2021–2022 秋季学期 数值分析与算法 课程作业

第一章　绪论

1、假如我们希望知道地球的表面积 A 是多少，则我们首先①将地球近似地看成球体，②取地球半径 $r = 6370\ \mathrm{km}$, ③利用迭代法求得 $\pi = 3.1415926\ldots$，最后④求得地球表面积 $A = 4\pi r^2 = 4 \times 3.141 \times 6370^2 = 5.1 \times 10^8\ \mathrm{km}^2$。试问在上述近似求解的过程中，每一步骤分别包含了哪一种类的误差？

2、已知 $\mathrm{e} = 2.7182818\ldots$，求以下近似值 x_A 的相对误差，并给出这些近似数各自的有效数位：(I) $x = \mathrm{e},\ x_A = 2.71828$; (II) $x = \mathrm{e}/1000,\ x_A = 0.0027$.

3、$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$，若开平方用 5 位函数表，求 $f(30)$ 的近似值。只考虑开平方的舍入误差，自然对数的结果误差有多大？若改用另一等价公式

$$\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = -\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$$

计算，对应的结果误差有多大？

4、用下列迭代法计算$\sqrt{7}$：

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ x_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_k + \dfrac{7}{x_k}\right), \qquad k = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

证明：若 x_k 是 $\sqrt{7}$ 的具有 n 位有效数字的近似值，则 x_{k+1} 必是 $\sqrt{7}$ 的具有至少 $2n$ 位有效数字的近似值。