FORMULAIRE de Physique Statistique (LMAPR 1491)

Prof. Jean-Christophe Charlier, Ch. cours Aurélien Lherbier

1 Théorie Cinétique des Gaz

Distribution de Maxwell-Boltzmann:

$$N_v = 4\pi \tilde{N} a^3 v^2 e^{-bv^2}$$

où

$$a = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \quad \text{et} \quad b = \frac{m}{2k_B T}$$

2 Formalisme Micro-Canonique

Equation de Boltzmann:

$$S = k_B \ln \Omega$$

Approximation de Stirling:

$$\ln(X!) = X\ln(X) - X + \cdots \quad \text{ssi} \quad X \gg 1$$

3 Formalisme Canonique

Probabilité que le système soit dans un état j d'énergie E_j:

$$f_j = \frac{e^{-\beta E_j}}{\sum_i e^{-\beta E_i}} = e^{-\beta E_j} e^{\beta F} \quad \text{et} \quad F = U - TS$$

Fonction de partition canonique Z:

$$Z = \sum_j e^{-\beta E_j} = e^{-\beta F} \quad \text{et} \quad F = \frac{-1}{\beta} \ln Z$$

L'énergie interne moyenne U:

$$U = \sum_j f_j E_j = \frac{\sum_j E_j e^{-\beta E_j}}{\sum_i e^{-\beta E_i}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta F)$$

L'entropie S et la chaleur spécifique molaire c_v:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\partial}{\partial T} F = k_B \left(\ln Z - \frac{\beta}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} Z \right) \\ c_v &= \frac{1}{n} k_B \beta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z \right) = -\frac{1}{n} k_B \beta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (\beta F) \right) \quad \text{et} \quad n \quad \text{le nombre de mole} \end{aligned}$$

4 Formalisme Grand-Canonique

Probabilité que le système soit dans un état j d'énergie E_j avec un nombre de particules N_j:

$$f_j = \frac{e^{-\beta(E_j - \mu N_j)}}{\sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}} = e^{-\beta(E_j - \mu N_j)} e^{\beta\Psi} \quad \text{et} \quad \Psi = U - TS - \mu\tilde{N}$$

Fonction de partition grand-canonique Z:

$$Z = \sum_j e^{-\beta(E_j - \mu N_j)} = e^{-\beta\Psi} \quad \text{et} \quad \Psi = \frac{-1}{\beta} \ln Z$$

L'énergie interne moyenne U:

$$U = \sum_j f_j E_j = \frac{\sum_j E_j e^{-\beta(E_j - \mu N_j)}}{\sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}|_{\beta\mu=\text{cst}} = \frac{\partial(\beta\Psi)}{\partial \beta}|_{\beta\mu=\text{cst}}$$

Le nombre de particule moyen $\tilde{N}$:

$$\tilde{N} = \sum_j f_j N_j = \frac{\sum_j N_j e^{-\beta(E_j - \mu N_j)}}{\sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}} = -\frac{\partial(\beta\Psi)}{\partial(\beta\mu)} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}$$

5 Fluides Quantiques

Fonction de partition totale Z et fonction de partition d'état orbital z_{k,m_s}:

$$\begin{aligned} Z &= \prod_{k,m_s} z_{k,m_s} = \prod_k z_k^{g_0} \quad \text{avec} \quad g_0 = 2s+1 \\ \text{avec} \quad s &= \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots \text{pour les fermions} \qquad s = 0, 1, 2, \cdots \text{pour les bosons} \end{aligned}$$

Probabilité d'occupation f_k (fermions) et nombre d'occupation moyen $\overline{n}_k$ (bosons):

$$f_k = \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} + 1} \quad \text{et} \quad \overline{n}_k = \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} - 1}$$

Potentiel grand-canonique ($+ \Rightarrow$ fermions ; $- \Rightarrow$ bosons):

$$\Psi = -\frac{2}{3} \frac{g_0 V}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} \pm 1} d\varepsilon$$