第三章：矩阵分析

矩阵序列回顾

- 矩阵序列：$\{A^{(k)}\}$　$A^{(k)}=\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{m\times n}$
- 矩阵序列收敛的性质：

1. $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)}=A \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\|A^{(k)}-A\|=0$

   $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\|A^{(k)}\|=\|A\|$

2. $\alpha A^{(k)}+\beta B^{(k)}$;　$\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{B}^{(k)}$;　$\left(A^{(k)}\right)^{-1}$

3. $\lim\limits_{k\to\infty} A^{k}=0 \Leftrightarrow \rho(A)=1$

矩阵级数回顾

- 矩阵级数：$\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 收敛，发散，绝对收敛的概念
- 矩阵级数收敛的性质：
  1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 绝对收敛　$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 收敛
  2. 和、数乘、常矩阵乘法、绝对收敛、乘积
- 矩阵幂级数：$\sum a_k A^k$　$A\in C^{n\times n}$
  1. $\sum a_k z^k$ 收敛半径为R

     $\rho(A)<R$ 时 $\Rightarrow \sum a_k A^k$ 绝对收敛

     $\rho(A)>R$ 时 $\Rightarrow \sum a_k A^k$ 发散
  2. $\sum A^k$ 收敛 $\Leftrightarrow \rho(A)<1$ 且 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k=(I-A)^{-1}$

注：

$\rho(A)\le\|A\|,\|A\|<R$时，

$\sum a_k A^k$ 绝对收敛

矩阵函数

- 定义3.6：

设幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k z^k$的收敛半径为$r$，

当$|z|<r$ 时，幂级数收敛于 $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k z^k$.

如果$A\in \mathrm{C}^{n\times n}$满足 $\rho(A)<r$，

则称$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k A^k$的和为矩阵函数，记为

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k A^k.$$

几个常用的矩阵函数

(1) $e^A=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}A^k=I+A+\dfrac{1}{2!}A^2+\cdots$, $\rho(A)<\infty$;

(2) $\sin A=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}=A-\dfrac{1}{3!}A^3+\dfrac{1}{5!}A^5+\cdots$, $\rho(A)<\infty$;

(3) $\cos A=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k}=I-\dfrac{1}{2!}A^2+\dfrac{1}{4!}A^4-\cdots$, $\rho(A)<\infty$;

(4) $(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots$, $\rho(A)<1$;

(5) $\ln(I+A)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k+1}A^{k+1}=A-\dfrac{1}{2}A^2+\dfrac{1}{3}A^3-\cdots$, $\rho(A)<1$.

带参数的矩阵函数

- 将矩阵函数的变元A换成At，其中t为参数，则得到带参数的矩阵函数

$$f(At):=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(At)^k.$$

矩阵函数值的计算

- 利用Hamilton-Cayley定理

一般过程：

1、计算特征多项式 $\det(\lambda I - A)=\varphi(\lambda)$

2、由矩阵方程 $\varphi(A)=0$ 确定矩阵A的运算规律

3、由矩阵函数公式计算矩阵函数：

$$f(At)=\sum_{k=0}^{\infty} a_n A^k t^k \quad \rho(A)<r$$

矩阵函数值的计算

- 利用Hamilton-Cayley定理

–例3.5 $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ 求 e^{At} e^{A}

解：$\det(\lambda I-A)=\lambda^2+1, \therefore A^2+I=0$ 即：$A^2=-I$

从而 $A^{2k}=(-1)^k I \quad A^{2k+1}=(-1)^k A$

$$\therefore e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}t^k=\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots\right)I+\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots\right)A$$

$$=\cos t\cdot I+\sin t\cdot A=\begin{bmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{bmatrix}$$

t=1时 $e^{A}=e^{At}\big|_{t=1}=\begin{bmatrix}\cos 1&\sin 1\\-\sin 1&\cos 1\end{bmatrix}$

矩阵函数值的计算

- 利用Hamilton-Cayley定理

–例3.6

已知四阶方阵A的特征值为π, $-\pi$, 0, 0, 求$\sin A$, $\cos A$.

Solution. 由已知及H-C定理有 $A^4-\pi^2A^2=0$, 从而

$$A^4=\pi^2A^2,\ A^5=\pi^2A^3,\ A^6=\pi^4A^2,\ A^7=\pi^4A^3,\ \cdots,$$

即 $A^{2k}=\pi^{2k-2}A^2,\quad A^{2k+1}=\pi^{2k-2}A^3.$ 故

$$\sin A=A-\frac{1}{\pi^2}A^3,\quad \cos A=I-\frac{2}{\pi^2}A^2.$$

矩阵函数值的计算

- 利用相似对角化

一般计算过程： 若 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k \quad (|z|<r)$

$A\in C^{n\times n}$ 可对角化，其特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$

则有可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)=\Lambda \qquad \therefore A=P\Lambda P^{-1}$$

$$f(At)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kA^kt^k \quad =P\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Lambda^kt^k\right]P^{-1}$$

$$=Pdiag\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_n(\lambda_1t)^k,\cdots,\sum_{k=0}^{\infty}a_n(\lambda_nt)^k\right]P^{-1}$$

$$=Pdiag\big(f(\lambda_1t),f(\lambda_2t),\cdots,f(\lambda_nt)\big)P^{-1}$$

t=1时 $f(A)=Pdiag\big(f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)\big)P^{-1}$

矩阵函数值的计算

- 利用相似对角化

–例3.5 $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ 求 e^{At} e^{A}

解：$\det(\lambda I-A)=0 \ \Rightarrow \lambda_1=i,\lambda_2=-i$

$\lambda_1=i$ 解 $(iI-A)\vec{x}=\vec{0}$ 特征向量 $\vec{P_1}=\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix}$

$\lambda_2=-i$ $(-iI-A)\vec{x}=\vec{0}$ 特征向量 $\vec{P_2}=\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$

相似变换矩阵与对角阵为

$$P=\begin{bmatrix}-i&i\\1&1\end{bmatrix}\qquad P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}i&1\\-i&1\end{bmatrix}\qquad \Lambda=\begin{bmatrix}\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

矩阵函数值的计算

- 续

$$e^{At}=e^{\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}t}\quad =Pdiag(e^{it},e^{-it})P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}-i&i\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{it}&0\\0&e^{-it}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}i&1\\-i&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{it}+e^{-it}&ie^{-it}-ie^{it}\\ie^{it}-ie^{-it}&e^{it}+e^{-it}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{A}=e^{At}\big|_{t=1}=\begin{bmatrix}\cos 1&\sin 1\\-\sin 1&\cos 1\end{bmatrix}$$

欧拉公式

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots \text{（1）}$$

$x \in R$ 或

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots \text{（2）}$$

Euler1707—1783.瑞士

矩阵函数值的计算

- 利用相似对角化

例 3.7 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$，求 $e^{\boldsymbol{A}t}$，$\cos\boldsymbol{A}$.

解 可求得 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = -2$，$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. 对应 $\lambda_1 = -2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的两个线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2 = (-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_3 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$，于是

矩阵函数值的计算

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

故

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} e^{-2t} & & \\ & e^{t} & \\ & & e^{t} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^{t} - e^{-2t} & 2e^{t} - 2e^{-2t} & 0 \\ e^{-2t} - e^{t} & 2e^{-2t} - e^{t} & 0 \\ e^{-2t} - e^{t} & 2e^{-2t} - 2e^{t} & e^{t} \end{pmatrix},$$

$$\cos\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \cos(-2) & & \\ & \cos 1 & \\ & & \cos 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos 1 - \cos 2 & 2\cos 1 - 2\cos 2 & 0 \\ \cos 2 - \cos 1 & 2\cos 2 - \cos 1 & 0 \\ \cos 2 - \cos 1 & 2\cos 2 - 2\cos 1 & \cos 1 \end{pmatrix}.$$

矩阵函数值的计算

- 利用Jordan分解

设$A \in \mathrm{C}^{n\times n}$，由Jordan分解定理，存在可逆矩阵$P$使得

$$A = PJP^{-1} = P\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}P^{-1},$$

故

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k J^k\right)P^{-1} = Pf(J)P^{-1}$$

利用Jordan分解

$$= P\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} a_k J_1^k & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty} a_k J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} a_k J_s^k \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_s) \end{pmatrix}P^{-1}$$

利用Jordan分解

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i \times r_i}^{k} \text{ 的计算：}$$

$$J_i^k = \left.\begin{pmatrix} \lambda^k & \frac{1}{1!}\left(\lambda^k\right)' & \cdots & \frac{1}{(r_i-1)!}\left(\lambda^k\right)^{(r_i-1)} \\ & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!}\left(\lambda^k\right)' \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix}\right|_{\lambda=\lambda_i}$$

幂级数收敛的性质

- 幂级数收敛，则可逐项求导

若 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k \quad (|z|<r)$

则 $|z|<r$时，$f'(z)=\sum_{k=1}^{\infty}k a_k z^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}P_k^1 a_k z^{k-1}$

$$f''(z)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_k z^{k-2}=\sum_{k=2}^{\infty}P_k^2 a_k z^{k-2}$$

………

$$f^{(n)}(z)=\sum_{k=n}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k z^{k-n}=\sum_{k=n}^{\infty}P_k^n a_k z^{k-n}$$

利用Jordan分解

$f(J_i)$的计算：

$$f(J_i)=\left.\begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(r_i-1)!}\left[f(\lambda)\right]^{(r_i-1)} \\ & f(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!}f'(\lambda) \\ & & & f(\lambda) \end{pmatrix}\right|_{\lambda=\lambda_i}$$

利用Jordan分解

$$f(At)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(At)^k=P\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k(Jt)^k\right)P^{-1}=Pf(Jt)P^{-1}$$

$$=P\begin{pmatrix} f(J_1t) & & & \\ & f(J_2t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_st) \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$J_i^k t^k=\left.\begin{pmatrix} t^k\lambda^k & \frac{t^k}{1!}(\lambda^k)' & \cdots & \frac{t^k}{(r_i-1)!}(\lambda^k)^{(r_i-1)} \\ & t^k\lambda^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{t^k}{1!}(\lambda^k)' \\ & & & t^k\lambda^k \end{pmatrix}\right|_{\lambda=\lambda_i}$$

$$=\left.\begin{pmatrix} \lambda^k & \frac{t}{1!}(\lambda^k)' & \cdots & \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!}(\lambda^k)^{(r_i-1)} \\ & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{t}{1!}(\lambda^k)' \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix}\right|_{\lambda=\lambda_i t}$$

利用Jordan分解

$$f(J_it)=\left.\begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{t}{1!}f'(\lambda) & \cdots & \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!}\left[f(\lambda)\right]^{(r_i-1)} \\ & f(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{t}{1!}f'(\lambda) \\ & & & f(\lambda) \end{pmatrix}\right|_{\lambda=\lambda_i t}$$

- 例3.8：

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.\ \text{求}e^A,\ \sin At.$$

利用Jordan分解

解. 在第一章已求得$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix},\ J_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix},\ J_2=(2).$$

(1) $e^A=Pe^JP^{-1}=P\begin{pmatrix} e^{J_1} & \\ & e^{J_2} \end{pmatrix}P^{-1}$,

$$e^{J_1}=\left.\begin{pmatrix} e^\lambda & \frac{1}{1!}(e^\lambda)' \\ & e^\lambda \end{pmatrix}\right|_{\lambda=1}=\begin{pmatrix} e & e \\ & e \end{pmatrix},\ e^{J_2}=(e^2),$$

利用Jordan分解

故 $e^A=P\begin{pmatrix} e & e & \\ & e & \\ & & e^2 \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} -e & 0 & e \\ 3e-e^2 & e^2 & -2e+e^2 \\ -4e & 0 & 3e \end{pmatrix}.$

(2) $\sin At=P\cdot\sin Jt\cdot P^{-1}=P\begin{pmatrix}\sin J_1t & \\ & \sin J_2t\end{pmatrix}P^{-1},$

$$\sin J_1t=\left.\begin{pmatrix}\sin\lambda & \frac{t}{1!}(\sin\lambda)' \\ & \sin\lambda\end{pmatrix}\right|_{\lambda=t}=\begin{pmatrix}\sin t & t\cos t \\ & \sin t\end{pmatrix},$$

$$\sin J_2t=(\sin 2t),$$

利用Jordan分解

故 $\sin At=P\begin{pmatrix}\sin t & t\cos t & \\ & \sin t & \\ & & \sin 2t\end{pmatrix}P^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}\sin t-2t\cos t & 0 & t\cos t \\ \sin t+2t\cos t-\sin 2t & \sin 2t & -t\cos t-\sin t+\sin 2t \\ -4t\cos t & 0 & 2t\cos t+\sin t\end{pmatrix}.$$

矩阵函数的特征值

定理3.8 $A\in C^{n\times n},\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是A的特征值，则 $f(A)$ 的特征值是 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$

例如，$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3\end{pmatrix}$的特征值为1,1,2

$e^A=P\begin{pmatrix} e & e & \\ & e & \\ & & e^2 \end{pmatrix}P^{-1}$的特征值为$e,e,e^2$

矩阵函数值的计算

- 待定系数法

设$A\in C^{n\times n}$的特征多项式或零化多项式为

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},\ r_1+r_2+\cdots+r_s=m\le n.$$

将$f(\lambda t)$表为 $f(\lambda t)=q(\lambda,t)\varphi(\lambda)+r(\lambda,t)$ 的形式后可得

$$f(At)=r(A,t),\ f(A)=r(A,1).$$

为此，设 $r(\lambda,t)=b_{m-1}(t)\lambda^{m-1}+\cdots+b_1(t)\lambda+b_0(t),$

再用待定系数法求出$b_{m-1}(t),\ \cdots,\ b_1(t),\ b_0(t).$

矩阵函数值的计算

- 待定系数法

$b_{m-1}(t),\ \cdots,\ b_1(t),\ b_0(t)$满足的方程是

$$\left.\frac{d^l}{d\lambda^l}f(\lambda t)\right|_{\lambda=\lambda_i}=\left.\frac{d^l}{d\lambda^l}r(\lambda,t)\right|_{\lambda=\lambda_i},$$

即

$$t^l\left.\frac{d^l}{d\mu^l}f(\mu)\right|_{\mu=\lambda_i t}=\left.\frac{d^l}{d\lambda^l}r(\lambda,t)\right|_{\lambda=\lambda_i},$$

$l=0,1,\cdots,r_i-1;\ i=1,2,\cdots,s.$

$A=Pdiag(J_1,J_2\cdots J_s)P^{-1}$　　$r(\lambda)$ 是多项式

$$f(J_i)=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i)\end{bmatrix}_{n_i*n_i}\quad r(J_i)=\begin{bmatrix} r(\lambda_i) & r'(\lambda_i) & \cdots & \frac{r^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ & r(\lambda_i) & \ddots & \\ & & \ddots & r'(\lambda_i) \\ & & & r(\lambda_i)\end{bmatrix}_{n_i*n_i}$$

$\boxed{f(A)=Pdiag(f(J_1),f(J_2)\cdots f(J_s))P^{-1}}$　$\boxed{r(A)=Pdiag(r(J_1),r(J_1)\cdots r(J_s))P^{-1}}$

$$f(A)=r(A)$$

$$\Leftrightarrow Pdiag(f(J_1),f(J_2)\cdots f(J_s))P^{-1}=Pdiag(r(J_1),r(J_1)\cdots r(J_s))P^{-1}$$

$$\Leftrightarrow f(J_i)=r(J_i)\quad i=1,2\cdots s$$

$$\Leftrightarrow f^{(l)}(\lambda_i)=r^{(l)}(\lambda_i)\quad i=1,2\cdots s\quad l=0,1\cdots(n_i-1)$$

$$n_1+n_2+\cdots+n_s=n$$

待定系数法例子

- 例3.9 $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\-4&0&3\end{pmatrix}$. 求$e^{At}$，$\cos A$.

解. 在第一章已求得A的特征多项式

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

注：$\varphi(\lambda)$可用任意零化多项式替代，因此，$r(\lambda,t)$不唯一，但并不影响$f(A)$的计算

设

$$e^{\lambda t}=q(\lambda,t)(\lambda-1)^2(\lambda-2)+b_2(t)\lambda^2+b_1(t)\lambda+b_0(t),$$

则有方程组

待定系数法例子

$$\begin{cases}e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=1}=\left(b_2(t)\lambda^2+b_1(t)\lambda+b_0(t)\right)\Big|_{\lambda=1},\\ \dfrac{d}{d\lambda}e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=1}=\dfrac{d}{d\lambda}\left(b_2(t)\lambda^2+b_1(t)\lambda+b_0(t)\right)\Big|_{\lambda=1},\\ e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=2}=\left(b_2(t)\lambda^2+b_1(t)\lambda+b_0(t)\right)\Big|_{\lambda=2}.\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}e^{t}=b_2(t)+b_1(t)+b_0(t),\\ te^{t}=2b_2(t)+b_1(t),\\ e^{2t}=4b_2(t)+2b_1(t)+b_0(t).\end{cases}$$

待定系数法例子

解得

$$\begin{cases}b_2(t)=e^{2t}-e^{t}-te^{t},\\ b_1(t)=2e^{2t}+2e^{t}+3te^{t},\\ b_0(t)=e^{2t}-2te^{t}.\end{cases}$$

从而

$$e^{At}=b_2(t)A^2+b_1(t)A+b_0(t)I$$

$$=\begin{pmatrix}e^{t}-2te^{t}&0&te^{t}\\-e^{2t}+e^{t}+2te^{t}&e^{2t}&e^{2t}-e^{t}-te^{t}\\-4te^{t}&0&e^{t}+2te^{t}\end{pmatrix}.$$

再设

$$\cos\lambda=q(\lambda)(\lambda-1)^2(\lambda-2)+b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0,$$

得方程组

$$\begin{cases}\cos\lambda\Big|_{\lambda=1}=\left(b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0\right)\Big|_{\lambda=1},\\ \dfrac{d}{d\lambda}\cos\lambda\Big|_{\lambda=1}=\dfrac{d}{d\lambda}\left(b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0\right)\Big|_{\lambda=1},\\ \cos\lambda\Big|_{\lambda=2}=\left(b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0\right)\Big|_{\lambda=2}.\end{cases}$$

待定系数法例子

即 $$\begin{cases}\cos 1=b_2+b_1+b_0,\\ -\sin 1=2b_2+b_1,\\ \cos 2=4b_2+2b_1+b_0.\end{cases}$$

解得 $$\begin{cases}b_2=\sin 1-\cos 1+\cos 2,\\ b_1=-3\sin 1+2\cos 1-2\cos 2,\\ b_0=2\sin 1+\cos 2.\end{cases}$$

从而 $$\cos A=b_2A^2+b_1A+b_0I$$

$$=\begin{pmatrix}2\sin 1+\cos 2&0&-\sin 1\\-2\sin 1+\cos 1-\cos 2&\cos 2&\sin 1-\cos 1+\cos 2\\4\sin 1&0&-2\sin 1+\cos 1\end{pmatrix}.$$

常用矩阵函数的性质

- 定理3.9：

(1) $\sin(-A)=-\sin A,\ \cos(-A)=\cos A;$

(2) $e^{iA}=\cos A+i\sin A,\ \cos A=\dfrac{1}{2}\left(e^{iA}+e^{-iA}\right),$

$$\sin A=\frac{1}{2i}\left(e^{iA}-e^{-iA}\right).$$

常用矩阵函数的性质

证明：1） $\sin(-A)=(-A)+\frac{1}{3!}(-A)^3-\frac{1}{5!}(-A)^5-\cdots=-(A-\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{5!}A^5+\cdots)$

$=-\sin A$ 同理有 $\cos(-A)=\cos A$

2） $e^{iA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iA)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}i^k\frac{A^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}$

$=\cos A+i\sin A$

$e^{-iA}=e^{i(-A)}=\cos(-A)+i\sin(-A)=\cos A-i\sin A$

解得 $\cos A=\frac{e^{iA}+e^{-iA}}{2},\sin A=\frac{e^{iA}-e^{-iA}}{2i}$

常用矩阵函数的性质

- 定理3.10：设$A,\ B\in \mathbb{C}^{n\times n}$，且$AB=BA$，则
  (1) $e^{A+B}=e^Ae^B=e^Be^A$;
  (2) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$;
  (3) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$.
- 推论：$\sin 2A=2\sin A\cos A,\ \cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A.$
- Remark：若$AB\neq BA$，结论不成立

常用矩阵函数的性质

证明：1） $e^Ae^B=(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!})(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{k!})$

$=(I+A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\cdots)(I+B+\frac{1}{2!}B^2+\frac{1}{3!}B^3+\cdots)$

$=I+(A+B)+\frac{1}{2!}(A^2+2AB+B^2)+\frac{1}{3!}(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)+\cdots$

当 $AB=BA$ 时 $A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$

$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=(A+B)^3$

....

$\therefore e^Ae^B=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A+B)^k}{k!}=e^{A+B}$ 同理有 $e^Be^A=e^{B+A}=e^{A+B}$

常用矩阵函数的性质

证明：2）由于 $\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{e^{iA}-e^{-iA}}{2i}\frac{e^{iB}+e^{-iB}}{2}+\frac{e^{iA}+e^{-iA}}{2}\frac{e^{iB}-e^{-iB}}{2i}$

$=\frac{1}{4i}(e^{iA}e^{iB}-e^{-iA}e^{-iB})+\frac{1}{4i}(e^{iA}e^{iB}-e^{-iA}e^{-iB})$

因为AB＝BA，由1）上式：

$=\frac{1}{2i}[e^{i(A+B)}-e^{-i(A+B)}]=\sin(A+B)$

3）证明同2）

$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$ $BA=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ $AB\neq BA$

可验证： $A=A^2=A^3=\cdots;B=B^2=B^3=\cdots$

$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=I+A(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots)=I+(e-1)A=\begin{bmatrix}e&e-1\\0&1\end{bmatrix}$

$e^B=I+(e-1)B=\begin{bmatrix}e&1-e\\0&1\end{bmatrix}$

$e^Ae^B=\begin{bmatrix}e&e-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e&1-e\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^2&-(e-1)^2\\0&1\end{bmatrix}$

$e^{A+B}=e^{\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}e^2&0\\0&e^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^2&0\\0&1\end{bmatrix}$ $e^Ae^B\neq e^{A+B}$

常用矩阵函数的性质

- 定理3.11：(1) $\det e^A=e^{trA}$, (2) $\left(e^A\right)^{-1}=e^{-A}$.

－Remark

对任一方阵A, e^A总可逆，但$\sin A,\cos A$未必.

$O\in C^{n*n},e^O=I$

证明：1）$\lambda_1\cdots\lambda_n$ 是A的特征值，则

$e^{\lambda_1}\cdots e^{\lambda_n}$ 是e^A的特征值 $\therefore \det e^A=e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\cdots e^{\lambda_n}=e^{trA}$

2）由1）知$\forall A$ $\det e^A>0$ 即 e^A可逆

$\because A$ 与 $-A$ 可换

$\therefore$ 由定理3.10 $e^Ae^{-A}=e^{A-A}=e^o=I$ 即 $(e^A)^{-1}=e^{-A}$

思考题

- 讨论下列矩阵幂级数的收敛情况，若收敛求其矩阵函数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{10^k} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}^k$$

思考题答案

由于幂级数收敛半径为1，在（-1，1）内时

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \qquad f(0.5) = 6,\ f(-0.3) = \frac{210}{2197}$$

$$A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = P\Lambda P^{-1}$$

由于A的行和范数为0.9，故上述幂级数绝对敛：且

$$\begin{aligned} f(A) &= P\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Lambda^k\right)P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(0.5) & 0 \\ 0 & f(-0.3) \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2f(0.5)+2f(-0.3) & 4f(0.5)-4f(-0.3) \\ f(0.5)-f(-0.3) & 2f(0.5)+2f(-0.3) \end{bmatrix} = \cdots\cdots \end{aligned}$$

思考题

- 利用 $e^{\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{bmatrix}$ 求 $e^{\begin{bmatrix} \delta & \omega \\ -\omega & \delta \end{bmatrix}}$

小结

一、矩阵函数 $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n \quad \rho(A) < R$

二、$f(A)$ 求法

1、Hamilton-Cayley定理

2、可对角化矩阵 $A = P\Lambda P^{-1}$

$$f(A) = P\mathrm{diag}(f(\lambda_1)\cdots f(\lambda_n))P^{-1}$$

3、Jordan标准形法

$$A = PJP^{-1} = P\mathrm{diag}(J_1 \cdots J_s)P^{-1}$$

$$f(A) = P\mathrm{diag}(f(J_1)\cdots f(J_s))P^{-1}$$

4、待定系数法

三、矩阵函数的性质：

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & \\ & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$$

$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}_{n_i * n_i}$$

Assignment

- 徐仲、张凯院等.《矩阵论简明教程》, 第三版. 科学出版社出版.
  - 习题三：4、6、7、8、9、11