第二章：范数理论

§2. 1　　向量范数

§2. 2　　矩阵范数

§2. 3　　范数应用举例

复习：向量的范数

1. 向量范数概念与性质

①. 定义 、性质、重要例子 $\|\vec{x}\|_1$ $\|\vec{x}\|_2$ $\|\vec{x}\|_\infty$ $\|\vec{x}\|_p$

② 由已知范数构造范数 $\|\cdot\|_a$ 是向量范数 $A \in C_n^{n\times n}$

$\Rightarrow \|\vec{x}\|_b = \|A\vec{x}\|_a$ 也是向量范数

2. $\|\vec{x}\|_b$ **是连续的，任两个是等价的** $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \|\vec{x}\| = \|\vec{x}_0\|$

3. 向量序列收敛及其充要条件

$$\vec{x}^{(k)} \to \vec{x} \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} \|x^{(k)} - \vec{x}\| = 0$$

矩阵范数

- 定义2. 4：设$\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$上一个泛函，满足

(1)正定性　$\forall A \in C^{n\times n}$, $\|A\| \ge 0$且$\|A\|=0 \Leftrightarrow A=0$;

(2)齐次性　$\forall \lambda \in C,\ A \in C^{n\times n}$, $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$;

(3)三角不等式　$\forall A, B \in C^{n\times n}$, $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$;

(4)乘积不等式　$\forall A, B \in C^{n\times n}$, $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

则称$\|\cdot\|$是$C^{n\times n}$上一个矩阵范数.

矩阵范数

- **注：由于矩阵范数的前三个条件同向量范数，故向量范数性质可推广到矩阵范数**

①三角不等式的推广

$$\|-A\| = \|A\|; \|A\| - \|B\| \le \|A+B\|$$

②方阵范数是连续的

$$\lim_{A\to A_0} \|A\| = \|A_0\|$$

③任两个方阵范数是等价的

$$K_1\|A\|_b \le \|A\|_a \le K_2\|A\|_b$$

常用的矩阵范数

设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$.

$$\|A\|_{m_1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \qquad m_1\text{-范数}$$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{tr(A^H A)} \qquad F\text{-范数}$$

$$\|A\|_{m_\infty} = n \cdot \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|. \qquad m_\infty\text{-范数}$$

例2. 6. $A = (a_{ij})_{n\times n} \in C^{n\times n}$ 则 $\|A\|_{m_1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

是 $C^{n\times n}$ 上一种矩阵范数，称矩阵的 m_1 范数

证明：

由于 $\|A\|_{m_1}$ 构造类似于 $\|\vec{x}\|_1$ 范数，故方阵范数前三条满足

以下仅证条件4） 设 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 则 $\|AB\|_{m_1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}|$

而 $|c_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}\right| \le \sum_{k=1}^n |a_{ik}||b_{kj}|$

$$\le \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n |b_{kj}|\right)$$

故 $\|AB\|_{m_1} \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n |b_{kj}|\right)\right]$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{kj}|\right) = \|A\|_{m_1} \cdot \|B\|_{m_1}$$

例2.7. $A=(a_{ij})_{n\times n}\in C^{n\times n}$ 则 $\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}=\left[tr\left(A^H A\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

是 $C^{n\times n}$ 上的一种矩阵范数，称F范数

证明: 由于$\|A\|_F$构造类似于$\|\vec{x}\|_2$范数，

故仅需证条件4）相容性

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)$$

（由Cauchy–Schwarz不等式）

$$\therefore\|AB\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)\right]}$$

$$=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)}=\|A\|_F\cdot\|B\|_F$$

例2.8. $A=(a_{ij})_{n\times n}\in C^{n\times n}$ 则 $\|A\|_{m_\infty}=n\max_{i,j}|a_{ij}|$

是 $C^{n\times n}$ 上矩阵范数，称为矩阵的 m_∞ 范数

证明: 容易验证 $\|A\|_{m_\infty}$ 满足方阵范数的前三个条件

以下仅证条件4） $\|AB\|_{m_\infty}=n\max_{i,j}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|$

$$\le n\max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|$$

$$\le n\max_{i,j}\left[\max_{k}|a_{ik}|\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|\right]$$

$$=n\max_{i,k}|a_{ik}|\cdot\max_{j}\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|$$

$$\le n\max_{i,k}|a_{ik}|\cdot\max_{k,j}|b_{kj}|\cdot n$$

$$=\|A\|_{m_\infty}\cdot\|B\|_{m_\infty}$$

F范数的酉不变性

- **定理2.7:**
  设$A\in C^{n\times n}$，则对任意n阶酉矩阵U和V，恒有
  $$\|UA\|_F=\|AV\|_F=\|UAV\|_F=\|A\|_F.$$

- **证明:**
  $$\|AV\|_F^2=tr(V^HA^HAV)=tr(A^HAVV^H)=tr(A^HA)=\|A\|_F^2$$

矩阵范数与向量范数相容

- **定义2.5:**
  设$\|\cdot\|_m$是$C^{n\times n}$上矩阵范数，$\|\cdot\|_v$是 C^n上向量范数，如果 $\forall A\in C^{n\times n}$, $x\in C^n$,
  $$\|Ax\|_v\le\|A\|_m\cdot\|x\|_v,$$
  则称矩阵范数 $\|\cdot\|_m$与向量范数 $\|\cdot\|_v$相容.
- Remarks
  (1) 矩阵范数$\|\cdot\|_{m_1}$,$\|\cdot\|_F$ 分别与向量范数$\|\cdot\|_1$,$\|\cdot\|_2$ 相容;
  (2) 矩阵范数 $\|\cdot\|_{m_\infty}$与向量范数$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$，$\|\cdot\|_\infty$相容.

矩阵范数与向量范数相容

（1）证明矩阵范数 $\|\cdot\|_{m_1}$ 与向量范数 $\|\cdot\|_1$ 相容.

设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$, $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T\in C^n$. 则

$$\|Ax\|_1=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)=\|A\|_{m_1}\cdot\|x\|_1.$$

矩阵范数与向量范数相容

（2）证明矩阵F范数与向量2范数相容

$$\|A\vec{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\right|^2}$$

$$\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||x_k|\right)^2}$$

由Cauchy - Schwarz不等式

$$\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}=\|A\|_F\cdot\|\vec{x}\|_2$$

矩阵范数与向量范数相容

例2.10 矩阵 m_∞ 范数分别与向量1，2，∞范数相容

$$\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(n\cdot n\cdot \max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|A\|_{m_\infty}$$

由矩阵F范数与向量2范数相容知，矩阵m_∞范数也与向量2范数相容

矩阵范数与向量范数相容

例2.10 矩阵 m_∞ 范数分别与向量1，2，∞范数相容

证明：m_∞ 矩阵范数与向量1范数相容

$$\|A\vec{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\right|\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||x_k|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left(\max_{k}|a_{ik}|\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)$$

$$\le\max_{k,i}|a_{ik}|\cdot n\sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

$$=\|A\|_{m_\infty}\cdot\|\vec{x}\|_1$$

矩阵范数与向量范数相容

例2.10 矩阵 m_∞ 范数分别与向量1，2，∞范数相容

证明：m_∞ 与∞向量范数相容性

$$\|A\vec{x}\|_\infty=\max_{i}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\right|\le\max_{i}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||x_k|$$

$$\le\max_{i}\left(\max_{k}|a_{ik}|\right)\max_{k}|x_k|\cdot n$$

$$=n\max_{i,k}|a_{ik}|\cdot\max_{k}|x_k|$$

$$=\|A\|_{m_\infty}\cdot\|\vec{x}\|_\infty$$

矩阵范数与向量范数相容

- 定理 2.8：设 $\|\cdot\|_m$ 是 $C^{n\times n}$ 上的一种矩阵范数，则在 C^n上必存在与它相容的向量范数.

证明：取 $\vec{0}\ne\vec{\alpha}\in C^n,\forall\vec{x}\in C^n$

则 $\|\vec{x}\|_v=\|\vec{x}\vec{\alpha}^H\|_m$ 是向量范数，且与 $\|\cdot\|_m$相容，

1）非负性：$\vec{x}\ne\vec{0}$ 时，则矩阵 $\vec{x}\cdot\vec{\alpha}^H\ne O$

由矩阵范数非负性知 $\|\vec{x}\vec{\alpha}^H\|_m\ne 0$

$\vec{x}=\vec{0}$ 时 $\vec{x}\cdot\vec{\alpha}^H=O$ $\quad\|\vec{x}\cdot\vec{\alpha}^H\|_m=0$

2）齐次性：$\lambda\in C$

$$\|\lambda\vec{x}\|_v=\|(\lambda\vec{x})\vec{\alpha}^H\|_m=|\lambda|\|\vec{x}\vec{\alpha}^H\|_m=|\lambda|\|\vec{x}\|_v$$

矩阵范数与向量范数相容

- 定理 2.8：设 $\|\cdot\|_m$ 是 $C^{n\times n}$ 上的一种矩阵范数，则在 C^n上必存在与它相容的向量范数.

3）三角不等式：

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|_v=\|(\vec{x}+\vec{y})\vec{\alpha}^H\|_m=\|\vec{x}\vec{\alpha}^H+\vec{y}\vec{\alpha}^H\|_m$$

$$\le\|\vec{x}\vec{\alpha}^H\|_m+\|\vec{y}\vec{\alpha}^H\|_m=\|\vec{x}\|_v+\|\vec{y}\|_v$$

4）相容性：$A=(a_{ij})_{n\times n}\in C^{n\times n}$

$$\|A\vec{x}\|_v=\|(A\vec{x})\vec{\alpha}^H\|_m=\|A\cdot\vec{x}\vec{\alpha}^H\|_m\le\|A\|_m\|\vec{x}\vec{\alpha}^H\|_m=\|A\|_m\|\vec{x}\|_v$$

从属范数

- 定理2.9：设$\|\cdot\|_v$是C^n 上一个向量范数．定义

$$\|A\|_m=\sup_{\|x\|_v=1}\|Ax\|_v=\sup_{x\ne0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v},\ A\in\mathrm{C}^{n\times n}.$$

则$\|\cdot\|_m$是$\mathrm{C}^{n\times n}$上的矩阵范数，称为由向量范数$\|\cdot\|_v$所诱导的矩阵范数，

且矩阵范数$\|\cdot\|_m$与向量范数$\|\cdot\|_v$相容

注：1. 若$\|\ \|$ 是从属范数，则 $\|I_n\|=1$

注：2. 从属范数的一种表达式 $\|A\|=\max_{\|\vec{x}\|_v=1}\|A\vec{x}\|_v$

从属范数

证明：0）与向量范数的相容性

$$\|A\| = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|_V}{\|\vec{x}\|_V} \ge \frac{\|A\vec{x}\|_V}{\|\vec{x}\|_V}$$

$$\therefore \forall \vec{x} \neq \vec{0}, \text{都有} \|A\vec{x}\|_V \le \|A\|\|\vec{x}\|_V$$

1）非负性：

$$A=0\text{时}, \|o\| = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|o\vec{x}\|_V}{\|\vec{x}\|_V} = 0$$

$$A\neq 0\text{时，存在}\vec{x_0}\in C^n\text{。使}A\vec{x_0}\neq\vec{0}$$

$$\text{从而}\|A\| \ge \frac{\|A\vec{x_0}\|_V}{\|\vec{x_0}\|_V} > 0$$

从属范数

2）齐次性： $\lambda\in C$

$$\|\lambda A\| = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|\lambda A\vec{x}\|_V}{\|\vec{x}\|_V} = |\lambda| \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|_V}{\|\vec{x}\|_V} = |\lambda|\|A\|$$

3)三角不等式：

$$\|A+B\| = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|(A+B)\vec{x}\|_V}{\|\vec{x}\|_V} \le \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|_V}{\|\vec{x}\|_V} + \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|B\vec{x}\|_V}{\|\vec{x}\|_V}$$

$$= \|A\| + \|B\|$$

从属范数

4) 相容性：

$$\|AB\| = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|AB\vec{x}\|_V}{\|\vec{x}\|_V} \le \|A\| \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|B\vec{x}\|_V}{\|\vec{x}\|_V} = \|A\|\|B\|$$

$\therefore \|A\| = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|_V}{\|\vec{x}\|_V}$ 是与 $\|\cdot\|_V$ 相容的矩阵范数。

从属范数的计算公式

定理2. 10：设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,将向量范数$\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$和$\|\cdot\|_\infty$诱导的矩阵范数分别记为$\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$和$\|\cdot\|_\infty$，则有

(1) $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}|$; ——最大列模和

(2) $\|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{A^H A\text{的最大特征值}}$; ——$A$的最大奇异值

(3) $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. ——最大行模和

分别称$\|A\|_1,\|A\|_2$和$\|A\|_\infty$为矩阵的1-范数，2-范数和∞-范数，或分别称为矩阵的列模和范数，谱范数和行模和范数.

从属范数的计算公式

定理2. 10：(1) $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

证明：1）设 $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)^T \in C^n$. $\vec{x}\neq\vec{0}$

$$\|A\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \le \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j|\right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(|x_j| \cdot \sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right) \le \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \cdot \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \cdot \|\vec{x}\|_1$$

即 $\frac{\|A\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_1} \le \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ 故 $\max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_1} \le \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

从属范数的计算公式

定理2. 10：(1) $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

证明：1）已证 $\|A\|_1 \le \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

设 $\max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$, 令 $\vec{x_0} = (0,0,\cdots,1,0,\cdots,0)^T$,

A的第 k 列 第 k 个

则 $\frac{\|A\vec{x_0}\|_1}{\|\vec{x_0}\|_1} = \|A\vec{x_0}\|_1 = \|\vec{\alpha_k}\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$

$\therefore \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_1} \ge \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ $\therefore \max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_1} = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

从属范数的计算公式

定理2.10：(2) $\|A\|_2=\sigma_1=\sqrt{A^HA\text{的最大特征值}}$

证明：2）已知 A^HA 是半正定的，其特征值非负，并设 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\cdots\ge\lambda_n\ge0$

设酉矩阵U，使 $U^HA^HAU=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_n)$

$$U=(\vec{u_1},\vec{u_2},\cdots\cdots,\vec{u_n})^T$$

$\vec{u_1},\vec{u_2},\cdots\cdots,\vec{u_n}$ 可视为 C^n 中标准正交基，

$$\forall\vec{x}\in C^n,\ \vec{x}=k_1\vec{u_1}+\cdots\cdots+k_n\vec{u_n}=\sum_{j=1}^n k_j\vec{u_j}$$

$$\therefore\|\vec{x}\|_2=\sqrt{\vec{x}^H\vec{x}}=\sqrt{\sum_{j=1}^n|k_j|^2}$$

从属范数的计算公式

定理2.10：(2) $\|A\|_2=\sigma_1=\sqrt{A^HA\text{的最大特征值}}$

证明： $A^HA\vec{x}=\sum_{j=1}^n k_j\cdot A^HA\vec{u_j}=\sum_{j=1}^n k_j\lambda_j\vec{u_j}$

其中 $A^HA\vec{u_j}=\lambda_j\vec{u_j}(j=1,2,\cdots,n)$

$$\|A\vec{x}\|_2=\sqrt{\vec{x}^HA^HA\vec{x}}=\sqrt{(A^HA\vec{x},\vec{x})}$$

$$=\sqrt{(\sum_{j=1}^n k_j\lambda_j\vec{u_j},\sum_{j=1}^n k_j\vec{u_j})}=\sqrt{\sum_{j=1}^n\lambda_j|k_j|^2}\le\sqrt{\lambda_1}\|\vec{x}\|_2$$

即 $\frac{\|A\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2}\le\sqrt{\lambda_1}$ $\quad\therefore\max_{\vec{x}\ne\vec{0}}\frac{\|A\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2}\le\sqrt{\lambda_1}$

从属范数的计算公式

定理2.10：(2) $\|A\|_2=\sigma_1=\sqrt{A^HA\text{的最大特征值}}$

证明：2) 已证 $\|A\|_2\le\sigma_1$

取$\vec{x_0}=\vec{u_1}$，则$\vec{u_1}\ne\vec{0}$

$$\frac{\|A\vec{x_0}\|_2}{\|\vec{x_0}\|_2}=\|A\vec{u_1}\|_2=\sqrt{\vec{u_1}^HA^HA\vec{u_1}}=\sqrt{\vec{u_1}^H\lambda_1\vec{u_1}}=\sqrt{\lambda_1}$$

$$\max_{\vec{x}\ne\vec{0}}\frac{\|A\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2}\ge\sqrt{\lambda_1},$$

故有 $\|A\|_2=\max_{\vec{x}\ne\vec{0}}\frac{\|A\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2}=\sqrt{\lambda_1}$

从属范数的计算公式

定理2.10：(3) $\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$

证明：3）略

例如下列矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}i&0&1+i\\0&-i&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

则 $\|A\|_\infty=4$

$\|A\|_1=2+\sqrt{2}$

注：记 $\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^HA)}$

矩阵2范数(F范数)的性质

定理 2.11：设 $A\in C^{n\times n}$, U 和 V 为n阶酉矩阵，则

(1) $\|A^H\|_2=\|A\|_2$

(2) $\|UA\|_2=\|AV\|_2=\|UAV\|_2=\|A\|_2$ （酉不变性）

(3) 若 A 是正规矩阵，且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值，则 $\|A\|_2=\max_k|\lambda_k|$.

$$A=U\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}U^H,\ A^HA=U\begin{pmatrix}|\lambda_1|^2&&\\&\ddots&\\&&|\lambda_n|^2\end{pmatrix}U^H$$

长方阵的范数

前面方阵范数的定义稍作修改可推广到$m\times n$矩阵的情形.

- 矩阵范数的相容性修改为：$\forall A\in C^{m\times n}$, $B\in C^{n\times l}$
  $\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$;（同类范数，如F范数）

- 矩阵范数与向量范数的相容性修改为：$\forall A\in C^{m\times n}$, $x\in C^n$，有 $\|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|$;

长方阵的范数

- 从属范数定义修改为

$$\|A\|=\sup_{\|x\|_v=1}\|Ax\|_v=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v},\quad A\in C^{m\times n}$$

其中$\|Ax\|_v$是C^m上的范数，$\|x\|_v$是C^n上的范数.

$\forall A\in C^{m\times n}$，常用的矩阵范数有：

(1) $\|A\|_{m_1}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，　m_1范数；

(2) $\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{tr\left(A^HA\right)}$，　F范数；

长方阵的范数

(3) $\|A\|_M=\max\{m,n\}\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|$，　M范数或最大范数；

(4) $\|A\|_G=\sqrt{mn}\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|$，　G范数或几何平均范数；

(5) $\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$，　1范数或列和范数；

(6) $\|A\|_2=\sqrt{A^HA\text{的最大特征值}}$，　2范数或谱范数；

(7) $\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，　∞范数或行和范数.

矩阵范数性质小结

- F范数，2范数：酉不变
- m_1范数与向量1范数相容
  F范数，G范数与向量2范数相容
  M范数与向量1, 2, ∞范数相容
- 矩阵1, 2, ∞范数分别由向量1, 2, ∞范数导出，从而相容
- $C^{m\times n}$上所有矩阵范数等价

思考题

1. 证明：$A\in C^{n\times n}$，$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F\le\|A\|_2\le\|A\|_F$

2. 证明：$A\in C^{m\times n}$，$\frac{1}{n}\|A\|_\infty\le\|A\|_1\le m\|A\|_\infty$

3. 证明：$A\in C^{m\times n}$，$\|A\|_*=\sum_{i=1}^{r}\sigma_i$ 是矩阵范数，其中 r为矩阵A的秩，$\sigma_1,\dots,\sigma_r$为A的非零奇异值.

提示：利用Hermite矩阵的特征值表示方法（第5章）

Assignment

- 徐仲、张凯院等.《矩阵论简明教程》，第三版. 科学出版社出版.
  - 习题二：4，5，6，9，10