✧ 正规语言的性质与运算

正规语言的性质与运算

- ✧ 针对正规语言的 *Pumping* 引理
- ✧ 有关正规语言的几个判定性质
- ✧ 关于正规语言的封闭运算

针对正规语言的 Pumping 引理

- ✧ 正规语言应满足的一个必要条件
- ✧ 可用于判定某些语言不是正规语言

针对正规语言的 Pumping 引理

✧ DFA 的 "Pumping" 特性

设 DFA $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, $|Q|=n$.

对于任一长度不小于 n 的字符串 $w = a_1a_2\ldots a_m$, 其中 $m \geq n$, $a_k \in \Sigma$ $(1 \leq k \leq m)$, $q \in Q$, 考察如下状态序列

$$
\left.
\begin{aligned}
&p_0 = q \\
&p_1 = \delta'(q, a_1) \\
&p_2 = \delta'(q, a_1a_2) \\
&\ldots \\
&p_n = \delta'(q, a_1a_2\ldots a_n)
\end{aligned}
\right\}
$$

$p_{n+1} = \delta'(q, a_1a_2\ldots a_{n+1})$

$\ldots$

$p_m = \delta'(q, a_1a_2\ldots a_m)$

由 *Pigeonhole* 原理, $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ 中至少有两个状态是重复的，即存在 i, j, $0 \leq i < j \leq n$, $p_i = p_j$.

✧ "pumping" 特性：

任一长度不小于状态数目的字符串所标记的路径上，必然出现重复的状态.

✧ DFA 的 "Pumping" 特性

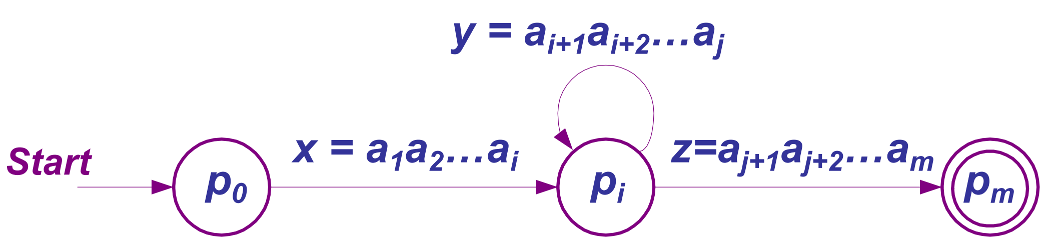
– "pumping" 特性：如前,设 DFA $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, $|Q|=n$, $w = a_1a_2\ldots a_m$ $(m \geq n)$, 则存在 i, j, $0 \leq i < j \leq n$, $p_i = p_j$, 其中$p_k = \delta'(p_0, a_1a_2\ldots a_k)$, $0 \leq k \leq m$.

– 若假定$p_0 = q_0$, $p_m \in F$, 即$w \in L(D)$.

令 $w = xyz$, 其中：

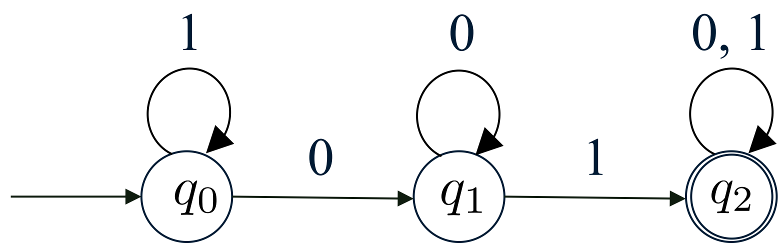
$$x = a_1a_2\ldots a_i,\ y = a_{i+1}a_{i+2}\ldots a_j,\ z = a_{j+1}a_{j+2}\ldots a_m$$

则对任何$k \geq 0$，都有 $xy^kz \in L(D)$.　(参考下图)



针对正规语言的 Pumping 引理

例1：分析下图所示DFA的“pumping”特性。



解：总共只有3个状态。考察以下字符串。

1. $w = 101$: $q_0 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} q_2$，$q_0$重复出现。可以将$w = 101$拆成三部分，$x = \epsilon$，$y = 1$，$z = 01$，则$1^k01 \in L$。

2. $w = 001$: $q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} q_2$，$q_1$重复出现。可以将$w = 001$拆成三部分，$x = 0$，$y = 0$，$z = 1$，则$00^k1 \in L$。

3. $w = 010$: $q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{0} q_2$，$q_2$重复出现。可以将$w = 010$拆成三部分，$x = 01$，$y = 0$，$z = \epsilon$，则$010^k \in L$。

✧ Pumping Lemma for Regular Language

设 L 是正规语言, 则存在常数 $n\geq 1$, 使得任一长度不小于n 的字符串$w\in L$, $|w|\geq n$, 都可以分成三个部分, 即 $w=xyz$, 且满足下列条件:

1. $y\neq\varepsilon$.
2. $|xy| \leq n$.
3. 对任何$k\geq 0$, 都有 $xy^kz\in L$.

证明 设 L 是 DFA $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 的语言.
取 $n = |Q|$ 即可.

针对正规语言的 Pumping 引理

✧ Pumping 引理的一个应用

– 用于证明某个语言 *L* 不是正规语言

– 证明步骤

1. 考虑任意的$n \geq 1$.
2. 找到一个满足以下条件的串$w \in L$ (长度至少为n).
3. 任选满足$w=xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq n$ 的x,y,z
4. 找到一个 $k \geq 0$, 使 $xy^kz \notin L$.

针对正规语言的 Pumping 引理

例2：证明语言$L_{01} = \{0^m1^m | m \geq 0\}$不是正规语言。

证明：假设L_{01}是正则语言，那么存在满足泵引理的条件的常数n，取$w = 0^n1^n$（满足$|w| \geq n$）的条件。令$w = xyz$，由于$y \neq \epsilon \wedge |xy| \leq n$，所以$x$和$y$都只由0构成，且$x$中包含的0的个数小于$n$。

根据泵引理，若$k = 0$，$xy^kz = xz$应该属于L_{01}。然而，xz包含不多于n个0和n个1，显然不属于L_{01}。矛盾。所以L_{01}不是正则语言。

针对正规语言的 Pumping 引理

例3：语言L由所有满足如下条件的0和1组成的串构成：0的数量是1的数量的两倍。试用Pumping引理证明L不是正规语言,。

证明：假设L是正规语言，则存在满足泵引理条件的常数n。取$w = 0^{2n}1^n \in L$，满足$|w| \geq n$的条件。令$w = xyz$，且满足$y \neq \epsilon \wedge |xy| \leq n$。显然，$x$和$y$都是由0组成的字符串，$x$中包含的0的个数小于$n$，$y$中至少包含一个0。

根据泵引理，如$k = 0$，则$xy^kz = xz$应该属于L。由于y中至少包含一个0，去掉y后无法保证xz中0的数量是1的两倍。矛盾。

需要注意的是，这道题并没有给出正规语言的完整描述形式，没有指定0一定出现在1前面。但是$w = 0^{2n}1^n$确实是属于该语言的一个字符串，只要找到一个反例证明有矛盾即可。

例4：语言L由所有满足如下条件的0和1组成的串构成：0的数量多于1的数量(对0和1在串中出现的次序没有限制)。试用泵引理证明语言L不是正规语言。

证明：假设L是正规语言，则存在满足泵引理条件的常数n。取$w = 1^n0^{n+1} \in L$，满足$|w| \geq n$的条件。令$w = xyz$，且满足$y \neq \epsilon \wedge |xy| \leq n$。显然，$x$和$y$都是由1组成的字符串，$x$中包含的1的个数小于$n$，$y$中至少包含一个1。

根据泵引理，如$k = 2$，则$xyyz$应该属于L。由于xyz中包含n个1，y中至少包含一个1，因此$xyyz$中包含的1的数量不少于$n + 1$，而0的数量依然是$n + 1$，该语言所要求的的“0的数量多于1的数量”的性质不成立。矛盾。

针对正规语言的 Pumping 引理

例5：证明$L = \{0^m | m$是完全平方数$\}$不是正规语言。

证明：假设L是正则语言，那么存在满足泵引理条件的常数n，设$w = 0^{n^2}$，即共有n^2个0。把w拆分成$w = xyz$，由于$y \neq \epsilon \wedge |xy| \leq n$，则$1 \leq |y| \leq n$。根据泵引理，$xyyz \in L$。由于$|xyz| = n^2$，则$n^2 + 1 \leq |xyyz| \leq n^2 + n$。由于$xyyz$也是一个完全平方数，$|xyz| = n^2$，则在$[n^2 + 1, n^2 + n]$之间不存在完全平方数（比$|xyz|$大的下一个完全平方数是$(n+1)^2$）。矛盾。

例6：证明只由1构成且长度为素数的所有串所构成的语言L_{pr}不是正规语言。

证明：假设L_{pr}是正则语言，那么存在满足泵引理条件的常数n，考虑某个素数$p \geq n+2$（这样的素数一定存在，因为素数的数量是无穷个），设$w = 1^p$。把w拆分为$w = xyz$，且满足$y \neq \epsilon$和$|xy| \leq n$。设$|y| = m$，则$|xz| = p - m$。现在考虑串$xy^{p-m}z$，根据泵引理，$xy^{p-m}z \in L_{pr}$。然而，

$$|xy^{p-m}z| = |xz| + (p-m)|y| = p - m + (p-m)m = (m+1)(p-m) \qquad (1)$$

由于$|y| = m \wedge y \neq \epsilon$，所以$m+1 > 1$。由于$m = |y| \leq |xy| \leq n \wedge p \geq n+2$，所以$p - m > 1$。因此，$m+1$和$p-m$是两个大于1的整数因子，$|xy^{p-m}z|$不是素数。矛盾。

针对正规语言的 Pumping 引理

✧ *Pumping* 引理不是正规语言的充分条件

- 如果不符合*Pumping*引理，那么一定不是正规语言。
- 如果符合*Pumping*引理，并不一定是正规语言。

有关正规语言的几个判定性质

✧ 基本判定性质（ *Decision Properties* ）

– 判定正规语言是否为空

– 判定正规语言中是否包含特定的字符串

– 判定两个正规语言是否相等

判定正规语言是否为空

✧ 以有限自动机表示正规语言

– 判定算法　测试从初态是否可达某一终态. 先求所有可达状态的集合，若其中包含终态，则该正规语言非空，　否则为空语言。可由如下步骤递归地计算可达状态集合：

基础：初态是可达的；

归纳：设状态 q 是可达的，若对于某个输入符号或 ε，q 可转移到 p，则 p 也是可达的；

– 算法复杂度　设有限自动机的状态数目为 n，上述判定算法的复杂度为 $O(n^2)$.

判定正规语言是否为空

- 以正规表达式表示正规语言
  - 判定算法 可由如下步骤归纳出正规表达式表示的语言是否为空：

    基础：$L(\phi)$ 为空语言，而 $L(\varepsilon)$ 和 $L(a)$ 不是；
    归纳：
    1. 设 $R=R_1+R_2$，$L(R)$ 为空 ***iff*** $L(R_1)$ 和 $L(R_2)$ 都为空；
    2. 设 $R=R_1R_2$， $L(R)$ 为空 ***iff*** $L(R_1)$ 或 $L(R_2)$ 为空；
    3. 设 $R=R_1^*$， $L(R)$ 非空（至少包含 ε ）；
    4. 设 $R=(R_1)$， $L(R)$为空 ***iff*** $L(R_1)$ 为空.
  - 算法复杂度 设正规表达式包含的符号数目为 n，上述判定算法的复杂度为 $O(n)$ ；

判定是否包含特定的字符串

- ✧ 以 *DFA* 表示正规语言
  - 判定算法 从初态开始，处理输入字符串 *w*， 如果可以结束于某一终态，则该正规语言中包含 *w*，否则不包含 *w* 。
  - 算法复杂度 设输入字符串 *w* 的长度 |*w*|=*n*，上述判定算法的复杂度为 *O*(*n*).
- ✧ 以 *NFA* （或ε–*NFA* ）表示正规语言 可以将其转化为等价的 *DFA*，再执行上述过程；也可以直接模拟其处理字符串的过程，判定算法的复杂度为 $O(ns^2)$, 其中 *n* 为字符串的长度，*s* 为 *NFA* （或ε–*NFA* ）的状态数目.
- ✧ 以正规表达式表示正规语言 将其转化为等价的ε–*NFA*，然后执行上述过程.

判定两个正规语言是否相等

✧ **判定算法** 可以采取如下步骤：

1. 先将两个正规语言的表达形式都转化为 *DFA*， 问题转化为两个*DFA*是否是等价的；
2. 适当重命名，使两个*DFA*没有重名的状态；
3. 将两个*DFA*相并， 构造一个新的*DFA*， 原来的终态仍是终态，转移边不发生任何变化，取任何一个状态为初态；
4. 对新构造的*DFA*运用填表算法，如果原来*DFA*的两个初态不可区别，则这两个正规语言相等，否则不相等.

✧ **算法复杂度** 以上算法的复杂度即填表算法的复杂度，其上限为$O(n^4)$；可以适当设计填表算法的数据结构，使其复杂度降为 $O(n^2)$.

关于正规语言的封闭运算

✧ 关于正规语言的几个主要的封闭运算

- 并（*union*）
- 补（*complement*）
- 交（*intersection*）
- 差（*difference*）
- 反向（*reversal*）
- （星）闭包（*closure(star)*）
- 连接（*concatenation*）
- 同态（*homomorphism*）
- 反同态（*inverse homomorphism* ）

关于正规语言的封闭运算

✧ 正规语言的并（*union*）

– 结论 若 ***L*** 和 ***M*** 为正规语言，则 ***L***∪***M*** 也是正规语言.

– 证明 因为 ***L*** 和 ***M*** 为正规语言，所以存在正规表达式***R*** 和***S***，使得 ***L(R)=L, L(S)=M.***

由正规表达式的定义，有

$$L(R+S) = L(R) \cup L(S) = L \cup M$$

所以， ***L*** ∪ ***M***为正规语言.

关于正规语言的封闭运算

✧ 正规语言的（星）闭包（*closure(star)*）

– 结论 若 L 为字母表 Σ 上的正规语言，则 L^* 也是正规语言.

– 证明 因为 L 为正规语言，所以存在正规表达式 R，使得 $L(R)=L$.

由正规表达式的定义， $L(R^*) = (L(R))^* = L^*$.

所以， L^*为正规语言.

关于正规语言的封闭运算

✧ 正规语言的连接（*concatenation*）

– 结论 若 ***L*** 和 ***M*** 为正规语言，则 ***LM*** 也是正规语言

– 证明 因为 ***L*** 和 ***M*** 为正规语言，所以存在正规表达式***R*** 和***S***，使得 ***L(R)=L, L(S)=M.***

由正规表达式的定义，***L(RS) = L(R)L(S) =LM.***

所以， ***LM***为正规语言.

关于正规语言的封闭运算

✧ 正规语言的补（*complement*）

– 结论　若 L 为 Σ 上的正规语言，则 $\overline{L} = \Sigma^* - L$ 也是正规语言.

– 证明　因为 L 为正规语言，所以存在

$$DFA\ \ A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)，使得\ L(A)=L.$$

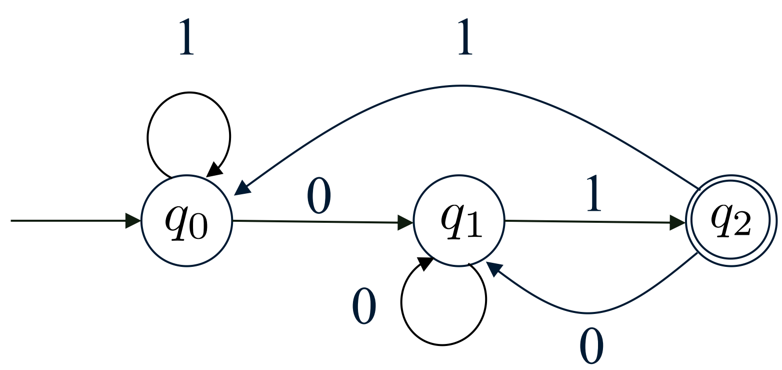
现构造 $DFA\ \ B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$，则有

$$w \in L(B)\quad iff\ \delta'(q_0, w) \in Q - F\quad iff\quad w \notin L(A).$$

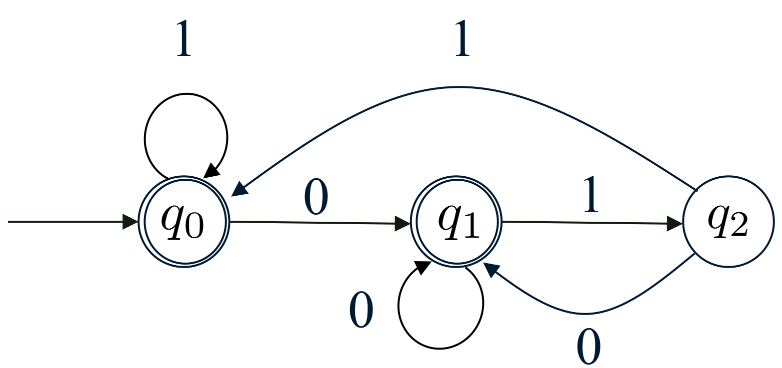
即 $L(B) = \Sigma^* - L(A) = \Sigma^* - L = \overline{L}$. 所以，$\overline{L}$ 为正规语言.

例7：语言L由所有以01结尾的0和1组成串构成，请计算$\bar{L}$。

解：首先画出L所对应的DFA

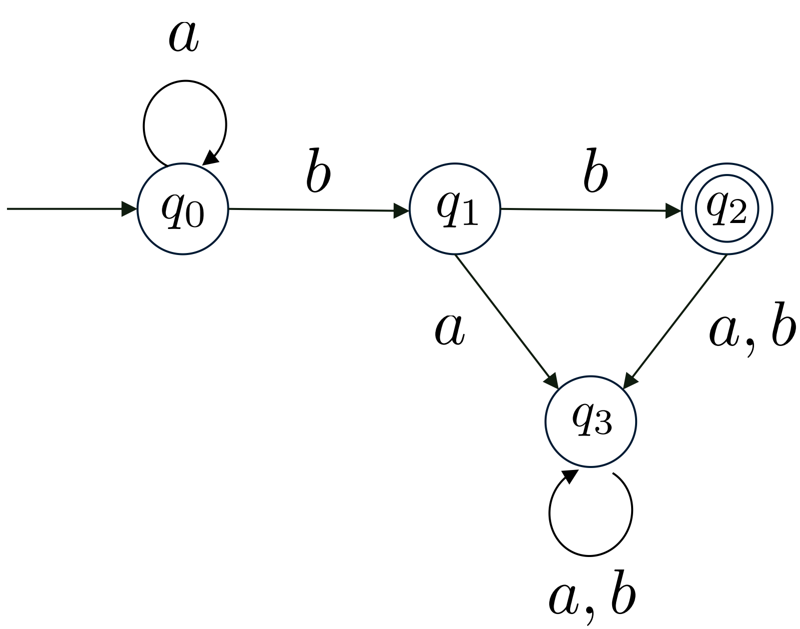


然后画出$\bar{L}$所对应的DFA，调换终态和非终态即可：



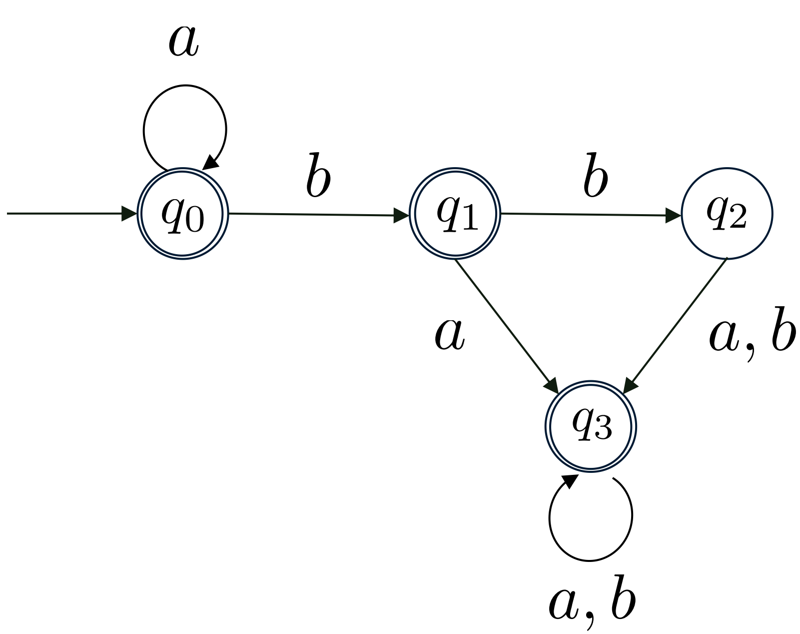
例8：正规表达式$\mathbf{a^*bb}$表示$\{a, b\}$上的一个语言，试构造一个接受该语言的补语言的DFA。

解：首先构造一个接受该语言的DFA。



例8：正规表达式$\mathbf{a}^*\mathbf{bb}$表示$\{a,b\}$上的一个语言，试构造一个接受该语言的补语言的DFA。

解：然后再互换终态和非终态。



关于正规语言的封闭运算

✧ 正规语言的交（*intersection*）

– 结论 若 L 和 M 为正规语言，则 $L \cap M$ 也是正规语言：

– 证明 因为 $L \cap M = \overline{\overline{L} \cup \overline{M}}$，所以 $L \cap M$ 为正规语言.

– 另一证明途径 设 DFA $A_L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_L, F_L)$ 和 DFA $A_M = (Q_M, \Sigma, \delta_M, q_M, F_M)$ 的语言分别为 L 和 M,

构造 DFA $A = (Q_L \times Q_M, \Sigma, \delta, \langle q_L, q_M \rangle, F_L \times F_M)$

其中 $\delta(\langle p, q \rangle, a) = \langle \delta_L(p, a), \delta_M(q, a) \rangle$.

可以证明 $L(A) = L \cap M$. 所以，$L \cap M$ 为正规语言.

例9：构造下面两个转移表所示DFA的交集的转移表。

	0	1
$\rightarrow p$	q	p
$*q$	q	q

	0	1
$\rightarrow r$	r	s
$*s$	s	s

解：根据上页的方法构造转移表如下。

	0	1
$\rightarrow pr$	qr	ps
ps	qs	ps
qr	qr	qs
$*qs$	qs	qs

例10：构造下面两个转移表所示DFA的交集的转移表。

	0	1
$\rightarrow q_1$	q_2	q_1
q_2	q_3	q_1
$*q_3$	q_3	q_2

	0	1
$\rightarrow p_1$	p_2	p_1
$*p_2$	p_1	p_2

解：根据上页的方法构造转移表如下。

	0	1
$\rightarrow q_1p_1$	q_2p_2	q_1p_1
q_1p_2	q_2p_1	q_1p_2
q_2p_1	q_3p_2	q_1p_1
q_2p_2	q_3p_1	q_1p_2
q_3p_1	q_3p_2	q_2p_1
$*q_3p_2$	q_3p_1	q_2p_2

✧ 正规语言的差（*difference*）

– 结论　若 L 和 M 为正规语言，则 $L - M$ 也是正规语言.

– 证明　因为 $L - M = L \cap \overline{M}$ ，所以 $L - M$ 为正规语言.

✧ 正规语言的反向（*reversal*）

- 记号　设字符串 $w=a_1a_2\ldots a_n$, 则 w 的反向（ *reversal* ）$w^R = a_na_{n-1}\ldots a_1$; 语言 L 的反向 $L^R = \{ w^R \mid w\in L \}$.
- 结论　若 L 为正规语言，则 L^R 也是正规语言:
- 证明　设 L 对应的正规表达式为E ，使得 $L(E)=L$. 归纳于 E 的结构，可以证明存在正规表达式E^R, 使得 $L(E^R)= L^R$.

  基础：若 E 为ε, ϕ, a，则 $E^R= E$:

  归纳：

  1. 设 $E=E_1+E_2$，令 $E^R = E_1^R+E_2^R$ ，可证 $L(E^R)= L^R$;
  2. 设 $E=E_1E_2$，令 $E^R = E_2^RE_1^R$ ，可证 $L(E^R)= L^R$;
  3. 设 $E=E_1^*$ ，令 $E^R = (E_1^R)^*$ ，可证 $L(E^R)= L^R$;
  4. 设 $E=(E_1)$，令 $E^R = (E_1^R)$ ，可证 $L(E^R)= L^R$.

  □

✧ 正规语言的反向（*reversal*）

– 结论 若 L 为正规语言，则 L^R 也是正规语言：

– 另一证明途径 设有限自动机 A 的语言为 L，即 $L(A)=L$.

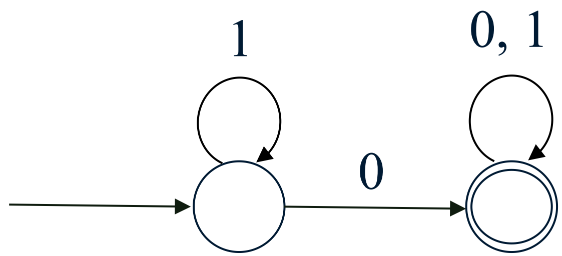
通过以下步骤修改 A 的转移图，得到有限自动机 B：

1. 将 A 的转移图中所有的弧反向；
2. 将 A 的初态作为 B 的唯一终态；
3. 增加一个新的状态 p_0 作为 B 的初态，并从 p_0 到 A 的所有终态增加一条 ε–转移弧.

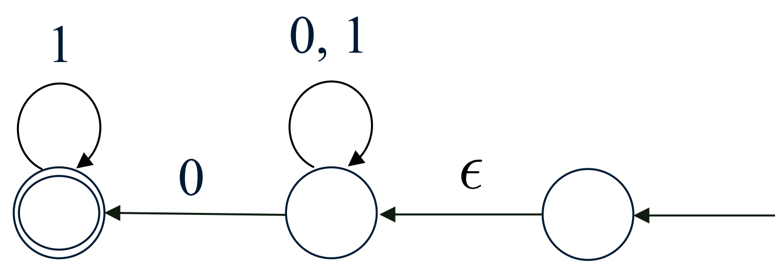
可以证明 $L(B)= L^R$. 所以， L^R 为正规语言.

关于正规语言的封闭运算

例11：为下图所示的DFA构造其反向语言的ϵ-NFA 。



解：根据上页的方法构造一个ϵ-NFA。



关于正规语言的封闭运算

✧ 正规语言的同态（*homomorphism*）

- 记号 设映射 $h: \Sigma \to T^*$, 则对 $w=a_1a_2\ldots a_n \in \Sigma^*$, 定义
  $h(w) = h(a_1)\, h(a_2)\, \ldots\, h(a_n)$, 称为串 w 的一个同态；

  对语言 $L \subseteq \Sigma^*$, 定义 L 的同态 $h(L) = \{\, h(w) \mid w \in L \,\}$;
- 举例 设 $h(0)=ab$, $h(1)=\varepsilon$, 则
  $$h(0101) = h(0)\, h(1)\, h(0)\, h(1) = abab$$
  对于 $L = \{\, 0^k 1^k \mid k \geq 0 \,\}$
  $$h(L) = \{h(0^k 1^k) \mid k \geq 0 \} = \{\, (ab)^k \mid k \geq 0 \,\} = L((ab)^*)$$
- 结论 若 L 为正规语言，$h: \Sigma \to T^*$, 则 $h(L)$ 也是正规语言

关于正规语言的封闭运算

✧ 正规语言的同态（*homomorphism*）

– 结论 若 L 为正规语言，$h: \Sigma \to T^*$, 则 $h(L)$ 也是正规语言：

– 证明 设 L 对应的正规表达式为E，使得 $L(E)=L$. 归纳于 E 的结构，可以证明存在$h(E)$， $L(h(E)) = h(L(E)) = h(L)$.

基础：若 E 为ε, ϕ，取 $h(E) = E$, 显然 $L(h(E)) = h(L(E))$;

若 E 为a，取 $h(E) = h(a)$, 有 $L(h(E)) = h(L(E)) = \{h(a)\}$;

归纳：若 $E=E_1E_2$，取 $h(E) = h(E_1)\, h(E_2)$, 有

$$
\begin{aligned}
L(h(E)) &= L(h(E_1))\, L(h(E_2)) = h(L(E_1))\, h(L(E_2)) \\
&= h(\{w_1 \mid w_1 \in L(E_1)\})\, h(\{w_2 \mid w_2 \in L(E_2)\}) \\
&= \{h(w_1) \mid w_1 \in L(E_1)\}\, \{h(w_2) \mid w_2 \in L(E_2)\} \\
&= \{h(w_1)h(w_2) \mid w_1 \in L(E_1) \wedge w_2 \in L(E_2)\} \\
&= \{h(w_1w_2) \mid w_1w_2 \in L(E_1)L(E_2)\} \\
&= h(L(E_1)L(E_2)) = h(L(E_1E_2)) = h(L(E))
\end{aligned}
$$

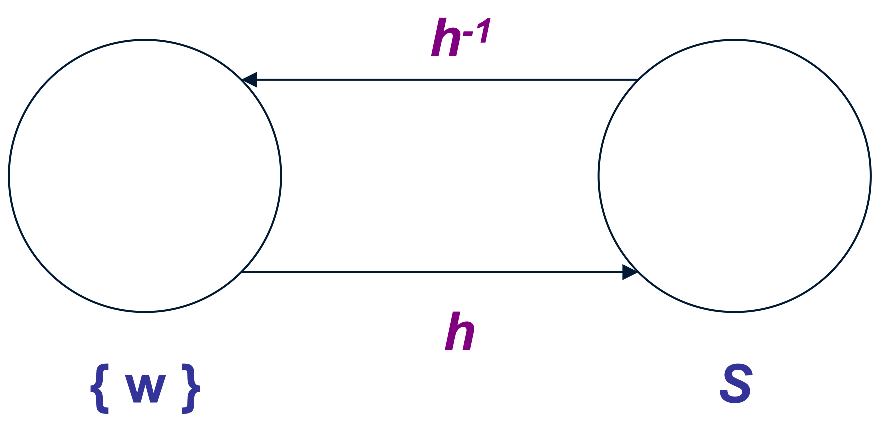
$E=E_1+E_2$ 和 $E=E_1^*$ 的情形类似. □

关于正规语言的封闭运算

✧ 正规语言的反同态（*inverse homomorphism*）

– 记号 设映射 $h: \Sigma \rightarrow T^*$, 对语言 $S \subseteq T^*$, 定义 S 的反同态

$$h^{-1}(S) = \{ w \mid w \in \Sigma^* \wedge h(w) \in S \};$$



✧ 正规语言的反同态（*inverse homomorphism*）

– 记号 设映射 $h: \Sigma \to T^*$, 对语言 $S \subseteq T^*$, 定义 S 的反同态

$$h^{-1}(S) = \{ w \mid w \in \Sigma^* \wedge h(w) \in S \};$$

– 结论 若 $S \subseteq T^*$ 为正规语言，$h: \Sigma \to T^*$, 则 $h^{-1}(S)$ 也是正规语言：

– 证明 设 $S = L(A)$，其中 DFA $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$.

构造 DFA $B = (Q, \Sigma, \gamma, q_0, F)$,

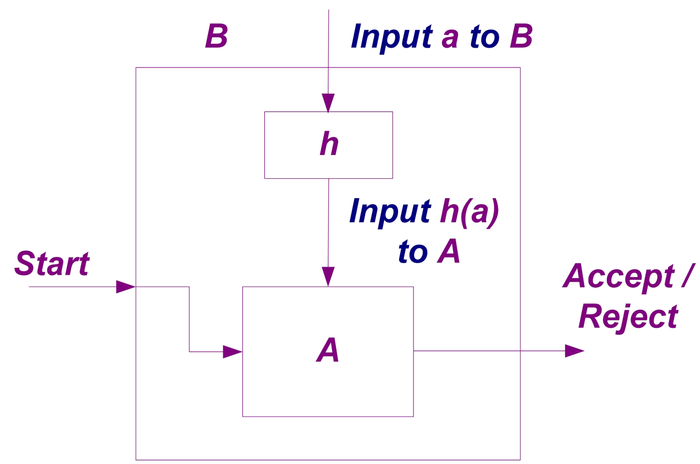
其中 $\gamma(q, a) = \delta'(q, h(a))$.

可证 (归纳于$|w|$) 对任何w, 有

$$\gamma'(q_0, w) = \delta'(q_0, h(w)).$$

所以有 $h^{-1}(S) = L(B)$.

□



例12：设h是从字母表$\{0,1,2\}$到字母表$\{a,b\}$的同态。h的定义为$h(0)=a, h(1)=ab, h(2)=ba$，则有：

1. $h(0120)=aabbaa$。

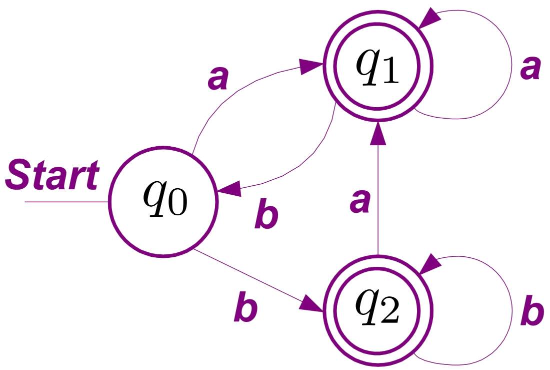
2. 设$L=\{ababa\}$，则$h^{-1}(L)=\{110,102,022\}$。这是因为存在三种切分。

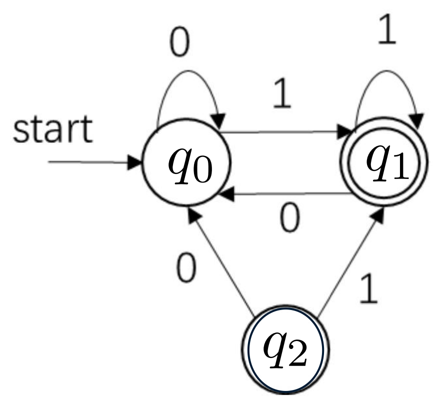
$$\underbrace{ab}_{1}\underbrace{ab}_{1}\underbrace{a}_{0}$$

$$\underbrace{ab}_{1}\underbrace{a}_{0}\underbrace{ba}_{2}$$

$$\underbrace{a}_{0}\underbrace{ba}_{2}\underbrace{ba}_{2}$$

例13：设映射h为从字母表$\{0,1\}$到字母表$\{a,b\}$的同态。h的定义为$h(0)=ab, h(1)=ba$。下图给出了一个定义在字母表$\{a,b\}$上的DFA A，请构造一个定义在$\{0,1\}$上的DFA B，使得$L(B)=h^{-1}(L(A))$。





解：根据上页的方法来构造B，需要注意的是，两个DFA的状态完全一样，就是字母表与转移函数不一样而已：

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\gamma(q_0,0)=\delta'(q_0,ab)=q_0$	$\gamma(q_0,1)=\delta'(q_0,ba)=q_1$
$*q_1$	$\gamma(q_1,0)=\delta'(q_1,ab)=q_0$	$\gamma(q_1,1)=\delta'(q_1,ba)=q_1$
$*q_2$	$\gamma(q_2,0)=\delta'(q_2,ab)=q_0$	$\gamma(q_2,1)=\delta'(q_2,ba)=q_1$

例14：设h是一个从字母表$\{a,b\}$到字母表$\{0,1\}$的同态，定义为$h(a)=\epsilon, h(b)=10$。令$E=\boldsymbol{\epsilon}+(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{ba})^*$是一个定义在$\{a,b\}$上的正规表达式。

1. 计算E的反向正规表达式E^R。

2. 计算E的同态正规表达式$h(E)$。

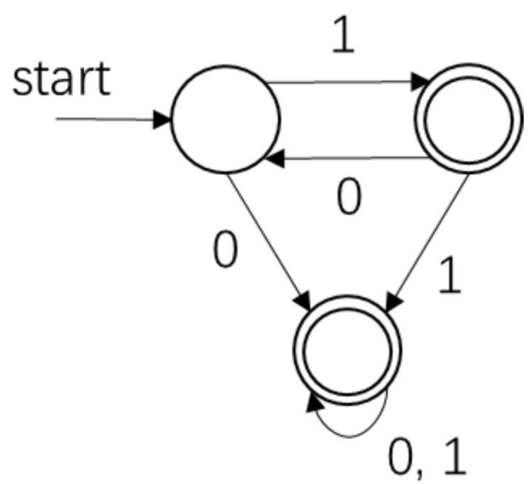
3. 为$L(h(E))$的补集构造DFA。

解：三个问题求解如下

1. $E^R=\boldsymbol{\epsilon}+(\mathbf{ab})^*(\mathbf{a}+\mathbf{b})$。

2. $h(E)=\boldsymbol{\epsilon}+(\boldsymbol{\epsilon}+\mathbf{10})(\mathbf{10})^*=(\mathbf{10})^*$。

3. 构造DFA见右。



✧ 应用：证明某个语言不是正规语言

- 例 证明如下语言不是正规语言

  a，*b*，*c* 串构成的语言

  $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0$,若 i=1 则 j=k}

- 证明思路 反证法。

  假设 *L* 是正规语言，则

  $L' = L \cap \{a\, b^j c^k \mid j,k \geq 0\} = \{a\, b^j c^k \mid j,k \geq 0 \wedge j=k\}$

  也是正规语言。设$h(a)=\varepsilon$, $h(b)=0$, $h(c)=1$, 则

  $h(L')=\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

  是正规语言。但我们已知后者不是正规语言。

课后练习

✧ 必做题:

- Ex.4.1.1(e)
- Ex.4.1.2(e)
- Ex.4.1.2(f)
- Ex.4.2.1(d),(f)
- *!Ex.4.2.2
- !Ex.4.2.3
- *!! Ex.4.2.8
- !Ex.4.2.13
- Ex.4.3.4

✧ 思考题:

- Ex.4.1.2(c)
- !Ex.4.2.6
- Ex.4.3.2

课后练习

✧ 自测题:

– 语言L由所有满足如下条件的0，1串构成：0的数目二倍于1的数目。试应用Pumping引理证明L不是正规语言。

– 语言*L*由所有满足如下条件的0, 1串构成: 0的数目多于1的数目（对0和1在串中出现的次序没有限制）。试应用*Pumping*引理证明*L*不是正规语言。

– 设映射 h：$\{a,b\} \rightarrow \{0,1\}^*$ 定义为 $h(a) = \varepsilon$, $h(b) = 10$。定义 $\{a, b\}$ 上的一个正规表达式 $E = \varepsilon + (a+b)(ba)^*$。
(1)给出一个正规表达式 E^R，使得 $L(E^R) = (L(E))^R$（后者为 $L(E)$ 的反向）
(2) 给出一个正规表达式 $h(E)$，使得 $L(h(E)) = h(L(E))$。
(3)试构造一个 *DFA A*，使得 $L(A) = \sim L(h(E))$。这里，$\sim$ 代表语言的补运算。

– 假设 A 是字母表 Σ 上的*DFA*。给出*判定* $L(A) \neq \Sigma^*$ 的一个简要的算法思想（以自然语言叙述即可）。

课后练习

✧ 自测题:

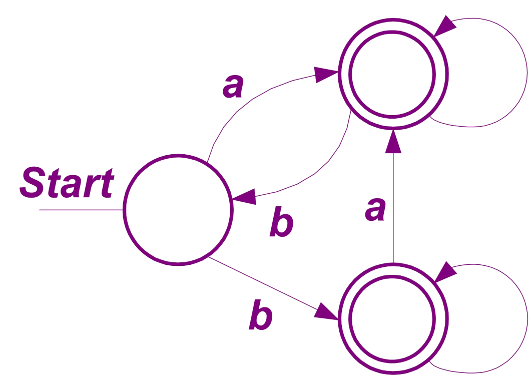
- 假设 *A*，*B* 是字母表 *Σ* 上的*DFA*。给出判定 $L(A) \cup L(B) = \Sigma^*$ 的一个简要的算法思想（以自然语言叙述即可）。
- 正规表达式 a*bb 表示 {a , b} 上的一个语言，试构造一个接受该语言的补语言的 DFA
- 左下图（a），（b）分别是 DFA A1和A2的转移表，试设计语言为L(A1)∩L(A2)的一个DFA（以转移表的形式给出）。
- 设映射 h：$\{0, 1\} \to \{a, b\}^*$ 定义为 $h(0) = ab$, $h(1) = ba$ 。右下图表示 {a, b} 上的一个 *DFA A*。试构造一个{0, 1}上的 *DFA B*，使得 $L(B) = h^{-1}(L(A))$。

	0	1
$\rightarrow q_1$	q_2	q_1
q_2	q_3	q_1
$* q_3$	q_3	q_2

(a)

	0	1
$\rightarrow p_1$	p_2	p_1
$* p_2$	p_1	p_2

(b)



That's all for today.

Thank You