第一章. 绪论.

T1. ①模型误差. ②观测误差. ③方法误差 ④舍入误差

T2. ① 设变量 x_A 的绝对误差为 Δx_A ∴ 由题, $|\Delta x_A| \le 0.5\times10^{-5}$

∴ 相对误差为 $\left|\frac{\Delta x_A}{e}\right| \approx \left|\frac{\Delta x_A}{x_A}\right| \le 1.839\times10^{-6}$. 近似数 x_A 有效 6 位.

② 设变量 x_A 的绝对误差为 Δx_A. 由题. $|\Delta x_A| \le 0.5\times10^{-4}$

∴ 相对误差为 $\left|\frac{\Delta x_A}{e/1000}\right| \approx \left|\frac{\Delta x_A}{x_A}\right| \le 1.852\times10^{-2}$. 近似数 x_A 有效 2 位.

T3. ① 若开平方用 5 位函数表. 则 $\sqrt{901} \approx 30.017$.

∴ $f(30) = \ln(\sqrt{901} - 30) \approx \ln(30.017 - 30) \approx -4.0745$

(1) 设变量 $y = \sqrt{x^2+1}$. $f(30) = \ln(y-30)$. 由题知 $|\Delta y| \le 0.5\times10^{-3}$

∴ $|\Delta f(30)| \le \max\left|\frac{df}{dy}\right| \cdot |\Delta y| = \max\left|\frac{1}{y-30}\right| \cdot 0.5\times10^{-3} = \left|\frac{1}{30.0165-30}\right| \cdot 0.5\times10^{-3}$

$= 3.0303\times10^{-2}$

(2) 设变量 $y = \sqrt{x^2+1}$. $f(30) = -\ln(y+30)$ 由题知 $|\Delta y| \le 0.5\times10^{-3}$

$|\Delta f(30)| \le \max\left|\frac{df}{dy}\right| \cdot |\Delta y| = \max\left|\frac{1}{y+30}\right| \cdot 0.5\times10^{-3} = \left|\frac{1}{30.0165+30}\right| \cdot 0.5\times10^{-3}$

$= 8.3310\times10^{-6}$

T4. 设变量 x_n 的绝对误差为 Δx. 由题

$\Delta x_0 = 0$. $x_0 = 2$. $|\Delta x_k| \le 5\times10^{-n} = |x_k - \sqrt{7}|$

设 $x_k = \sqrt{7} + \Delta x_k$, $x_{k+1} = \sqrt{7} + \Delta x_{k+1}$

∴ $\sqrt{7} + \Delta x_{k+1} = \left|\frac{1}{2}\left(\sqrt{7} + \Delta x_k + \frac{7}{\sqrt{7}+\Delta x_k}\right)\right|$

$\Delta x_{k+1} = \left|\frac{1}{2}\left(\Delta x_k + \frac{7\cdot\sqrt{7} - \Delta x_k)}{7-(\Delta x_k)^2} - \sqrt{7}\right)\right|$

$= \left|\frac{1}{2}(\Delta x_k - \sqrt{7}) \cdot \left(\frac{-(\Delta x_k)^2}{7-(\Delta x_k)^2}\right)\right|$

$\le \left|\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{25\times10^{-2n}}{7}\right| = 2.6\times10^{-2n}$

∴ $\Delta x_{k+1} \le 2.6\times10^{-2n} \le 5\times10^{-2n}$ ∴ x_{k+1} 必是 $\sqrt{7}$ 具有 $2n$ 位有效数字的近似值