第一章：矩阵的相似变换

Jordan标准形定义

- Jordan标准形

定义1.7: 形如 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i \times r_i}$ 的矩阵称为r_i阶Jordan块，

由若干个Jordan 块构成的分块对角阵

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$ 称为Jordan矩阵.

矩阵的Jordan分解定理

- 定理1.9:

设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$,则$A$与一个Jordan矩阵$J$相似，即存在可逆矩阵$P \in \mathbf{C}^{n\times n}$使得

$$P^{-1}AP = J,$$

这个Jordan矩阵J除Jordan块的排列次序外由A唯一确定.

- Remark
  - 对角矩阵是一个Jordan矩阵，它的每个Jordan块是一阶的.
  - 此定理是复数域的Jordan分解

Jordan标准形的求法

- 方法一：特征向量法
  - 设$A \in C^{n\times n}$，如果λ_i是A的单特征值($r_i = 1$)，则对应一阶Jordan块$J_i = (\lambda_i)$;
  - 如果λ_i是A的r_i ($r_i > 1$)重特征值，则对应λ_i有几个线性无关的特征向量，就有几个以λ_i为对角元素的Jordan块，这些Jordan块的阶数之和等于r_i
  - 由A的所有特征值对应的Jordan块构成的Jordan矩阵即为A的Jordan标准形.

Jordan标准形的求法

- Remarks
  - 优点：计算较简单，且计算相似变换矩阵可直接利用已求得的特征向量
  - 缺点：当某一特征值重数较高时，无法确定Jordan块阶数
  - 相关方法可参考：史荣昌的《矩阵分析》

Jordan标准形的求法

- 方法一：特征向量法
  - 例1.5

求矩阵$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$的Jordan标准形

  - 解：由例1.1求得矩阵的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 2$

2重特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$只有一个线性无关向量，

所以A的Jordan标准型为$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Jordan标准形的求法

- 方法二：初等变换法
  - 定义1.8

设$A(\lambda)=\left(a_{ij}(\lambda)\right)_{m\times n}$，$a_{ij}(\lambda)$是关于$\lambda$的多项式函数，

则称$A(\lambda)$是λ矩阵或多项式矩阵.

其初等变换包括：

(1)交换的两行(列)；

(2)某一行(列)同乘以一个非零常数k；

(3)某一行(列)同乘以多项式$\varphi(\lambda)$加到另一行(列).

多项式矩阵

- 多项式矩阵例子：

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2+1 & \lambda^2-1 & \lambda^2\\ \lambda+2 & \lambda^2+1 & -\lambda\end{bmatrix}$$

$$=\lambda^2\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&0\end{bmatrix}$$

$$=A_0\lambda^2+A_1\lambda+A_2$$

Smith标准型

定理1.10：秩为r的λ矩阵$A(\lambda)=\left(a_{ij}(\lambda)\right)_{m\times n}$经过初等变换可化为如下形式的矩阵

$$S(\lambda)=\left(\begin{array}{cccc|c} d_1(\lambda) & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & O\\ & & \ddots & & \\ & & & d_r(\lambda) & \\ \hline & & O & & O\end{array}\right)$$

注：类似等价标准形，而不是对角化

其中$d_i(\lambda)$是首一多项式(即最高次项系数为1的多项式)，

$i=1,2,\cdots,n$，且$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$，$i=1,2,\cdots,n-1$.

Smith标准型

- 定理1.10（续）：
  - 这里的λ矩阵$S(\lambda)$是由$A(\lambda)$唯一确定的，称为$A(\lambda)$的Smith标准形.
  - 同时称$d_i(\lambda)$为$A(\lambda)$的不变因子.
  - 将$A(\lambda)$的每个次数大于零的不变因子$d_i(\lambda)$分解为互不相同的一次因式方幂的乘积，这些一次因式的方幂称为$A(\lambda)$的初等因子.
- 引理：对$A(\lambda)$进行适当的初等变换，可得到$B(\lambda)$，使得$b_{11}(\lambda)$整除每个$b_{ij}(\lambda)$

Jordan标准形的求法

- 方法二：初等变换法

(1)用初等变换化特征矩阵λI_n-A为Smith标准形，求出A的不变因子$d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$.

(2)找出不变因子$d_i(\lambda)$对应的初等因子.

设A的全部初等因子为：

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},(\lambda-\lambda_2)^{r_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$可能有相同的，且$r_1+r_2+\cdots+r_s=n$

方法二：初等变换法

(3)写出每个初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$，$i=1,2,\cdots,s$对应的Jordan块

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{r_i\times r_i}\quad (i=1,2,\cdots,s)$$

以这些Jordan 块构成的Jordan阵$J=\begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{pmatrix}$

即为A的Jordan标准形.

方法二：初等变换法

- 例1.7：

求矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\-4&0&3\end{pmatrix}$的Jordan标准形

解：

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda+1&0&-1\\-1&\lambda-2&0\\4&0&\lambda-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{pmatrix}$$

初等变换法例子

- 解（续）：

可见A的不变因子为$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=1$,

$d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. 而$A$的初等因子为$(\lambda-1)^2$，$\lambda-2$.

故A的Jordan标准形为

$$J=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Jordan标准形的求法

- 方法三：行列式因子法

定义1.9： 设λ矩阵$A(\lambda)$的秩为r. 对于正整数$k(1\le k\le r)$, $A(\lambda)$的所有k阶子式首一最大公因式$D_k(\lambda)$称为$A(\lambda)$的k阶行列式因子

定理1.11： 设$A(\lambda)$是秩为r的λ矩阵，则$A(\lambda)$的行列式因子$D_k(\lambda)$为$D_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda),(k=1,2,\cdots,r)$

其中$d_k(\lambda)$是$A(\lambda)$不变因子. 于是

$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)$

$d_k(\lambda)=D_k(\lambda)/D_{k-1}(\lambda), k=2,3,\cdots,r$

Jordan标准形的求法

- 引理：λ矩阵的初等变换不改变其行列式因子，因此不改变其不变因子和初等因子.
- λ矩阵等价的充分必要条件：
  - 行列式因子相同
  - 不变因子相同
  - 初等因子相同且秩相等
- 矩阵A和B相似的充分必要条件：
  - 特征矩阵$\lambda I-A$和$\lambda I-B$等价

Jordan标准形的求法

- 方法三：行列式因子法

(1)求λI_n-A的n个行列式因子$D_1(\lambda), D_2(\lambda),\cdots, D_n(\lambda)$.

(2)由$d_k(\lambda)=D_k(\lambda)/D_{k-1}(\lambda)$求$A$的不变因子$d_k(\lambda)$, $k=1,2,\cdots,n$.

(3)求A的初等因子和Jordan标准形.

方法三：行列式因子法

- 例1.7（2）

求矩阵$A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\-2&0&2\\-1&-1&3\end{pmatrix}$的Jordan标准形

- 解：

$$\lambda I_3-A=\begin{pmatrix}\lambda-3&-1&1\\2&\lambda&-2\\1&1&\lambda-3\end{pmatrix}$$

A的1阶行列式因子为$D_1(\lambda)=1$.

行列式因子法例子

A的3阶子式：

$$D_3(\lambda)=|\lambda I_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & 1\\ 2 & \lambda & -2\\ 1 & 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3$$

A的2阶子式如下：

$$\frac{1}{2}:\overset{1,2}{(\lambda-1)(\lambda-2)},\overset{1,3}{-2(\lambda-2)},\overset{2,3}{-(\lambda-2)}$$

$$\frac{1}{3}:\overset{1,2}{(\lambda-2)},\overset{1,3}{(\lambda-2)(\lambda-4)},\overset{2,3}{-(\lambda-2)}$$

$$\frac{2}{3}:\overset{1,2}{-(\lambda-2)},\overset{1,3}{2(\lambda-2)},\overset{2,3}{(\lambda-1)(\lambda-2)}$$

故A的2阶行列式因子为$D_2(\lambda)=\lambda-2.$

行列式因子法例子

故A的不变因子为$d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=\lambda-2,d_3(\lambda)=(\lambda-2)^2.$

A的初等因子为$\lambda-2,(\lambda-2)^2.$

所以A的Jordan标准形为

$$J=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\ \text{或}J=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

行列式因子法例子

- **例1.8（2）** 求矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&1&-1\\2&2&-1&-1\\1&2&-1&2\\0&0&0&3\end{pmatrix}$的Jordan标准形
- **解**

$$\lambda I_4-A=\begin{pmatrix}\lambda-2&1&-1&1\\-2&\lambda-2&1&1\\-1&-2&\lambda+1&-2\\0&0&0&\lambda-3\end{pmatrix}$$

行列式因子法例子

可求得λI_4-A中的两个三阶子式

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-1\\-2&\lambda-2&1\\-1&-2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3,$$

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\-2&\lambda-2&1\\-1&-2&-2\end{vmatrix}=-(\lambda-3)(2\lambda-5)$$

因$D_3(\lambda)$整除每个三阶子式，所以$D_3(\lambda)=1$，从而$D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$。

行列式因子法例子

$$D_4(\lambda)=\det(\lambda I_4-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-1&1\\-2&\lambda-2&1&1\\-1&-2&\lambda+1&-2\\0&0&0&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^3(\lambda-3)$$

故A的不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,d_4(\lambda)=(\lambda-1)^3(\lambda-3).$$

于是A的初等因子为$\lambda-3,(\lambda-1)^3.$

行列式因子法例子

所以A的Jordan标准形为

$$J=\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&\\&&&3\end{pmatrix}$$

Jordan标准形的求法

- 注意
  - 方法二、三最终都是通过求出初等因子，写出Jordan块及Jordan标准型的，两个方法本质上一致
  - 推论：方阵A可对角化⟺初等因子为一次式

相似变换矩阵的求法

- 例1.9（1） 求矩阵Jordan标准形及所用的相似变换矩阵，$A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\-4&0&3\end{pmatrix}$
- 解：

由例1.7(1)知A的Jordan标准形为

$$J=\begin{pmatrix}2&&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}$$

相似变换矩阵的求法

设相似变换矩阵$P=(p_1,p_2,p_3)$,由$P^{-1}AP=J$,即$AP=PJ$得：

$$A(p_1,p_2,p_3)=(p_1,p_2,p_3)\begin{pmatrix}2&&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}Ap_1=2p_1\\Ap_2=p_2\\Ap_3=p_2+p_3\end{cases}\qquad \text{即,}\begin{cases}(2I-A)p_1=0\\(I-A)p_2=0\\(I-A)p_3=-p_2\end{cases}$$

相似变换矩阵的求法

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\-4&0&3\end{pmatrix}$$

解线性方程组$(2I-A)x=0$,

即$\begin{pmatrix}3&0&-1\\-1&0&0\\4&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$,得$p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$;

解线性方程组$(I-A)x=0$,

即$\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&-1&0\\4&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$,得$p_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$;

相似变换矩阵的求法

解线性方程组$(I-A)x=-p_2$,

即$\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&-1&0\\4&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$,得$p_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$;

所以，$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&-1\\0&2&1\end{pmatrix}$,$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}$.

相似变换矩阵的求法

- Remarks

解线性方程组$(I-A)p_3=-p_2$中所取的p_2要保证此方程有解.

称p_3为对应特征值1的广义特征向量

相似变换矩阵的求法

- 例1.9（2） 求矩阵Jordan标准形及所用的相似变换矩阵，$A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\-2&0&2\\-1&-1&3\end{pmatrix}$
- 解：

由例1.7(2)知A的Jordan标准形为

$$J=\begin{pmatrix}2&&\\&2&1\\&&2\end{pmatrix}$$

相似变换矩阵的求法

设相似变换矩阵$P=(p_1,p_2,p_3)$,由$P^{-1}AP=J$,即$AP=PJ$得：

$$A(p_1,p_2,p_3)=(p_1,p_2,p_3)\begin{pmatrix}2&&\\&2&1\\&&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}Ap_1=2p_1\\Ap_2=2p_2\\Ap_3=p_2+2p_3\end{cases}\quad \text{即,}\begin{cases}(2I-A)p_1=0\\(2I-A)p_2=0\\(2I-A)p_3=-p_2\end{cases}$$

相似变换矩阵的求法

解线性方程组$(2I-A)x=0$，$A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\-2&0&2\\-1&-1&3\end{pmatrix}$

即$\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&2&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$,得$p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,$p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$;

但显然p_2不属于$(2I-A)$的列空间，所以$(2I-A)p_3=-p_2$无解

可取$p_3\notin Span\{p_1,p_2\}$，如$p_3=(1,0,0)^T$，令$p_2'=-(2I-A)p_3$即可

思考题

- 一个5阶矩阵A的Jordan标准形为：

$$J=\begin{bmatrix}2&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&3&1&0\\0&0&0&3&1\\0&0&0&0&3\end{bmatrix}$$

求矩阵A的特征矩阵的初等因子、不变因子、行列式因子？

思考题

- 以下两个矩阵A、B是否相似？它们的初等因子、不变因子、行列式因子是什么？

$$A=\begin{bmatrix}a&0&\cdots&0\\1&a&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&1&a\end{bmatrix}_{n*n}\quad B=\begin{bmatrix}a&1&\cdots&0\\0&a&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\0&\cdots&0&a\end{bmatrix}_{n*n}$$

思考题

- 以下三个矩阵是否相似？试求它们的初等因子、不变因子、行列式因子？

$$A=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&a&1\\0&0&a\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}a&1&0\\0&a&1\\0&0&a\end{bmatrix}$$

思考题解答

- 矩阵*A*，*B*，*C*的特征矩阵分别为

$$\begin{bmatrix} \lambda-a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda-a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-a & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda-a & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-a & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-a \end{bmatrix}$$

- 它们的特征矩阵的行列式因子分别为：

$$D_1(\lambda)=\lambda-a, D_2(\lambda)=(\lambda-a)^2, D_3(\lambda)=(\lambda-a)^3$$

$$D_1'(\lambda)=1, D_2'(\lambda)=(\lambda-a), D_3'(\lambda)=(\lambda-a)^3$$

$$D_1''(\lambda)=1, D_2''(\lambda)=1, D_3''(\lambda)=(\lambda-a)^3$$

- 因为各级行列式因子不完全相同，所以*A*，*B*，*C*不能相似

Jordan标准形的幂

- 定理1.12：

对于r_i阶Jordan块 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i\times r_i}$

有 $J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & C_k^2\lambda_i^{k-2} & \cdots & C_k^{r_i-1}\lambda_i^{k-r_i+1} \\ & \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{r_i-2}\lambda_i^{k-r_i+2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & C_k^1\lambda_i^{k-1} \\ & & & & \lambda_i^k \end{pmatrix}_{r_i\times r_i}$

Jordan标准形的幂

$$= \begin{pmatrix} \lambda^k & \frac{1}{1!}\left(\lambda^k\right)' & \frac{1}{2!}\left(\lambda^k\right)'' & \cdots & \frac{1}{(r_i-1)!}\left(\lambda^k\right)^{(r_i-1)} \\ & \lambda^k & \frac{1}{1!}\left(\lambda^k\right)' & \cdots & \frac{1}{(r_i-2)!}\left(\lambda^k\right)^{(r_i-2)} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \frac{1}{1!}\left(\lambda^k\right)' \\ & & & & \lambda^k \end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_i}$$

其中$C_k^i = \dfrac{k!}{i!(k-i)!}$

Jordan标准形的幂

对于Jordan 阵$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$，有

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^k \end{pmatrix}$$

Jordan标准形的幂

- Remark

设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$,则由Jordan分解定理知存在可逆矩阵$P \in \mathbf{C}^{n\times n}$使得

$$P^{-1}AP = J, \text{即} A = PJP^{-1},$$

则$A^k = PJ^kP^{-1}$.

Jordan标准形的幂

- 例1.10

设$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,求$A^k$.

- 解：

可求得，$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

故，$A^k = PJ^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & \\ & 1 & \\ & & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

Jordan标准形的幂

$$A^k=\begin{pmatrix} -2k+1 & 0 & k \\ 2k+1-2^k & 2^k & -k-1+2^k \\ -4k & 0 & 2k+1 \end{pmatrix}$$

小结

- Jordan标准形概念；
  - Jordan块； Jordan标准形
- Jordan标准形求法
  - 特征向量法
  - 初等变换法
  - 行列式因子法
- 相似变换矩阵计算
- Jordan 标准型在计算中的应用
  - Jordan块的幂

Assignment

- 徐仲、张凯院等.《矩阵论简明教程》,第三版.科学出版社出版.
  - 习题一：7(1)(4)
  - 预习1.4节Caylay-Hamilton定理