2021-2022 秋季学期 数值分析与算法 课程作业

第二章　插值法

1、若 $x_n = 5^n$，求 $\nabla^2 x_n$ 及 $\delta^2 x_n$.

2、用牛顿法求经过点 $(-1,-5),(0,-1),(2,1),(3,11)$ 的 3 次多项式，并求出经过这些点的所有 4 次多项式的通用表达式。

3、已知 $\sin x$，$x \in [30°, 60°]$ 的 6 位有效数字函数表，步长 $h = 6' = (6/60)°$. 不考虑加减乘除计算误差，分析用分段线性插值方法求区间内 $\sin x$ 近似值的总误差界。

4、设 $f(x) \in C^{(5)}[1,3]$ 为 5 阶导连续的实函数，且 $\forall x \in [1,3], \left|f^{(5)}(x)\right| \le M$. 试求出满足以下条件的不高于 4 次的插值多项式 $P(x)$，并对插值截断误差进行分析：

$$P(1) = f(1) = 0, \qquad P'(1) = f'(1) = 0, \qquad P''(1) = f''(1) = 4,$$

$$P(2) = f(2) = 0, \qquad P(3) = f(3) = 0.$$

5、若设原始黑白景象投映到平面 (x,y) 点处的灰度值函数为 $g(x,y)$，那么数字图像可认为记录了整数坐标像素点位置 (u,v) 上的函数值 $g(u,v)$, $u,v \in \mathrm{N}$。当图像变换时，往往需要通过插值得到之前没有在图像上记录的灰度 $g(x,y)$, $x \in (u,u+1)$, $y \in (v,v+1)$。查阅资料，给出二维函数的<u>最近邻插值</u>和<u>双线性插值</u>的插值方法，并分析其插值方法误差。（设函数 $g(x,y)$ 二阶可导，且满足不等式 $\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| \le M_1, \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| \le M_2,$ 以及 $\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right| \le M_{11}, \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right| \le M_{12}, \left|\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right| \le M_{22}$）