数值分析第一次大作业报告

学号：2019011458　姓名：党添添　班级:自96

第一题

(1)思路分析

我的方法比较简单。首先，把最后要得到的图像的点的坐标转化为极坐标，然后找到这个极坐标对应的给的图形的直角坐标，然后根据已知点进行插值，计算出最后要得到的图像的某个点的值。

（2）数学推导和误差分析

对于最后得到的方形二维码，设某个点的坐标为(des_x,des_y)。

注意，这里的坐标与常识有所不同，读进来的数据是二维数组，第0维是x，代表纵向；第1维是y，代表横向。

根据读进来的极坐标二维码可以得知其边长为2013。

对应的得到的方形二维码的边长应为1006.5（$\frac{2013}{2}=1006.5$)

所以(des_x,des_y)对应的极坐标应为：

$\theta=\frac{x}{1006.5}\times 2\pi$

$r=y$

这个极坐标对应到极坐标二维码读出的数据上来说：

$ori\_y=1006.5+r\cdot cos(\theta)$

$ori\_x=1006.5-r\cdot cos(\theta)$

然后根据极坐标二维码给出的整数点进行双线性插值

设$x\in(u,u+1),y\in(v,v+1),u,v$都是整数

先**固定y**，对x进行插值：

$g(x,v)=(x-u)*g(u+1,v)-g(u,v)*(x-u-1)$

$g(x,v+1)=(x-u)*g(u+1,v+1)-g(u,v+1)*(x-u-1)$

误差:$R(x,v)=k_1(x)(x-u)(x-u-1)$

再对y插值：

$g(x,y)=(v+1-y)*g(x,v)+(y-v)*g(x,v+1)$

对y插值本身的误差:$R(y)=k_2(y-v)(y-v-1)$

由于迭代计算造成的误差：$R_1(x,y)=(v+1-y)R(x,v)+(y-v)R(x,v+1)$

总的截断误差:
$R(x,y)=R_1(x,y)+R_y=(v+1-y)R(x,v)+(y-v)R(x,v+1)+k_2(y)(y-v)(y-v-1)$

$|R(x,v)|=|k_1(x)(x-u)(x-u-1)|\le M\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$

$R(y)=k_2(y-v)(y-v-1)\le M\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$

$max|R(x,y)|\le|v+1-y|\cdot|R(x,v)|+|y-v|\cdot|R(x,v+1)|+|k_2(y)||(y-v)(y-v-1)|\le\frac{1}{4}M$

(3)所得二维码

第二题

（1）

令已知采样点的坐标为$x_0,....x_{100}$,$y_0,....y_{100}$,$z_0,....z_{100}$。$x_0=y_0=z_0=-3$。

与第一题类似，先固定y和z，对x插值。

$h_{n,n}(x)=f(x,y_n,z_n)=\frac{x-x_n}{x_{n+1}-x_n}(f(x_{n+1},y_n,z_n)-f(x_n,y_n,z_n))+f(x_n,y_n,z_n)$

同理，可得$h_{n,n+1}(x),h_{n+1,n}(x),h_{n+1,n+1}(x)$

对于$h_{n,n}(x)$来说，误差：$R_x(x)=k_1(x)(x-x_n)(x-x_{n+1})$

再对y插值：

令$g_n(x,y_{n+1})=f(x,y_{n+1},z_n)=h_{n+1,n}(x)$,$g_n(x,y_n)=f(x,y_n,z_n)=h_{n,n}(x)$

$g_n(x,y)=f(x,y,z_n)=\frac{y-y_n}{y_{n+1}-y_n}(g_n(x,y_{n+1})-g_n(x,y_n))+g_n(x,y_n)$

同理，可得$g_{n+1}(x,y)$

对于$g_n(x,y)$来说，误差：
$R_{x,y}(x,y)=\frac{y-y_n}{y_{n+1}-y_n}(R_x(x)-R_x(x))+R_x(x)+k_2(y)(y-y_n)(y-y_{n+1})=R_x(x)+k_2(y)(y-y_n)(y-y_{n+1})$

再对z插值：

令$w(z_{n+1})=f(x,y,z_n)=g_{n+1}(x,y)$,$w(z_n)=f(x,y,z_n)=g_n(x,y)$

$w(x,y,z)=f(x,y,z)=\frac{z-z_n}{z_{n+1}-z_n}(w(z_{n+1})-w(z_n))+w(z_n)$

$w(x,y,z)$就是所得点（x，y，z）的SDF

误差：$R_{x,y,z}=R_{x,y}(x,y)+k_3(z-z_n)(z-z_{n+1})$

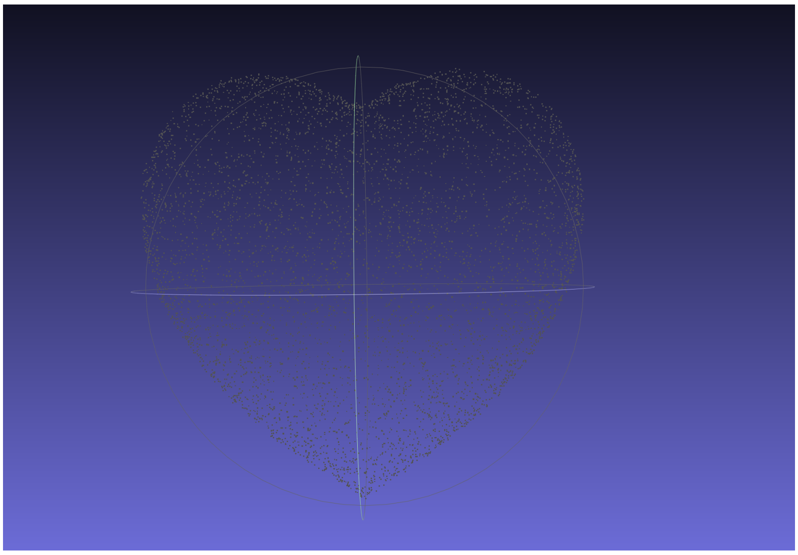
$max|R_{x,y,z}|=\frac{1}{8}M\times 3=\frac{3}{8}M$

(2)

我选择使用第一种方法求表面点，即利用插值得到分辨率更高的 SDF，取绝对值小于某一阈值的点作为表面点 。

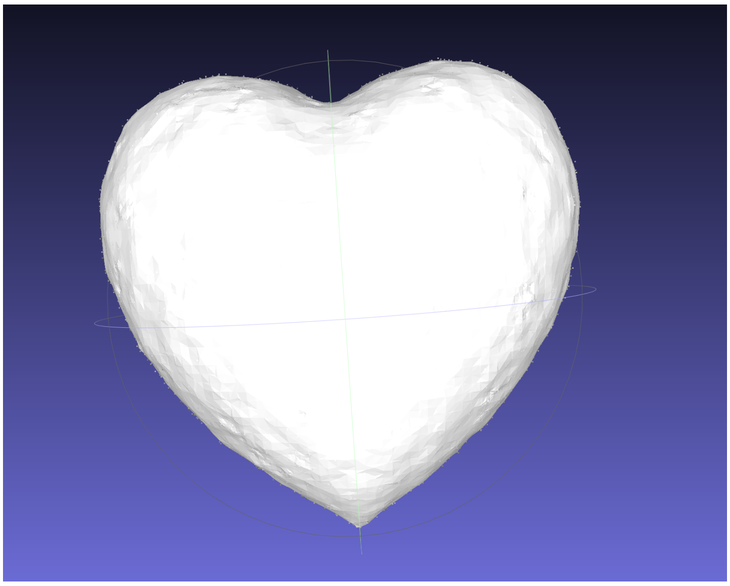
我先用random.uniform生成了生成了600,0000个点，然后算这600,0000个点的SDF，选择小于阈值的点作为表面点。

我选择的阈值是0.01（实际上，0.05左右都能取得较好的图像）。可以得到的可视化表面点的图如下：（附件：表面点文件夹里面的heart.obj和heart.ply)



（3）

按照油管上的视频所说，逐步操作，可得图像为下图（我保存到了3Dmash文件夹里面的3Dmash.ply和3Dmash.obj）：



第三题

第三题就是一个简单的最小二乘法:

先对方程进行一个简单的变换:

$(2x^2+y^2+z^2-1)^3+ax^2z^3+by^2z^3=0$

$\frac{(2x^2+y^2+z^2-1)^3}{y^2z^3}+a\frac{x^2}{y^2}+b=0$

令$Y=-\frac{(2x^2+y^2+z^2-1)^3}{y^2z^3}$,$X=\frac{x^2}{y^2}$

$Y=aX+b$

写成向量形式（$\vec{X}$,$\vec{Y}$都是列向量）：

$\vec{Y} = a\vec{X} + b \cdot \vec{1}$

同时左乘$\vec{X}^T$,即求取内积:

$\vec{X}^T\vec{Y} = a\vec{X}^T\vec{X} + b \cdot \vec{X}^T\vec{1}$

可得:

$a^{ols} = (\vec{X}^T\vec{X})^{-1}\vec{X}^T\vec{Y} = -0.096$

$b^{ols} = \bar{Y} - \bar{X} \times a_1 = -1.056$

运行结果如下:

```
a = -0.09614398545036264
b = -1.0564065366398951
```

附件相关:

上述提到的附件都已经放入对应的文件夹中了。代码有1.py，2.py和3.py。分别对应第一题，第二题和第三题的代码。

总结:

这次大作业比较简单，但也很有意义。我进一步认识到了插值的作用。如果没有计算机的话，手算插值表达式往往比较繁琐。但是在计算机的帮助下，计算插值表达式和得出结果就方便了很多，思路也更加清晰。唯有误差分析比较繁琐，需要考虑很多。总体而言，这是一次虽然轻松，但也充满意义的大作业。