《矩阵论简明教程》

第一章　矩阵的相似变换

- 一（补）方阵A、B相似的充要条件
- 二　矩阵的三因子
  不变因子　行列式因子　初等因子
- 三　重要结论

一　补充：方阵A、B相似的条件

引理一　设A、B为N阶方阵，若存在n阶数字矩阵P、Q使

$$\lambda I-A=P(\lambda I-B)Q$$

则A与B相似。

证明：比较上边两式，得

$$PQ=I;\quad A=PBQ$$

$$\therefore\ P=Q^{-1},\quad A=Q^{-1}BQ$$

$$\Rightarrow\ A、B\text{相似}$$

注：引理一等价结论：若两个矩阵的特征矩阵等价，则这两个矩阵相似

上　下　首

一　补充：方阵A、B相似的条件

引理二　$A\in C^{n\times n},A\neq 0,U(\lambda),V(\lambda)$ 是n阶λ矩阵

则存在λ矩阵$Q(\lambda)$，$R(\lambda)$及数字矩阵

U_0,V_0 使

$$U(\lambda)=(\lambda I-A)Q(\lambda)+U_0$$

$$V(\lambda)=R(\lambda)(\lambda I-A)+V_0$$

（证略）

注：引理二结论类似于多项式的分解，如

$f(x)=x^3-3x^2+x-4$　，$a=2$

则：　$f(x)=(x-2)(x^2-x-1)-6$

上　下　首

一　补充：方阵A、B相似的条件

定理一：A，$B\in C^{n\times n}$，则 $A\sim B\ \Leftrightarrow\ \lambda I-A\cong\lambda I-B$

既存在可逆矩阵$U(\lambda)$与$V(\lambda)$使

$$(\lambda I-A)=U(\lambda)(\lambda I-B)V(\lambda)$$

证明：必要性 $\Rightarrow$ 设 $A\sim B$　　即有可逆矩阵P，使

$$P^{-1}AP=B$$

从而　$P^{-1}(\lambda I-A)P=\lambda I-B$

$\Leftarrow$ 充分性　设 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 等价，即有可逆矩阵

$U(\lambda)$　$V(\lambda)$，　　使

$$(\lambda I-A)=U(\lambda)(\lambda I-B)V(\lambda)\quad \text{……….（＊）}$$

可推出存在数字矩阵U_0与V_0成立：

$$(\lambda I-A)=U_0(\lambda I-B)V_0$$

由引理一知A与B相似。（详略）

上　下　首

补充：方阵A、B相似的条件

定理一：A，B$\in C^{n\times n}$，则 $A\sim B\ \Leftrightarrow\ \lambda I-A\cong\lambda I-B$

既存在可逆矩阵U（λ）与V（λ）使

$$(\lambda I-A)=U(\lambda)(\lambda I-B)V(\lambda)$$

证明： $\Leftarrow$ 充分性

$$(\lambda I-A)=U(\lambda)(\lambda I-B)V(\lambda)\quad \text{……….（＊）}$$

由引理二可设①

$$U(\lambda)=(\lambda I-A)Q(\lambda)+U_0\quad\cdots①$$

$$V(\lambda)=R(\lambda)(\lambda I-A)+V_0\quad\cdots②$$

由于$U(\lambda),V(\lambda)$可逆，由（＊）式可以分别得到下式

$$\begin{cases}U^{-1}(\lambda)(\lambda I-A)=(\lambda I-B)V(\lambda) & \cdots③\\ (\lambda I-A)V^{-1}(\lambda)=U(\lambda)(\lambda I-B) & \cdots④\end{cases}$$

代入

$$\left[U^{-1}(\lambda)-(\lambda I-B)R(\lambda)\right](\lambda I-A)=(\lambda I-B)V_0$$

上　下　首

补充：方阵A、B相似的条件

把②代入③得

$$\left[U^{-1}(\lambda)-(\lambda I-B)R(\lambda)\right](\lambda I-A)=(\lambda I-B)V_0$$

右边次数≤1，故 $U^{-1}(\lambda)-(\lambda I-B)R(\lambda)$ 为数字矩阵，记为T

$$T=U^{-1}(\lambda)-(\lambda I-B)R(\lambda)\quad\cdots⑤$$

即有　$T(\lambda I-A)=(\lambda I-B)V_0\quad\cdots⑥$

由⑤式　$U^{-1}(\lambda)=T+(\lambda I-B)R(\lambda)$

$\therefore I=U(\lambda)U^{-1}(\lambda)\ =U(\lambda)T+U(\lambda)(\lambda I-B)R(\lambda)$

由③④式　$=U(\lambda)T+(\lambda I-A)V^{-1}(\lambda)R(\lambda)$

由①式　$=\left[(\lambda I-A)Q(\lambda)+U_0\right]T+(\lambda I-A)V^{-1}(\lambda)R(\lambda)$

$$=\underbrace{U_0T}_{I}+\underbrace{(\lambda I-A)\left[Q(\lambda)T+V^{-1}(\lambda)R(\lambda)\right]}_{0}$$

比较上式两边得　I　0

上　下　首

补充：方阵A、B相似的条件

把②代入③得

$$\left[U^{-1}(\lambda)-(\lambda I-B)R(\lambda)\right](\lambda I-A)=(\lambda I-B)V_0$$

右边次数≤1，故 $U^{-1}(\lambda)-(\lambda I-B)R(\lambda)$ 为数字矩阵，记为T

$$T=U^{-1}(\lambda)-(\lambda I-B)R(\lambda) \qquad \cdots ⑤$$

既有 $T(\lambda I-A)=(\lambda I-B)V_0 \qquad \cdots ⑥$

$$U_0T=I$$

$$(\lambda I-A)\left[Q(\lambda)T+V^{-1}(\lambda)R(\lambda)\right]=0$$

从而 $T=U_0^{-1}$ 代入⑥ 得

$$(\lambda I-A)=U_0(\lambda I-B)V_0$$

由引理一知A与B相似。

二 不变因子 初等因子 行列式因子

1、不变因子（P11）

【定理1.10】秩为r的 矩阵 $A(\lambda)=(a_{i*j}(x))_{m*n}$,可通过初等变换化为如下矩阵

$$S(\lambda)=\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,r)$ 为首一多项式且 $d_i(\lambda)/d_{i+1}(\lambda)(i=1,2,\cdots,r-1)$

矩阵 $S(\lambda)$ 是由矩阵$A(\lambda)$唯一确定，称为 $A(\lambda)$的$Smith$标准形，$d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,r)$ 为$A(\lambda)$的不变因子.

二 不变因子 初等因子 行列式因子

例1.6：试求 λ 矩阵 $A(\lambda)=\begin{bmatrix} -\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$ 的$Smith$标准形和不变因子.

解：

$$A(\lambda)\xrightarrow[c_1\leftrightarrow c_3]{c_3+c_1}\begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+1 \end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{c_2-(2\lambda-1)c_1 \\ c_3+(\lambda-1)c_1}]{r_3-r_1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{c_3-\lambda c_2 \\ r_3\times(-1)}]{r_3-(\lambda+1)r_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda \end{bmatrix}$$

即得 $A(\lambda)$ 的$Smith$标准形，不变因子为

$$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda, d_3(\lambda)=\lambda^3+\lambda$$

二 不变因子 初等因子 行列式因子

2、初等因子组

【定义】设秩为r的矩阵 $A(\lambda)=(a_{i*j}(x))_{m*n}$的$Smith$ 标准形为，

$$S(\lambda)=\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

次数大于零的不变因子$d_i(\lambda)$ 分解为互不相同的一次因式方幂的乘积，这些一次因式的方幂称为初等因子，$A(\lambda)$的初等因子的全体称为初等因子组.

例1.6中,初等因子组为 $\lambda, \lambda, \lambda\pm i$. 而不是 λ^2+1, λ.

二 不变因子 初等因子 行列式因子

3、行列式因子

【定义1.9】设 λ 矩阵$A(\lambda)$ 的秩为r. 对于正整数 $k(1\le k\le r)$，$A(\lambda)$的全部k阶子式的首一最大公因式 $D_k(\lambda)$称为 $A(\lambda)$的 k 阶行列式因子.

注意 用直接方法计算$D_k(\lambda)$较难.

二 不变因子 初等因子 行列式因子

3、行列式因子

【定理1.11】设$A(\lambda)$是秩为r的$m\times n$ 的矩阵，则$A(\lambda)$ 的行列式因子$D_k(\lambda)$ 为

$$D_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda)(k=1,2,\cdots,r)$$

其中$d_k(\lambda)(k=1,2,\cdots,r)$是$A(\lambda)$ 的不变因子. 于是有

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda), d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)},\cdots, d_r(\lambda)=\frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}.$$

例：求例1.6中$A(\lambda)$的行列式因子.

因为$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda, d_3(\lambda)=\lambda^3+\lambda$

故 $D_1(\lambda)=d_1(\lambda)=1, D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)=\lambda,$

$D_3(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)d_3(\lambda)=\lambda(\lambda^3+\lambda)$

二　不变因子　初等因子　行列式因子

例1：$A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ 求 $(\lambda I-A)$ 的（1）行列式因子；

（2）不变因子；（3）初等因子；

解：（1）九元素互异 $\therefore D_1(\lambda)=1$

$$\because (\lambda I-A)=\begin{bmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{bmatrix}$$

又 $\because \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&0\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)$

$\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&\lambda-3\\-1&0\end{vmatrix}=\lambda-3$　互质

$\therefore D_2(\lambda)=1 \quad D_3(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

故行列式因子为

$$D_1(\lambda)=1 \quad D_2(\lambda)=1 \quad D_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

二　不变因子　初等因子　行列式因子

例1：$A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ 求 $(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{bmatrix}$ 因子；

（2）不变因子；（3）初等因子；

解：（2）不变因子

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1$$

$$d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=1$$

$$d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

（3）初等因子

$(\lambda-2)$,

$(\lambda-1)^2$

三　重要结论

定理二: $(\lambda I-A)$ 与 $(\lambda I-B)$ 等价的充要条件是有相同的行列式因子或不变因子。

定理三: $(\lambda I-A)$ 与 $(\lambda I-B)$ 等价的充要条件是它们有相同的初等因子，且它们的秩相等。

问题：若矩阵 $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ 问A能否与B相似？

考虑行列式因子情况……（链接PPT16）

由于行列式因子相同所以两个矩阵A，B相似

$$B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

解：因为 $\lambda I-B=\begin{bmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-1&0\\0&-1&\lambda-1\end{bmatrix}$

其行列式因子为

$D_1(\lambda)=1; D_2(\lambda)=1; D_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

与（$\lambda I-A$）行列式因子相同，由定理二得

$\therefore A\sim B$

三　重要结论

想一想：

$$A=\begin{bmatrix}a&0&\cdots&0\\1&a&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&1&a\end{bmatrix}_{n*n} \qquad B=\begin{bmatrix}a&1&\cdots&0\\0&a&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\0&\cdots&0&a\end{bmatrix}_{n*n}$$

A、B是否相似？

三　重要结论

定理四：若 $\lambda I-A$ 的初等因子为 $(\lambda-a)^n$

$$\Rightarrow A\sim J=\begin{bmatrix}a&1&&0\\0&a&\ddots&\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\0&\cdots&0&a\end{bmatrix}_{n*n}$$

$=(\lambda-a)^n$

证明思路：

由于（$\lambda I-J$）的初等因子（$\lambda I-A$）的相同

$$\det(\lambda I-J)=\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&&0\\0&\lambda-a&\ddots&\\\vdots&\ddots&\ddots&-1\\0&\cdots&0&\lambda-a\end{vmatrix}_{n*n}$$

由补充定理三便得结论

三　重要结论

定理五：若 $\lambda I - A$ 的初等因子为

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$$

$$\Rightarrow A \sim J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_S \end{bmatrix}_{n*n}$$

其中：$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i*n_i}$$

问题与思考

以下三个矩阵是否相似？

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},C=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

课堂小结

一、两个方阵相似的充要条件

二、 不变因子、行列式因子、初等因子

三、重要结论（四个定理）