T1. $\nabla^2 x_n = \nabla(\nabla x_n) = \nabla(x_n - x_{n-1}) = x_n - x_{n-1} - x_{n-1} + x_{n-2} = 5^n - 2\cdot 5^{n-1} + 5^{n-2}$

$\delta^2 x_n = \delta(\delta x_n) = \delta(x_{n+\frac{1}{2}} - x_{n-\frac{1}{2}}) = x_{n+1} - x_n - x_n + x_{n-1} = 5^{n+1} - 2\cdot 5^n + 5^{n-1}$

T2. 设过点 $(-1,-5)$, $(0,-1)$, $(2,1)$, $(3,11)$ 的3次多项式为形如（x_0, x_1, x_2, x_3）

$N_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

其中，由牛顿差值法定义知：$a_0 = f(x_0)$ $a_1 = f[x_0,x_1]$ $a_2 = f[x_0,x_1,x_2]$ $a_3 = f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

∴ 由下表 $a_0=-5$. $a_1=4$. $a_2=-1$ $a_3=1$

$m^2-3m+n+1-m^3+m^2+2m$

m^2-m-2

x_0	$f(x_0)=-5$				
x_1	$f(x_1)=-1$	$f[x_0,x_1]=4$			
x_2	$f(x_2)=-1$	$f[x_0,x_2]=2$	$f[x_0,x_1,x_2]=-1$		
x_3	$f(x_3)=11$	$f[x_0,x_3]=4$	$f[x_0,x_1,x_3]=0$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=1$	
x_4	$f(x_4)=n$	$f(x_0,x_4]=\frac{n+5}{m+1}$	$f[x_0,x_1,x_4]=\frac{n-4m+1}{m(m+1)}$	$f[x_0,x_1,x_2,x_4]=\frac{m^2-3m+n+1}{m(m+1)(m-2)}$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{-m^3+2m^2-m+n+1}{m(m+1)(m-2)(m-3)}$

∴ 牛顿差值法求得经过上述四点的多项式为 $N_3(x) = -5 + 4(x+1) - (x+1)\cdot x + (x+1)\cdot(x-2)\cdot x$

设 $x_4(m,n)$ 为任意一点，求经过上述四点的四次多项式的通式，补上表 x_4 行

∴ 可由牛顿差值法得包含以上4点的任意四次多项式通式，其中 m,n 为任意实数

$N_4(x) = -5 + 4(x+1) - \cdot x(x+1) + x(x+1)(x-2) + \frac{-m^3+2m^2-m+n+1}{m(m+1)(m-2)(m-3)}\cdot x\cdot(x+1)(x-2)(x-3)$

T3. 对 $\sin x$, $x\in[30°,60°]$ 等分为 $n=30\times10=300$ 个子区间做一次样条差值

∴ $|R(x)| \le \frac{1}{8}M_2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\frac{\pi}{1800}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{51840000} = 3.29\times10^{-7}$

其中 $M_2 = \max_{30°\le x\le 60°}|f''(x)| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 上述误差为方法误差

下考虑舍入误差，由于采用6位有效数字正弦表 $y_i = \sin x_i$ $|\Delta y_i| \le 0.5\times10^{-6}$

线性插值公式为 $A = \frac{x_i+h-x}{h}\cdot y_i + \frac{x-x_i}{h}\cdot y_{i+1}$

$|\Delta A| \le \max\left|\frac{x_i+h-x}{h}\right||\Delta y_i| + \left|\frac{x-x_i}{h}\right||\Delta y_{i+1}| = 5\times10^{-7}$

∴ $|R(x)_总| \le 0.5\times10^{-6} + 3.29\times10^{-7} = 8.29\times10^{-7}$

T4 由题可构造四次多项式 $p(x)=p\cdot(x-1)^2(x-2)(x-3)=p(x-1)^2\cdot(x^2-5x+6)$

因为由条件知 $x=1$ 为二重根, $x=2$, $x=3$ 为一重根, 故构造上式.

$p'(x)=2p\cdot(x-1)(x^2-5x+6)+p(x-1)^2(2x-5)=p(x-1)(4x^2-17x+17)$

$p''(x)=p(4x^2-17x+17)+p(x-1)(8x-17)=p(12x^2-42x+34)$

$\because p''(1)=4 \quad \therefore 4p=4 \quad \therefore p=1 \quad \therefore p(x)=(x-1)^2(x-2)(x-3)$

$R_4(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\omega_5(x)\le\frac{1}{120}\cdot\max|f^{(5)}(\xi)|\cdot(x-1)^3\cdot(x-2)(x-3)$

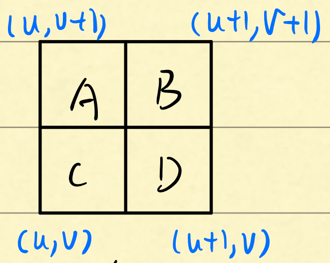
求导可知 $[(x-1)^3(x-2)(x-3)]$ 的极大值在 $x=\frac{11+\sqrt6}{5}$ 处取得

极大值为 $\frac{6\cdot(2+3\sqrt6)\cdot(54+19\sqrt6)}{3125}$

$\therefore R_4(x)\le\frac{1}{10}\cdot\frac{62\sqrt6+117}{3125}\cdot\max|f^{(5)}(\xi)|$

$\le\frac{62\sqrt6+117}{31250}\cdot M=8.6\times10^{-3}\cdot M$

T5 ①最近邻差值



假设在二维图象中已知上述四点 $g(x,y)$ $x=u,u+1$; $y=v,v+1$

则当 $x\in(u,u+1)$, $y\in(v,v+1)$ 时, 若点 (x,y) 落在A区域 则

$g(x,y)=g(u,v+1)$ ··· 其余同理

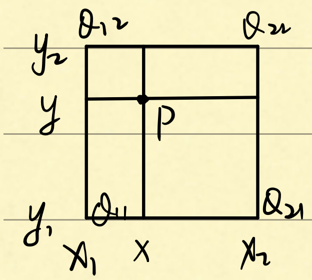
误差分析:

$g(x,y)$ 在 (u,v) 点的泰勒展开为: $g(x,y)=g(u,v)+(x-u)\frac{\partial g(u,v)}{\partial x}+(y-v)\frac{\partial g(u,v)}{\partial y}$

$\therefore |R(x)|=|g(x,y)-g(u,v)|=\max\left\{(x-u)\frac{\partial g(u,v)}{\partial x}+(y-v)\frac{\partial g(u,v)}{\partial y}\right\}$

$\le\frac{1}{2}M_1+\frac{1}{2}M_2$

②双线性插值



已知 (x_1,y_1) (x_1,y_2) (x_2,y_1) (x_2,y_2) 四点的值, 为求 (x,y) 的值

先沿x做插值 $\begin{cases} f_1=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(Q_{11})+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(Q_{21}) \\ f_2=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(Q_{12})+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(Q_{22}) \end{cases}$

再沿y做插值 $f(p)=\frac{y_2-y}{y_2-y_1}f_1+\frac{y-y_1}{y_2-y_1}f_2$

综上过程, 即为双线性插值

$f(p)=(v+1-y)(u+1-x)\cdot g(u,v)+(v+1-y)(x-u)g(u+1,v)+(y-v)(u+1-x)g(u,v+1)+(y-v)(x-u)g(u+1,v+1)$

误差分析：$g(x,y)$在(u,v)处的泰勒展开为：$g(u,v)+(x-u)\frac{\partial g(u,v)}{\partial x}+(y-v)\frac{\partial g(u,v)}{\partial y}$

$+\frac{1}{2!}(x-u)^2 g''_{xx}(u,v)+\frac{1}{2!}(x-u)(y-v)g''_{xy}(u,v)$

$+\frac{1}{2!}(x-u)(y-v)g''_{yx}(u,v)+\frac{1}{2!}(y-v)^2 g''_{yy}(u,v)$ $-f(p)$

$|R_1(x)|=g(x,y)-f(p)\leq g(u,v)+(x-u)\cdot M_1+M_2(y-v)+\frac{M_{11}}{2}(x-u)^2+\frac{M_{12}}{2}(x-u)(y-v)+\frac{M_{21}}{2}(x-u)(y-v)+\frac{M_{22}}{2}(y-v)^2$

$\leq \frac{M_{11}}{8}+\frac{M_{12}}{4}+\frac{M_{22}}{8}$