi\in[\frac{5}{2},\frac{7}{2}]) \le \frac{1}{2} \le 1$

$\therefore$ 对 $\forall x, \bar{x} \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$ $\exists$ $0<L<1$　有 $|\varphi(x)-\varphi(\bar{x})| \le L|x-\bar{x}|$

$\therefore$ 对于 $\forall x_0 \in [\frac{5}{2},\frac{7}{2}]$，迭代法 $x_{n+1} = 3+\frac{1}{2}\cos x_n$ 收敛且收敛到方程唯一的根

$x^* = \varphi(x^*) \Rightarrow$　$x^*=3+\frac{1}{2}\cos x^*$　　$6-2x^*+\cos x^*=0$

T3. 设 $a>0$. 证明迭代公式 $x_{k+1}=\frac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 三阶收敛到 $\sqrt{a}$

易知，原迭代式收敛

令 $\varphi(x)=\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$ $\varphi'(x)=\frac{(3x^2+3a)\cdot(3x^2+a)-6x^2(x^2+3a)}{(3x^2+a)^2}=\frac{3x^4-6ax^2+3a^2}{(3x^2+a)^2}=\frac{3(x^2-a)^2}{(3x^2+a)^2}$

$\varphi''(x)=\frac{48ax(x^2-a)}{(3x^2+a)^3}$ $\varphi'''(x)=-\frac{48a(9x^4-18ax^2+a^2)}{(3x^2+a)^4}$

通过迭代公式可求得 $x^*=\varphi(x^*)$ $\therefore x^*=\frac{x^*(x^{*2}+3a)}{3x^{*2}+a}$ $\therefore 2(x^{*2}-a)=0 \Rightarrow x^{*2}=a$

$\therefore \varphi'(x^*)=0$, $\varphi''(x^*)=0$, 且 $\varphi'''(x^*)\neq 0$. $\therefore$ 上述迭代公式产生的序列 $\{x_k\}$ 三阶收敛到 $\sqrt{a}$

T4. 试说明一种数值迭代算法求函数 $f(x)=e^{-x}\ln x$ 的拐点，坐标值精确到千分位.

要求说明算法的迭代公式，初始点，并理论论证算法的收敛性，给出算法停止条件，迭代次数和最终结果.

拐点二阶导为0或不存在且左右异号 $f'(x)=e^{-x}(\frac{1}{x}-\ln x)$ $f''(x)=e^{-x}(\ln x-\frac{2x+1}{x^2})$

易知 $f''(x)=0$ 时，x 为 $f(x)$ 的拐点，所以求 $f(x)=e^{-x}\ln x$ 拐点即为求 $g(x)=x^2\ln x-2x-1=0$ 的根.

采用牛顿法，令 $\varphi(x)=x-\frac{g(x)}{g'(x)}=x-\frac{x^2\ln x-2x-1}{2x\ln x+x-2}=\frac{x^2\ln x+x^2+1}{2x\ln x+x-2}$

取迭代公式为 $x_{n+1}=\frac{x_n^2\ln x_n+x_n^2+1}{2x_n\ln x_n+x_n-2}$，取 $x_0=3$

① $\because g(2)<0$, $g(3)>0$ $\therefore g(2)\cdot g(3)<0$.

② 而 $g'(x)=2x\ln x+x-2$，当 $x\in[2,3]$ 时，$g'(x)>0$. $\therefore g'(x)\neq 0$

③ 而 $g''(x)=2\ln x+3$ 在 $x\in[2,3]$ 时恒大于0. $\therefore g''(x)$ 在 $[2,3]$ 上不变号.

④ $|g(2)|=5-4\ln 2\le 4\ln 2=|g'(2)|$ 且 $|g(3)|=9\ln 3-7\le 6\ln 3+1=|g'(3)|$

同时初值 $g(x_0)\cdot g''(x_0)=(9\ln 3-7)\cdot(2\ln 3+3)>0$

$\therefore$ 对 $\forall x\in[2,3]$ 时，牛顿法收敛.

算法停止条件为，对于 $m=n$ s.t. $x_{m+1}=\frac{x_m^2\ln x_m+x_m^2+1}{2x_m\ln x_m+x_m-2}=x_m=x^*$ (x^*, x_m, x_{m+1} 精确到千分位时)

$\because x_0=3$. $\therefore x_1=2.620$ $x_2=2.554$. $x_3=2.552$ $x_4=2.552$

$\therefore$ 需要迭代4次，结果为 $x^*=2.552$ $\therefore$ 拐点为：$(2.552, 0.073)$