第一章：矩阵的相似变换

复习：Jordan标准形

- 矩阵A和B相似的充分必要条件：
  - 特征矩阵$\lambda I - A$和$\lambda I - B$等价
  - A和B有相同的行列式因子、不变因子或初等因子
- 初等因子$(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$对应 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i \times r_i}$
- 求Jordan标准型（①②③）和相似变换矩阵
- 求Jordan标准型的幂

第一章：矩阵的相似变换

Hamilton-Cayley 定理

- 定理1.13（Hamilton-Cayley）

设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$,则$\varphi(A) = O$

问题：以下方法证明Hamilton-Cayley定理是否正确？

$\because \varphi(\lambda)$ =det(λI-A)

$\therefore \varphi(A)$ $\cancel{=}$det(AI-A)=0

事实上：等号两边不对等

Hamilton-Cayley 定理

- 定理1.13（Hamilton-Cayley）

设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$,则$\varphi(A) = O$

- 证明：

设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$是$A$的$s$个不同的特征值,其代数重数分别为$m_1, m_2, \cdots, m_s$,则

则$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{m_s}$

Hamilton-Cayley 定理的证明

由Jordan 分解定理得

$$A = PJP^{-1} = P\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\text{其中} J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{m_i \times m_i}$$

为什么J_i的阶数是m_i？

分块对角矩阵的特征多项式等于每个分块特征多项式的乘积

Hamilton-Cayley 定理的证明

于是$(A-\lambda_i I)^{m_i}=P(J-\lambda_i I)^{m_i}P^{-1}=$

$$P\begin{pmatrix}(J_1-\lambda_i I)^{m_i} & & & \\ & (J_2-\lambda_i I)^{m_i} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (J_s-\lambda_i I)^{m_i}\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$(J_i-\lambda_i I)^{m_i}=\begin{pmatrix}0 & * & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ & & & 0\end{pmatrix}^{m_i}=O,i=1,2,\cdots,s.$$

Hamilton-Cayley 定理的证明

所以，

$$\varphi(A)=(A-\lambda_1 I)^{m_1}(A-\lambda_2 I)^{m_2}\cdots(A-\lambda_s I)^{m_s}$$

$$=P\begin{pmatrix}O & & & \\ & (J_2-\lambda_1 I)^{m_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (J_s-\lambda_1 I)^{m_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(J_1-\lambda_2 I)^{m_2} & & & \\ & O & & \\ & & \ddots & \\ & & & (J_s-\lambda_2 I)^{m_2}\end{pmatrix}$$

$$\cdots\begin{pmatrix}(J_1-\lambda_s I)^{m_s} & & & \\ & (J_2-\lambda_s I)^{m_s} & & \\ & & \ddots & \\ & & & O\end{pmatrix}P^{-1}=O$$

Hamilton-Cayley定理的应用

- 简化矩阵运算
- 例1. 12

已知矩阵$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，试计算

(1) $A^7-A^5-19A^4+28A^3+6A-4I$;

(2) A^{-1}

- 解： 可求得

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2$$

Hamilton-Cayley定理的应用

(1)令$g(\lambda)=\lambda^7-\lambda^5-19\lambda^4+28\lambda^3+6\lambda-4$

用$\varphi(\lambda)$除$g(\lambda)$，得

$$g(\lambda)=(\lambda^4+4\lambda^3+10\lambda^2+3\lambda-2)\varphi(\lambda)-3\lambda^2+22\lambda-8$$

由Hamilton-Cayley定理知$\varphi(A)=O$, 于是

$$g(A)=-3A^2+22A-8=\begin{pmatrix}-21 & 16 & 0\\ -64 & 43 & 0\\ 19 & -3 & 24\end{pmatrix}$$

Hamilton-Cayley定理的应用

(2)由$\varphi(A)=A^3-4A^2+5A-2I=0$,得

$$A\left[\frac{1}{2}(A^2-4A+5I)\right]=I,$$

故，

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(A^2-4A+5I)=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Hamilton-Cayley定理的应用

- 可逆矩阵逆的多项式表示

设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$, $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$

由Hamilton-Cayley定理知$\varphi(A)$=0, 于是

$$A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nI=0$$

故，$A(A^{n-1}+a_1A^{n-2}+\cdots+a_{n-1}I)=-a_nI$

若$\det A\neq 0$,即A可逆，则

$$A^{-1}=-\frac{1}{a_n}(A^{n-1}+a_1A^{n-2}+\cdots+a_{n-1}I)$$

零化多项式

- **定义1.10：**

设$A\in \mathbf{C}^{n\times n}$，$f(\lambda)$是多项式，如果$f(A)=0$，则称$f(\lambda)$为$A$的零化多项式。

- Remarks

(1)由Hamilton-Cayley定理知：A的特征多项式就是A的零化多项式。

(2) A的特征多项式$\varphi(\lambda)$任意乘一个多项式仍然是A的零化多项式。

零化多项式

- **定义1.10：**

设$A\in \mathbf{C}^{n\times n}$，$f(\lambda)$是多项式，如果$f(A)=0$，则称$f(\lambda)$为$A$的零化多项式。

- Remarks

（3）零化多项式不唯一

（4）任一零化多项式次数大于等于 1

最小多项式

- **定义1.11：**

设$A\in \mathbf{C}^{n\times n}$，在$A$的零化多项式中，次数最低的首一多项式称为$A$的最小多项式，记为$m_A(\lambda)$.

- 零化多项式与最小多项式的关系

定理1.14：

设$A\in \mathbf{C}^{n\times n}$，则$A$的最小多项式$m_A(\lambda)$整除$A$的任一零化多项式，且最小多项式是唯一的.

零化多项式与最小多项式的关系

- **证明：**

设$f(\lambda)$是A的任一零化多项式，假设$m_A(\lambda)$不能整除$f(\lambda)$，则有

$$f(\lambda)=q(\lambda)m_A(\lambda)+r(\lambda)$$

其中$r(\lambda)$的次数低于$m_A(\lambda)$的次数，于是由$f(A)=q(A)m_A(A)+r(A)$知$r(A)=0$，这与$m_A(\lambda)$是A的最小多项式矛盾。

零化多项式与最小多项式的关系

- **证明：**

再证唯一性：若A有一不同最小多项式$N_A(\lambda)$，则令

$$g(\lambda)=m_A(\lambda)-N_A(\lambda)$$

由于 $m_A(\lambda)$ 与 $N_A(\lambda)$ 是次数相等的首一多项式

故 $\quad \deg g(\lambda)<\deg m_A(\lambda)$或$\deg N_A(\lambda)$

$$g(A)=m_A(A)-N_A(A)=O$$

与最小多项式假设矛盾

零化多项式与最小多项式的关系

- **定理1.14：**

设$A\in \mathbf{C}^{n\times n}$，则$A$的最小多项式$m_A(\lambda)$整除$A$的任一零化多项式，且最小多项式是唯一的.

注意：矩阵A的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 含有因式 $(\lambda-\lambda_i)$，其中 λ_i 是A的特征值

事实上，由于 $m_A(A)=O$

由定理1.2知，$m_A(\lambda_i)=0$

所以知多项式 $m_A(\lambda)$ 中有因式 $(\lambda-\lambda_i)$

最小多项式

定理1.16：相似矩阵具有相同的特征值，相同的特征多项式和相同的最小多项式

证明：设方阵A、B相似，即 $A\sim B$，$P^{-1}AP=B$

$\therefore\quad m_A(B)=m_A\left(P^{-1}AP\right)=P^{-1}m_A(A)P=O$

即 $m_A(\lambda)$ 是B的零化多项式. $\therefore m_B(\lambda)\,|\,m_A(\lambda)$

同理有$m_A(\lambda)\,|\,m_B(\lambda)$

$\therefore m_A(\lambda)=m_B(\lambda)$

即矩阵A、B有相同的最小多项式.

最小多项式

定理1.17：

设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$是$A$的所有互不相同的特征值，则

$$m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

其中m_i是A的Jordan标准形J中含λ_i的Jordan块的最高阶数.

证明：
$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1\\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{r_i\times r_i}\qquad \text{则 } m_{J_i}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$$

（Jordan块矩阵的最小多项式）

由定理1.16，$m_A(\lambda)=m_J(\lambda)$，只需求$m_J(\lambda)$

分块矩阵最小多项式是每个分块的最小公倍式

最小多项式

定理1.15： 设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)$，$D_{n-1}(\lambda)$是$\lambda I_n-A$的$n-1$阶行列式因子，

则
$$m_A(\lambda)=\frac{\varphi(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}$$

注：$m_A(\lambda)=\dfrac{\varphi(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}=d_n(\lambda)$是$(\lambda I-A)$的第$n$个不变因子

最小多项式

定理1.17：

设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$是$A$的所有互不相同的特征值，则

$$m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

其中m_i是A的Jordan标准形J中含λ_i的Jordan块的最高阶数.

注:有关最小多项式补充结论

方阵A可对角化$\Leftrightarrow m_A(\lambda)$无重根

证明:$(\Longrightarrow)$设 $A\sim diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)=\Lambda$

则 $m_A(\lambda)=m_\Lambda(\lambda)=d_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_{n_1})\cdots(\lambda-\lambda_{n_s})$ λ_{n_i}互异

最小多项式

定理1.17：

设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$是$A$的所有互不相同的特征值，则

$$m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

其中m_i是A的Jordan标准形J中含λ_i的Jordan块的最高阶数.

注:有关最小多项式补充结论

方阵A可对角化$\Leftrightarrow m_A(\lambda)$无重根

证明:$(\Longleftarrow)$若 $m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_s)$ λ_i互异

由于 $d_{n_A}(\lambda)=m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_s)$

从而A的初等因子全为一次式，故A可对角化.

最小多项式

例1.13 求矩阵$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$的最小多项式.

解： $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3$

可求得A的Jordan标准形为

$$J=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & 1\\ & & 2\end{pmatrix}$$

故由定理1.17知 $m_A(\lambda)=(\lambda-2)^2$

思考题

证明：若方阵A满足$A^2=A$，则A可相似对角化.

证明：令$f(\lambda)=\lambda^2-\lambda$ 由$f(A)=O$

$f(\lambda)$ 是A的零化多项式.

由定理1.14 $m_A(\lambda)|f(\lambda)$

$f(\lambda)$ 无重根

故 $m_A(\lambda)$ 也无重根.

故A可相似对角化.

第一章：矩阵的相似变换

向量的内积

- 《线性代数》VS《矩阵论》中n维向量内积
  - 在实数域中定义
  - 在复数域中定义

- **定义1.12：**

设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in\mathbf{C}^n$，令

$$(x,y)=\sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i=y^H x$$

称(x,y)为x与y的内积.

向量内积的性质

- **定理1.18**

设$x,y,z\in\mathbf{C}^n,\lambda\in\mathbf{C}$，则$(\cdot,\ \cdot)$满足

(1)酉对称性：$(x,y)=\overline{(y,x)}$;

线性性：

(2)$(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

(3)$(\lambda x,y)=\lambda(x,y),(x,\lambda y)=\bar{\lambda}(x,y)$

(4)正定性：$(x,x)\ge 0$，且当$x=0$时才有$(x,x)=0$.

(5)$(x,y)(y,x)\le(x,x)(y,y)$($Cauchy-Schwarz$不等式)

向量内积的性质

- **证明（5）：**

设$x,y\in\mathbf{C}^n$，$\lambda\in\mathbf{C}$，则$(x+\lambda y,x+\lambda y)\ge 0$,

即$(x,x)+\lambda(y,x)+\bar{\lambda}(x,y)+|\lambda|^2(y,y)\ge 0$

取$\lambda=-\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$，则$(x,x)-\dfrac{(x,y)}{(y,y)}(y,x)\ge 0$

即

$(x,y)(y,x)\le(x,x)(y,y)$

向量的长度

- **定义1.14：** 设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$，令

$$|x|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{\sum_{i=1}^n|x_i|^2}=\sqrt{x^H x}$$，称$|x|$为x的长度.

注：有了向量长度的概念，Cauchy-Schwarz不等式可以写为

$$|(\vec{x},\vec{y})|\le\|\vec{x}\|_2\cdot\|\vec{y}\|_2$$

向量的长度

- **定理1.19（向量长度的性质）：**

设$x,y\in\mathbf{C}^n,\lambda\in\mathbf{C}$,则

(1)非负性：当$x\neq 0$时,$\|x\|>0$,当$x=0$时,$\|x\|=0$;

(2)齐次性：$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$;

(3)三角不等式性:$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

证明三角不等式

证明(3)：
$$\begin{aligned}\|\vec{x}+\vec{y}\|^2{}_2&=(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})\\&=(\vec{x},\vec{x})+(\vec{x},\vec{y})+(\vec{y},\vec{x})+(\vec{y},\vec{y})\\&=(\vec{x},\vec{x})+(\vec{x},\vec{y})+\overline{(\vec{x},\vec{y})}+(\vec{y},\vec{y})\\&=\|\vec{x}\|^2{}_2+2\operatorname{Re}(\vec{x},\vec{y})+\|\vec{y}\|^2{}_2\\&\le\|\vec{x}\|^2{}_2+2\underline{|(\vec{x},\vec{y})|}+\|\vec{y}\|^2{}_2\qquad |(\vec{x},\vec{y})|\le\|\vec{x}\|_2\cdot\|\vec{y}\|_2\\&\le\|\vec{x}\|^2{}_2+2\|\vec{x}\|_2\|\vec{y}\|_2+\|\vec{y}\|^2{}_2=(\|\vec{x}\|_2+\|\vec{y}\|_2)^2\end{aligned}$$
$$\|\vec{x}+\vec{y}\|_2\le\|\vec{x}\|_2+\|\vec{y}\|_2$$

正交向量的性质

- **定理1.20：**
  $\mathbf{C}^n$中两两正交的非零向量组线性无关.
- **证明：**

设$x_1,x_2,\cdots,x_s\in\mathbf{C}^n$是两两正交的非零向量组，令

$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_sx_s=0$,则

$$0=\left(\sum_{i=1}^{s}k_ix_i,x_j\right)=\sum_{i=1}^{s}k_i(x_i,x_j)=k_j(x_j,x_j),j=1,2,\cdots,s$$

而$(x_j,x_j)>0$,因此$k_j=0,j=1,2,\cdots,s$,

故$x_1,x_2,\cdots,x_s$线性无关.

Schmidt正交化

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是$\mathbf{C}^n$空间中的一组基，令

$y_1=x_1$

$y_2=x_2+\lambda_{21}y_1$

$y_3=x_3+\lambda_{31}y_1+\lambda_{32}y_2$

…

$y_n=x_n+\lambda_{n1}y_1+\lambda_{n2}y_2+\cdots+\lambda_{n(n-1)}y_{n-1}$

由$0=(y_2,y_1)=(x_2+\lambda_{21}y_1,y_1)=(x_2,y_1)+\lambda_{21}(y_1,y_1)$,得

$$\lambda_{21}=-\frac{(x_2,y_1)}{(y_1,y_1)}$$

Schmidt正交化

再由

$$0=(y_3,y_1)=(x_3+\lambda_{31}y_1+\lambda_{32}y_2,y_1)=(x_3,y_1)+\lambda_{31}(y_1,y_1)$$
$$0=(y_3,y_2)=(x_3+\lambda_{31}y_1+\lambda_{32}y_2,y_2)=(x_3,y_2)+\lambda_{32}(y_2,y_2)$$

得

$$\lambda_{31}=-\frac{(x_3,y_1)}{(y_1,y_1)},\lambda_{32}=-\frac{(x_3,y_2)}{(y_2,y_2)}$$

类似可得

$$\lambda_{n1}=-\frac{(x_n,y_1)}{(y_1,y_1)},\lambda_{n2}=-\frac{(x_n,y_2)}{(y_2,y_2)},\cdots,\lambda_{n(n-1)}=-\frac{(x_n,y_{n-1})}{(y_{n-1},y_{n-1})}$$

Schmidt正交化

故，$y_1=x_1$

$$y_2=x_2-\frac{(x_2,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1$$

$$y_3=x_3-\frac{(x_3,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1-\frac{(x_3,y_2)}{(y_2,y_2)}y_2$$

…

$$y_n=x_n-\frac{(x_n,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1-\frac{(x_n,y_2)}{(y_2,y_2)}y_2-\cdots-\frac{(x_n,y_{n-1})}{(y_{n-1},y_{n-1})}y_{n-1}$$

$y_1,y_2,\cdots,y_n$就是$\mathbf{C}^n$空间中的一组正交基，且$y_i\neq 0$.

Schmidt正交化

- **例1.14：**

$$设x_1=\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix},x_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

用Schmidt正交化方法将这组向量正交单位化.

- **解**

$$取y_1=x_1,则(y_1,y_1)=\sum_{i=1}^{3}\xi_i\overline{\xi_i}=1\times1+i\times(-i)+0\times0=2,$$

$$(x_2,y_1)=1\times1+0\times(-i)+i\times0=1$$

Schmidt正交化例子

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix},\quad x_2=\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix},\quad x_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$计算y_2=x_2-\frac{(x_2,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1=\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\-i/2\\i\end{pmatrix}$$

$$同理y_3=x_3-\frac{(x_3,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1-\frac{(x_3,y_2)}{(y_2,y_2)}y_2$$

$$=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{0}{2}\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}-\frac{-i}{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix}1/2\\-i/2\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$$

Schmidt正交化例子

再单位化，得

$$z_1=\frac{y_1}{|y_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix},z_2=\frac{y_2}{|y_2|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-i\\2i\end{pmatrix},z_3=\frac{y_3}{|y_3|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}i\\1\\1\end{pmatrix}$$

z_1,z_2,z_3即为正交单位向量.

酉矩阵

- **定义1.15**

设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$,若$A$满足

$$A^HA=AA^H=I,$$

则称A为酉矩阵.

- Remarks

(1)设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$,则

$$A^HA=AA^H=I\Leftrightarrow A^HA=I\Leftrightarrow AA^H=I\Leftrightarrow A^{-1}=A^H$$

(2)当$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$,酉矩阵就是正交矩阵.

酉矩阵的性质

- **定理1.21：**

设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$是酉矩阵,则

(1)A^T,A^H,A^{-1}仍为酉矩阵;

(2)若$B\in\mathbf{C}^{n\times n}$是酉矩阵,则$AB$也是酉矩阵;

(3)$|\det A|=1$;

(4)A是酉矩阵的充要条件

是$x_1,x_2,\cdots,x_n$是$\mathbf{C}^n$中的一组标准正交基

酉矩阵充要条件的证明

$A=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则

$$I=A^HA=\begin{pmatrix}x_1^H\\x_2^H\\\vdots\\x_n^H\end{pmatrix}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{pmatrix}x_1^Hx_1&x_1^Hx_2&\cdots&x_1^Hx_n\\x_2^Hx_1&x_2^Hx_2&\cdots&x_2^Hx_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_n^Hx_1&x_n^Hx_2&\cdots&x_n^Hx_n\end{pmatrix}$$

可见A是酉矩阵的充要条件是

$$(x_i,x_j)=x_j^Hx_i=\begin{cases}1,i=j\\0,i\neq j\end{cases},即$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$是$\mathbf{C}^n$中的标准正交基.

小结

- Hamilton-Cayley定理
- 零化多项式及最小多项式
- 最小多项式求法

  ①计算 $\det(\lambda I - A) = \varphi(\lambda)$ 用定义

  ②用公式：$m_A(\lambda) = \dfrac{\det(\lambda I - A)}{D_{n-1}(\lambda)}$

  ③初因子组及Jordan标准型

  $m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{m_s}$ λ_i 互不相同
- 向量内积、长度、酉矩阵

思考题

- 若$a_i \in R$，用Cauchy-Schwarz不等式证明

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \le \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}$$

证明：在欧氏空间 R^n 中，取向量

$$\vec{\alpha} = (|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|) \quad \vec{\beta} = (1, 1, \cdots, 1) \quad a_i \in R \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

由 CAUCHY—SCHWARZ 不等式得

$$(\vec{\alpha} \quad \vec{\beta})^2 \le (\vec{\alpha} \quad \vec{\alpha})(\vec{\beta} \quad \vec{\beta})$$ 即

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \le \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}$$ 成立

Assignment

- 徐仲、张凯院等.《矩阵论简明教程》,第三版.科学出版社出版.
  - 习题一：8，9，10(2)(3)
  - 预习1.6节酉相似下的标准形