Отчет о выполнении тестового задания

Постановка задачи

$$y^{(5)} + 15y^{(4)} + 90y^{(3)} + 270y'' + 405y' + 243y = 0, \qquad x \in (0,5]$$

Начальные условия: $y(0) = 0, y'(0) = 3, y''(0) = -9, y^{(3)}(0) = -8, y^{(4)}(0) = 0.$

Методы

Преобразуем ОДУ порядка $n = 5$ в линейную систему ОДУ:

$$y_0 = y, y_1 = y', y_2 = y'', \dots, y_4 = y^{(4)}$$

$$y_0' = y' = y_1$$
$$y_1' = y'' = y_2$$
$$\dots$$
$$y_4' = y^{(5)} = -(ay_4 + by_3 + cy_2 + d\,y_1 + f\,y_0).$$

Таким образом в матричной форме получаем:

$$y' = Ay, \qquad \text{где } A = \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ -f & -d & -c & -b & -a \end{pmatrix}$$

Для численного решения рассматриваются явный и неявный методы Эйлера (1-й порядок аппроксимации) и метод RK4 (4-й порядок аппроксимации). Запишем формулу только для неявного метода Эйлера:

$$y^{n+1} - y^n = \Delta t\, f(y^{n+1}) = \Delta t\, A\, y^{n+1}$$
$$(E - \Delta t\, A) y^{n+1} = y^n$$

т.е. для перехода со слоя на слой требуется решать СЛАУ. Для линейной системы ОДУ с большой вероятностью возможно доказать устойчивость рассматриваемых разностных схем – для каждого метода имеет место сходимость.

Предварительно можно вычислить число жесткости системы:

$$s = \frac{\max\ |\mathrm{Re}(\lambda_i)|}{\min |Re(\lambda_i)|} \approx 1{,}00205.$$

Оно является небольшим, следовательно, можно пользоваться явными методами для эффективного получения решения с заданной точностью. Использование неявного метода проводится только для демонстрации.

Результаты

Примечание: при реализации использовался код, написанный мною для студентов (3-й курс) во время преподавания в МФТИ.

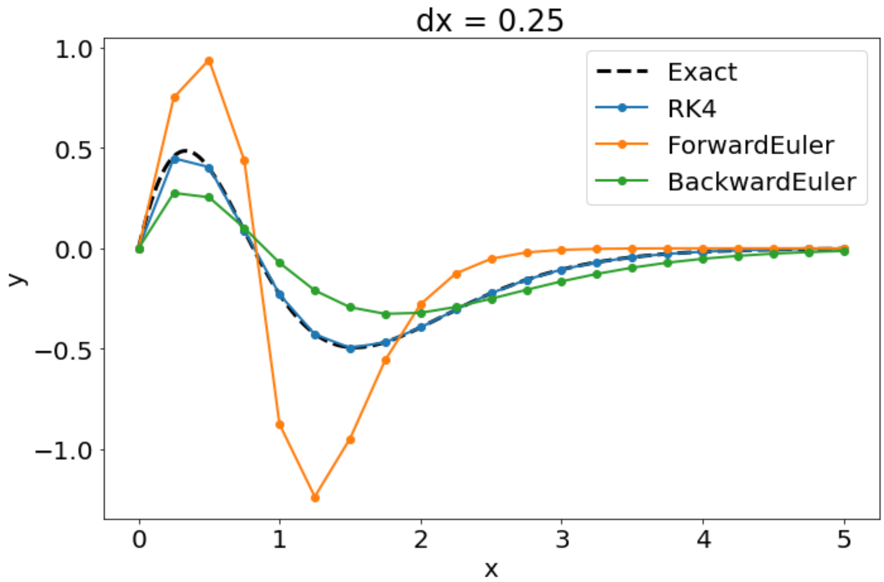

Рис. 1. Сравнение графиков численных решений, полученных различными методами с «большим» шагом сетки. Наибольшая погрешность у метода ForwardEuler, наименьшая – у метода RK4, что согласуется с теорией.

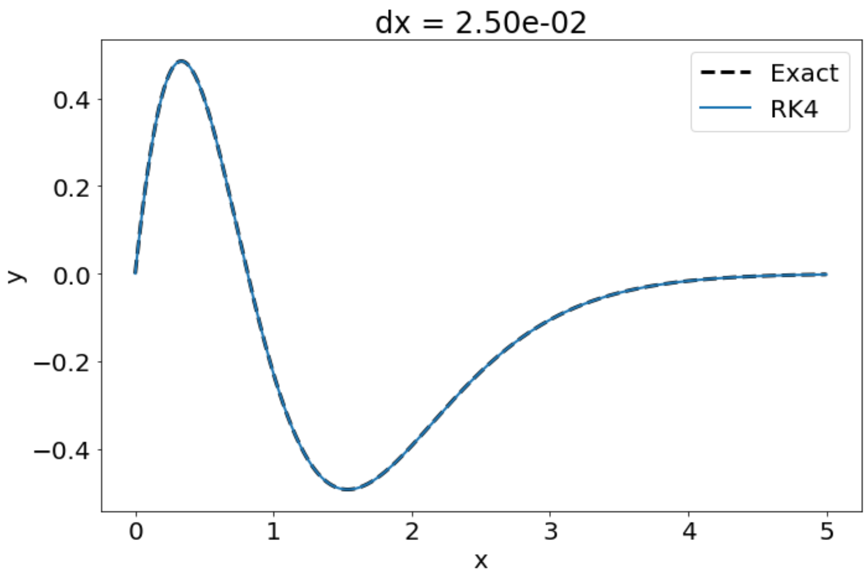

Рис. 2. Сравнение графика численного решения, полученного методом RK4, с графиком аналитического решения при «малом» значении шага сетки. Визуально графики совпадают – с большой степенью уверенности можно говорить о сходимости численного метода.