第一章：矩阵的相似变换

酉相似

- **定理1.22（Schur）**

设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$,若存在酉矩阵$U\in\mathbf{C}^{n\times n}$, 使得

$$U^{-1}AU=U^{H}AU=T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的特征值，即$A$可酉相似于一个上三角矩阵$T$.

Schur定理的证明

设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$\lambda_1$是$A$的一个特征值，$P_1$为$A$的属于$\lambda_1$的单位特征向量，将$P_1$扩充为$\mathbf{C}^n$中一组标准正交基$P_1,P_2,\cdots,P_n$,

$$令U_1=\left(P_1,P_2,\cdots,P_n\right),$$

则$P\in\mathbf{C}^{n\times n}$是一个酉矩阵，且

$$U_1^{-1}AU_1=U_1^{H}AU_1=\begin{pmatrix}P_1^H\\ P_2^H\\ \vdots\\ P_n^H\end{pmatrix}A\left(P_1,P_2,\cdots,P_n\right)$$

Schur定理的证明

$$=\begin{pmatrix}P_1^HAP_1 & P_1^HAP_2 & \cdots & P_1^HAP_n\\ P_2^HAP_1 & P_2^HAP_2 & \cdots & P_2^HAP_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P_n^HAP_1 & P_n^HAP_2 & \cdots & P_n^HAP_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1P_1^HP_1 & P_1^HAP_2 & \cdots & P_1^HAP_n\\ \lambda_1P_2^HP_1 & P_2^HAP_2 & \cdots & P_2^HAP_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1P_n^HP_1 & P_n^HAP_2 & \cdots & P_n^HAP_n\end{pmatrix}$$

Schur定理的证明

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & P_1^HAP_2 & \cdots & P_1^HAP_n\\ 0 & P_2^HAP_2 & \cdots & P_2^HAP_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & P_n^HAP_2 & \cdots & P_n^HAP_n\end{pmatrix}$$

由数学归纳法假设存在n-1阶酉矩阵 $\tilde{U}_2$，使

$$\tilde{U}_2^{-1}A_1\tilde{U}_2=\tilde{U}_2^{H}A_1\tilde{U}_2=\begin{bmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

Schur定理的证明

令 $U_2=\begin{bmatrix}1 & 0^T\\ 0 & \tilde{U}_2\end{bmatrix}$, $U=U_1U_2$

则U_2是n阶酉矩阵，从而U是n阶酉矩阵，且有

$$U^{-1}AU=U^{H}AU=U_2^{H}(U_1^{H}AU_1)U_2$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0^T\\ 0 & \tilde{U}_2^H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & *\\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0^T\\ 0 & \tilde{U}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & \tilde{U}_2^HA_1\tilde{U}_2\end{bmatrix}=T$$

正规矩阵

- 正规矩阵：定义1.16

设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$,若$A$满足 $A^HA=AA^H$,则称A为正规矩阵.

如： $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & i\\ 1 & 0 & 0\\ i & 0 & 0\end{bmatrix}$ 是正规矩阵

正规矩阵

- 以下矩阵都是正规矩阵：

(1)实对称阵: $A\in\mathbf{R}^{n\times n}, A^T=A$;

(2)实反对称阵: $A\in\mathbf{R}^{n\times n}, A^T=-A$;

(3)实正交矩阵: $A\in\mathbf{R}^{n\times n}, A^TA=AA^T=I$;

(4)Hermite矩阵: $A\in\mathbf{C}^{n\times n}, A^H=A$;

(5)反Hermite矩阵: $A\in\mathbf{C}^{n\times n}, A^H=-A$;

(6)酉矩阵: $A\in\mathbf{C}^{n\times n}, A^HA=AA^H=I$;

酉相似对角化

- 定理1.23

设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$,则$A$可以酉相似对角化的充要条件是

$$A^HA=AA^H,$$

即A为正规矩阵.

- Remarks
  - 可对角化矩阵不一定是正规矩阵
  - 如例1.2（1）

酉相似对角化定理的证明

- 证明：
  - 必要性

设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$可以酉相似对角化,即存在酉矩阵$U\in\mathbf{C}^{n\times n}$

使得 $U^{-1}AU=U^HAU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda$

所以，$A=U\Lambda U^H, A^H=U\Lambda^HU^H=U\overline{\Lambda}U^H, UU^H=I$

酉相似对角化定理的证明

- 证明：
  - 必要性（续）

因此，

$$A^HA=U\overline{\Lambda}\Lambda U^H=U\Lambda\overline{\Lambda}U^H=\left(U\Lambda U^H\right)\left(U\overline{\Lambda}U^H\right)=AA^H$$

- 充分性

设 $A^HA=AA^H$

由Schur分解定理，存在酉矩阵$U\in\mathbf{C}^{n\times n}$使得

酉相似对角化定理的证明

- 必要性

$$U^HAU=\begin{pmatrix}t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ & t_{22} & \cdots & t_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & t_{nn}\end{pmatrix}$$

则，$U^HA^HU=\begin{pmatrix}\overline{t}_{11} & & & \\ \overline{t}_{12} & \overline{t}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \overline{t}_{1n} & \overline{t}_{2n} & \cdots & \overline{t}_{nn}\end{pmatrix}$

酉相似对角化定理的证明

于是，$\begin{pmatrix} \bar{t}_{11} & & & \\ \bar{t}_{12} & \bar{t}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \bar{t}_{1n} & \bar{t}_{2n} & \cdots & \bar{t}_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix}$

$$=\left(U^H A^H U\right)\left(U^H AU\right)=U^H A^H AU=\left(U^H AU\right)\left(U^H A^H U\right)$$

$$=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{t}_{11} & & \cdots & \\ \bar{t}_{12} & \bar{t}_{22} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{t}_{1n} & \bar{t}_{2n} & \cdots & \bar{t}_{nn} \end{pmatrix}$$

酉相似对角化定理的证明

$$\begin{cases} |t_{11}|^2 = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \cdots + |t_{1n}|^2 \\ |t_{12}|^2 + |t_{22}|^2 = |t_{22}|^2 + |t_{23}|^2 + \cdots + |t_{2n}|^2 \\ \vdots \\ |t_{1n}|^2 + |t_{2n}|^2 + \cdots + |t_{nn}|^2 = |t_{nn}|^2 \end{cases}$$

故，$t_{ij}=0, i<j$，即$U^H AU=\begin{pmatrix} t_{11} & & & \\ & t_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix}$

正规矩阵的性质

- **推论1**：Hermite矩阵的特征值均为实数，反Hermite矩阵的特征值为零或纯虚数.
- **推论2**：实对称矩阵的特征值均为实数，实反对称矩阵的特征值为零或纯虚数.
- **推论3**：
  设λ是正规矩阵A的特征值，x是对应λ的特征向量，则$\bar{\lambda}$是A^H的特征值，对应$\bar{\lambda}$的特征向量仍为x.
- **推论4**：正规矩阵的属于不同特征值的特征向量彼此正交.

正规矩阵的性质

- **证明**：

设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$是一个正规矩阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$A$的$n$个特征值，则存在酉矩阵$U$使得

$$U^{-1}AU=U^H AU=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

正规矩阵的性质

- **推论1证明**

A是Hermite矩阵 $\Leftrightarrow A^H=A$

$$\Leftrightarrow A=U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}U^H=U\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}U^H$$

$=A^H$

$\Leftrightarrow \lambda_i=\bar{\lambda}_i, i=1,2,\cdots,n \Leftrightarrow \lambda_i \in R, i=1,2,\cdots,n,$

即A的特征值全是实数；

正规矩阵的性质

A是反Hermite矩阵 $\Leftrightarrow A^H=-A$

$$\Leftrightarrow -A=U\begin{pmatrix} -\lambda_1 & & & \\ & -\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\lambda_n \end{pmatrix}U^H=U\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}U^H$$

$=A^H$

$\Leftrightarrow -\lambda_i=\bar{\lambda}_i, i=1,2,\cdots,n \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\lambda_i=0, i=1,2,\cdots,n$

即A的特征值是0或纯虚数；

正规矩阵的性质

- **推论3证明**

$$由U^H AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}得$$

$$U^H A^H U=\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n\end{pmatrix}.$$

正规矩阵的性质

设$U=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$,则有

$Au_j=\lambda_j u_j, A^H u_j=\bar{\lambda}_j u_j, j=1,2,\cdots,n$

可见λ_j是A的特征值且u_j是对应λ_j的特征向量，$\bar{\lambda}_j$是A^H的特征值, 而对应$\bar{\lambda}_j$的特征向量仍为u_j.

正规矩阵的性质

- **推论4证明**

$\because \quad A\vec{x}=\lambda\vec{x}, A\vec{y}=\mu\vec{y}$

由推论3 $\quad A^H\vec{x}=\bar{\lambda}\vec{x}, A^H\vec{y}=\bar{\mu}\vec{y}$

$\therefore \bar{\mu}\ \vec{x},\vec{y}\ =\ \vec{x},\mu\vec{y}\ =\ \vec{x},A\vec{y}$

$\quad = A\vec{y}^{\ H}\cdot\vec{x}=\vec{y}^H A^H\vec{x}$

$\quad =\vec{y}^H\bar{\lambda}\vec{x}=\bar{\lambda}\ \vec{x},\vec{y}$

即 $\overline{\mu-\lambda}\ \vec{x}^H\vec{y}=0$.

由$\lambda\neq\mu$得$\vec{x}^H\vec{y}=0$，故$\vec{x}$与$\vec{y}$正交.

酉相似对角化方法

(1)求出A的全部特征值. 设$\lambda_1, \lambda_2,\cdots, \lambda_s$是$A$的互不相同的特征值，其重数分别为$r_1,r_2,\cdots,r_s$,且$r_1+r_2+\cdots+r_s=n$.

(2)对于特征值$\lambda_i, i=1,2,\cdots,s$,求出对应的$r_i$个线性无关的特征向量$p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{ir_i},i=1,2,\cdots,s$.

(3)用Schmidt正交化方法将$p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{ir_i}$正交化，再单位化得$u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{ir_i},i=1,2,\cdots,s$,则酉矩阵

酉相似对角化方法

$U=(u_{11},\cdots,u_{1r_1}u_{21},\cdots,u_{2r_2},\cdots,u_{s1},\cdots,u_{sr_s})$

使得

$$U^{-1}AU=U^H AU=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{r_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I_{r_s}\end{pmatrix}$$

酉相似对角化方法

- **例1. 15：**

已知$A=\begin{pmatrix}-1 & i & 0\\ -i & 0 & -i\\ 0 & i & -1\end{pmatrix}$,试问$A$是否是正规矩阵？若是，求酉矩阵$U$,使得$U^H AU$为对角阵.

- **解：**

A满足$A^H=A$,即A是Hermite矩阵，从而是正规矩阵.

$\because \det(\lambda I-A)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2),\therefore A$的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$.

酉相似对角化方法例子

可求得对应的特征向量分别为

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\-2i\\1\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix},$$

它们是正交的，单位化得：

$$u_1=\frac{p_1}{|p_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2i}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix},u_2=\frac{p_2}{|p_2|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},u_3=\frac{p_3}{|p_3|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{i}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$$

酉相似对角化方法例子

于是酉矩阵 $U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{2i}{\sqrt6}&0&\frac{i}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$

使得 $U^HAU=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$

正定Hermite矩阵

- 定义1.17

设 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个Hermite矩阵, 如果

$$x^HAx>0,\forall x\in\mathbf{C}^n,x\neq0,$$

则称A是一个正定的Hermite矩阵，如果

$$x^HAx\geq0,\forall x\in\mathbf{C}^n,$$

则称A是一个非负定(半正定)的Hermite矩阵.

注：1.对任意 $\vec{x}$ 与A，都有 $\vec{x}^HA\vec{x}$ 为实数

$$\overline{\vec{x}^HA\vec{x}}=\left(\vec{x}^HA\vec{x}\right)^H=\vec{x}^HA^H\vec{x}=\vec{x}^HA\vec{x}\quad(\because A^H=A)$$

2. A为正定矩阵 $\Longrightarrow$ A为Hermite矩阵

正定Hermite矩阵的性质

- 定理1.24

设 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是Hermite矩阵, 则下述条件等价

(1) A是正定的Hermite矩阵

(2) A的特征值全为正实数；

(3) 存在可逆矩阵P使得 $A=P^HP$.

- 推论：Hermite正定矩阵的行列式大于零.

正定Hermite矩阵的性质

证明：1) $\Longrightarrow$ 2) 有酉矩阵U

$$U^HAU=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)=\Lambda$$

令 $\vec{x}=U\vec{y},\vec{y}=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$

$\because$ U为酉矩阵，故对任何 $\vec{x}\neq\vec{0}$ 有 $\vec{y}\neq\vec{0}$,

由于A是Hermite正定矩阵：

$$0<\vec{x}^HA\vec{x}=(U\vec{y})^HA(U\vec{y})=\vec{y}^H\Lambda\vec{y}$$

$$=\lambda_1|y_1|^2+\lambda_2|y_2|^2+\cdots+\lambda_n|y_n|^2$$

由 $\vec{x}$ 的任意性知 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n>0$

正定Hermite矩阵的性质

证明：2) $\Longrightarrow$ 3) $\because\lambda_i>0\quad\therefore\lambda_i=\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_i}$

于是 $A=U\Lambda U^H$

$$=Udiag(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots\sqrt{\lambda_n})diag(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots\sqrt{\lambda_n})U^H$$

$$=P^HP$$

其中 $\boldsymbol{P=diag(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots\sqrt{\lambda_n})U^H}\in\boldsymbol{C_n^{n\times n}}$

3) $\Rightarrow$ 1) $\because\quad A=P^HP\qquad P\in C_n^{n\times n}$

$\therefore\vec{0}\neq\vec{x}\in C^n\qquad P\vec{x}\neq\vec{0}$

$\therefore\vec{x}^HA\vec{x}=\vec{x}^HP^HP\vec{x}=\|P\vec{x}\|_2^2>0$

故A是Hermite正定矩阵

非负定Hermite 矩阵的性质

- **定理1.25：**

  设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$是Hermite矩阵，则下述条件等价

  (1) A是非负定的Hermite矩阵

  (2) A的特征值全为非负数；

  (3) 存在矩阵P使得$A = P^H P$

半正定Hermite 矩阵的性质

- **定理1.26：**

  设$A \in \mathbf{C}^{m\times n}$，则

  (1) $A^H A$和AA^H的特征值全为非负实数；

  (2) $A^H A$与AA^H的非零特征值相同；

  (3) $\mathrm{rank}(A^H A) = \mathrm{rank}(AA^H) = \mathrm{rank}(A)$

半正定Hermite 矩阵的性质

证明1）$\because \ (A^H A)^H = A^H A \quad \therefore A^H A$ 是Hermite矩阵

对任意 $\vec{x} \neq \vec{0}$，有 $\vec{x}^H A^H A\vec{x} = (A\vec{x})^H (A\vec{x}) = \|A\vec{x}\|_2^2 \geq 0$

$\therefore A^H A$ 是半正定的，故特征值非负

同理可证，AA^H特征值非负

证明2）设 λ是AA^H的非零特征值，特征向量为$\vec{x}$，

由于 $A^H A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \therefore A\vec{x} = \vec{y} \neq \vec{0}$

(否则，有 $A^H A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow \lambda\vec{x} = \vec{0}$ 矛盾)

$AA^H A\vec{x} = \lambda A\vec{x}$ 即 $AA^H \vec{y} = \lambda\vec{y}$

即λ 也是AA^H非零特征值

同理可证，AA^H非零特征值也是$A^H A$的非零特征值

半正定Hermite 矩阵的性质

证明3）若有向量$\vec{x}$，使 $A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow A^H A\vec{x} = \vec{0}$

反之，若 $A^H A\vec{x} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{x}^H A^H A\vec{x} = \|A\vec{x}\|_2^2 = 0 \Rightarrow A\vec{x} = \vec{0}$

即 $A\vec{x} = \vec{0}$ 与$A^H A\vec{x} = \vec{0}$ 同解

$\therefore \ rank(A) = rank(A^H A)$

同理可证: $rank(A^H) = rank(AA^H)$

$\Rightarrow rank(A^H A) = rank(AA^H) = rank(A)$

正定Hermite矩阵的判别法

- **定理1.27**

  设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$是Hermite矩阵，则$A$是正定Hermite矩阵的充分必要条件是$A$的顺序主子式全为正.

  例如: $A = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 各阶顺序主子式大于零 所以A是正定的Hermite矩阵

- Remark
  - 所有顺序主子式非负不能保证Hermite矩阵是半正定的

正定Hermite矩阵的判别法

证明: $\Rightarrow$ 必要性.

设A是正定的,显然A_k是Hermite矩阵,记

$F_k = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots \vec{e}_k)$, 则 $A_k = F_k^H A F_k$

$\vec{e}_i = (0,0,\cdots 0,1,0,\cdots 0) \in C^n \quad (i = 1,2,3,\cdots,k)$

任给$\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{x} \in C^k$ 有$F_k \vec{x} = \vec{y} \neq \vec{0}$,

且 $\vec{x}^H A_k \vec{x} = \vec{x}^H F_k^H A F_k \vec{x} = \vec{y}^H A\vec{y} > 0$

$\therefore A_k$也是正定的, $\therefore A_k$特征值非负.

$\therefore \det A_k > 0$

正定Hermite矩阵的判别法

证明: $\Longleftarrow$充分性.

$\because \det A_k > 0$ 用归纳法证明A是正定的.

显然, n=1时成立.

设n-1阶时也成立.则, A为n阶时,由于$a_{11}>0$,记

$$F=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1}/a_{11} & & & 1 \end{bmatrix}$$

正定Hermite矩阵的判别法

$$FAF^H=\begin{bmatrix} a_{11} & 0^T \\ 0 & B \end{bmatrix},\ \text{其中}\ b_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}\quad (i,j=2,3,\cdots,n).$$

$$\because \bar{a}_{ji}=a_{ij},\quad \therefore \bar{b}_{ji}=\bar{a}_{ji}-\frac{\bar{a}_{j1}\bar{a}_{1i}}{a_{11}}=a_{ij}-\frac{\bar{a}_{1j}\bar{a}_{i1}}{a_{11}}=b_{ij}$$

即B^H=B为n-1阶Hermite矩阵

利用归纳假设可证矩阵B是正定的.

再由 $A=F^H\begin{bmatrix} a_{11} & 0^T \\ 0 & B \end{bmatrix}F$ 知, A也是正定的.

正定Hermite矩阵的判别法

证明B是正定矩阵的

$$0<\det A_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3,\cdots k]{r_i-\frac{a_{i1}}{a_{11}}r_1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{k2} & & b_{kk} \end{vmatrix} \quad \therefore \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{k2} & & b_{kk} \end{vmatrix}>0 \quad (k=2,\cdots,n)$$

即B的各顺序主子式大于0, 由归纳假设可知B为正定矩阵.

思考题

- **设A是正定的Hermite矩阵，若A还是酉矩阵，则A＝E.**

小结

1. Schur定理：U是酉矩阵，A是任意，T是上三角
   $\forall A,\exists U$, 使 $U^HAU=T$
2. 正规矩阵：$A^HA=AA^H$
3. A可酉对角化 $\Leftrightarrow$ A是正规的
   即 $U^HAU=\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n)$
4. 正定(半正定矩阵）：$\vec{X}^HA\vec{X}>0(\geq 0)$ 及性质
5. 有关结论（定理1.24-26，*1.27）

Assignment

- 徐仲、张凯院等.《矩阵论简明教程》，第三版.科学出版社出版.
  - 习题一：12、13
  - 复习第一章
  - 预习2.1节向量范数