第三章:矩阵分析



矩阵序列回顾

- § 3.1 矩阵序列
- § 3.2 矩阵级数
- § 3.3 矩阵函数
- § 3.4 矩阵的微分与积分
- § 3.5 矩阵分析应用举例

- 矩阵序列: $\{A^{(k)}\}$ $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{m \in \mathbb{N}}$
- 矩阵序列收敛的性质:

1.
$$\lim_{k \to \infty} A^{(k)} = A \Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} \left\| A^{(k)} - A \right\| = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \left\| A^{(k)} \right\| = \|A\|$$

2.
$$\alpha A^{(k)} + \beta B^{(k)}; \quad A^{(k)} B^{(k)}; \quad (A^{(k)})^{-1}$$

3.
$$\lim A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) = 1$$



矩阵级数回顾



矩阵函数

- 矩阵级数: $\sum_{A^{(k)}}$ 收敛, 发散, 绝对收敛的概念
- 矩阵级数收敛的性质:
 - 1. $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 收敛
 - 2. 和、数乘、常矩阵乘法、绝对收敛、乘积
- 矩阵幂级数: $\sum a_k A^k \quad A \in C^{n \times n}$
 - 1. $\sum a_k z^k$ 收敛半径为R $\rho(A) < R$ 时 $\Rightarrow \sum a_k A^k$ 绝对收敛 $\rho(A) > R$ 时 $\Rightarrow \sum a_k A^k$ 发散

注: $\rho(A) \le ||A||, ||A|| < R$ 时, $\sum a_k A^k$ 绝对收敛

2. $\sum A^k$ 收敛 $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$ 且 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$

• 定义3.6:

设幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 的收敛半径为r,

当|z| < r 时,幂级数收敛于 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

如果 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足 $\rho(A) < r$,

则称 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 的和为矩阵函数,记为

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k.$$



几个常用的矩阵函数



带参数的矩阵函数

- (1) $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \cdots, \rho(A) < \infty;$
- (2) $\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1} = A \frac{1}{3!} A^3 + \frac{1}{5!} A^5 + \cdots, \rho(A) < \infty;$
- (3) $\cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k} = I \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{4!} A^4 \cdots, \rho(A) < \infty;$
- (4) $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots, \rho(A) < 1;$
- (5) $\ln(I+A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} A^{k+1} = A \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3} A^3 \cdots, \rho(A) < 1.$

将矩阵函数的变元A换成At,其中t为参数 ,则得到带参数的矩阵函数

$$f(At) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (At)^k.$$



矩阵函数值的计算



矩阵函数值的计算

- 利用Hamilton-Cayley定理 一般过程:
 - 1、计算特征多项式 $det(\lambda I A) = \varphi(\lambda)$
 - 2、由矩阵方程 $\varphi(A)=0$ 确定矩阵 A的运算规律
 - 3、由矩阵函数公式计算矩阵函数:

$$f(A t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k t^k \qquad \rho(A) < r$$

• 利用Hamilton-Cayley定理
$$- 例3.5 \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{x} \quad e^{At} \quad e^{A}$$
解: $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 1, \dots A^2 + I = 0$ 即: $A^2 = -I$
从而 $A^{2k} = (-1)^k I$ $A^{2k+1} = (-1)^k A$

$$\therefore e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k = \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right) I + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right) A$$

$$= \cos t \cdot I + \sin t \cdot A = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$t = 1$$

$$t = 1$$

$$t = e^{At} \Big|_{t=1} = \begin{bmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{bmatrix}$$



矩阵函数值的计算



矩阵函数值的计算

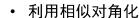
 利用Hamilton-Cayley定理 -例3.6

已知四阶方阵A的特征值为 π , $-\pi$, 0, 0, 求 $\sin A$, $\cos A$.

Solution. 由己知及H-C定理有 $A^4 - \pi^2 A^2 = 0$, 从而

$$A^4 = \pi^2 A^2$$
, $A^5 = \pi^2 A^3$, $A^6 = \pi^4 A^2$, $A^7 = \pi^4 A^3$, ...

思
$$A^{2k} = \pi^{2k-2}A^2$$
, $A^{2k+1} = \pi^{2k-2}A^3$. 故 $\sin A = A - \frac{1}{\pi^2}A^3$, $\cos A = I - \frac{2}{\pi^2}A^2$.



一般计算过程: 若 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ (|z| < r)

 $A \in C^{m \times n}$ 可对角化,其特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ 则有可逆矩阵P,使得

$$\begin{split} P^{-1}AP &= diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n) = \Lambda \qquad \therefore A = P\Lambda P^{-1} \\ &f(At) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k t^k = P\bigg[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Lambda^k t^k\bigg] P^{-1} \\ &= Pdiag\bigg[\sum_{k=0}^{\infty} a_n (\lambda_1 t)^k, \cdots, \sum_{k=0}^{\infty} a_n \left(\lambda_n t\right)^k\bigg] P^{-1} \\ &= Pdiag\big(f(\lambda_1 t), f(\lambda_2 t), \cdots, f(\lambda_n t)\big) P^{-1} \\ &t=1 \text{ if } f(A) = Pdiag\big(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)\big) P^{-1} \end{split}$$



矩阵函数值的计算



矩阵函数值的计算

• 利用相似对角化

-例3.5
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
 求 e^{At} e^{A}

解:
$$\det(\lambda I - A) = 0 \implies \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$$

 $\lambda_1 = i$ 解 $(iI - A)\vec{x} = \vec{0}$ 特征向量 $\vec{P}_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\lambda_2 = -i$$
 $(-iI - A)\vec{x} = \vec{0}$ 特征向量 $\vec{P}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

相似变换矩阵与对角阵为

$$P = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

• 续

$$e^{At} = e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{t}} = Pdiag(e^{it}, e^{-it})P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{it} + e^{-it} & ie^{-it} - ie^{it} \\ ie^{it} - ie^{-it} & e^{it} + e^{-it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{A} = e^{At}|_{t=1} = \begin{bmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{bmatrix}$$



欧拉公式



矩阵函数值的计算



$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{cases} \dots \dots (1)$$

$$x \in R \qquad \overrightarrow{\square}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases} \dots (2)$$

Euler1707—1783.瑞士

• 利用相似对角化

例 3.7 已知
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$
,求 e^{u} , $\cos \mathbf{A}$.

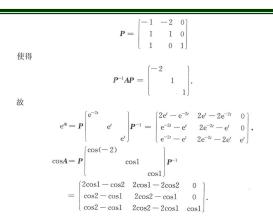
解 可求得 $\det(\lambda I - A) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$,即 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. 对应 $\lambda_1 = -2$ 的特征向量为 $p_1 = (-1,1,1)^T$,对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的两个线性无关的特征向量为 $p_2 = (-2,1,0)^T$, $p_3 = (0,0,1)^T$,于是



矩阵函数值的计算



矩阵函数值的计算



• 利用Jordan分解

设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 由Jordan分解定理,存在可逆矩阵P使得

$$A = PJP^{-1} = P \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix} P^{-1},$$

故

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k J^k\right) P^{-1} = Pf(J) P^{-1}$$



利用Jordan分解



利用Jordan分解

$$=Pegin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}a_kJ_1^k & & & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty}a_kJ_2^k & & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \sum_{k=0}^{\infty}a_kJ_s^k \end{pmatrix} P^{-1} \ =Pegin{pmatrix} f(J_1) & & & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & f(J_s) \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$J_i^k = egin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i imes r_i}^k$$
的计算:
$$J_i^k = egin{pmatrix} \lambda^k & rac{1}{1!} (\lambda^k)^i & \cdots & rac{1}{(r_i - 1)!} (\lambda^k)^{(r_i - 1)} \end{pmatrix}$$

$$\lambda^k & \ddots & \vdots$$

$$\ddots & rac{1}{1!} (\lambda^k)^i \\ \lambda^k & \lambda^k \end{pmatrix}_{\lambda = \lambda_i}$$



幂级数收敛的性质



利用Jordan分解

• 幂级数收敛,则可逐项求导

若
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$
 ($|z| < r$)

$$\begin{split} \text{Ind} & |z| < r \text{ ift}, \quad f^{'}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} P_k^1 a_k z^{k-1} \\ & f^{''}(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k (k-1) a_k z^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} P_k^2 a_k z^{k-2} \\ & \cdots \end{split}$$

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) a_k z^{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} P_k^n a_k z^{k-n}$$

 $f(J_i)$ 的计算:

$$f(J_{i}) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(r_{i}-1)!}[f(\lambda)]^{(r_{i}-1)} \\ & f(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!}f'(\lambda) \\ & & & f(\lambda) \end{pmatrix}_{i=\lambda}$$

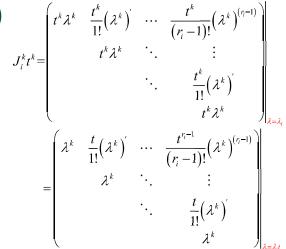


利用Jordan分解



$$f(At) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (At)^k = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (Jt)^k\right) P^{-1} = Pf(Jt) P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} f(J_1t) & & \\ & f(J_2t) & \\ & & \ddots & \\ & & f(J_st) \end{pmatrix} P^{-1}$$



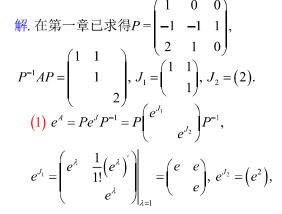


利用Jordan分解



利用Jordan分解

$$f(J_{i}t) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{t}{1!}f'(\lambda) & \cdots & \frac{t^{r_{i}-1}}{(r_{i}-1)!}[f(\lambda)]^{(r_{i}-1)} \\ & f(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{t}{1!}f'(\lambda) \\ & & & f(\lambda) \end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_{i}t}$$





利用Jordan分解



利用Jordan分解

(2)
$$\sin At = P \cdot \sin Jt \cdot P^{-1} = P \begin{pmatrix} \sin J_1 t \\ \sin J_2 t \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$\sin J_1 t = \begin{pmatrix} \sin \lambda & \frac{t}{1!} (\sin \lambda) \\ \sin \lambda & \end{pmatrix} \bigg|_{\lambda = t} = \begin{pmatrix} \sin t & t \cos t \\ & \sin t \end{pmatrix},$$

$$\sin J_2 t = (\sin 2t),$$

故
$$\sin At = P \begin{pmatrix} \sin t & t \cos t \\ & \sin t \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin t - 2t \cos t & 0 & t \cos t \\ \sin t + 2t \cos t - \sin 2t & \sin 2t & -t \cos t - \sin t + \sin 2t \\ -4t \cos t & 0 & 2t \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$



矩阵函数的特征值



矩阵函数值的计算

定理3.8 $A \in C^{n \times n}$, λ_1 , λ_2 , ..., λ_n 是 A的特征值,则 f(A) 的特征值是 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$

例如,
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
的特征值为1,1,2
$$e^{A} = P \begin{pmatrix} e & e \\ & e \\ & & e^{2} \end{pmatrix} P^{-1}$$
的特征值为 e,e,e^{2}

• 待定系数法

设A∈C"×"的特征多项式或零化多项式为 $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}, \ r_1 + r_2 + \cdots + r_s = \mathbf{m} \le n.$ 将 $f(\lambda t)$ 表为 $f(\lambda t)=q(\lambda,t)\varphi(\lambda)+r(\lambda,t)$ 的形式后可得 f(At) = r(A,t), f(A) = r(A,1).

为此,设 $r(\lambda,t) = b_{m-1}(t)\lambda^{m-1} + \dots + b_1(t)\lambda + b_0(t)$, 再用待定系数法求出 $b_{m-1}(t), \dots, b_1(t), b_0(t)$.



矩阵函数值的计算

待定系数法

 $b_{m-1}(t), \dots, b_1(t), b_0(t)$ 满足的方程是

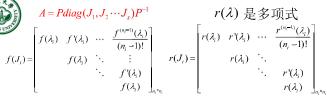
$$\left. \frac{d^{l}}{d\lambda^{l}} f(\lambda t) \right|_{\lambda = \lambda} = \frac{d^{l}}{d\lambda^{l}} r(\lambda, t) \right|_{\lambda = \lambda},$$

即

$$t^{l} \frac{d^{l}}{d\mu^{l}} f(\mu) \bigg|_{\mu = \lambda_{i}t} = \frac{d^{l}}{d\lambda^{l}} r(\lambda, t) \bigg|_{\lambda = \lambda_{i}},$$

$$l = 0, 1, \dots, r_{i} - 1; \ i = 1, 2, \dots, s.$$





 $f(A) = Pdiag(f(J_1), f(J_2) \cdots f(J_s))P^{-1} \qquad r(A) = Pdiag(r(J_1), r(J_1) \cdots r(J_s))P^{-1}$ $\Leftrightarrow Pdiag(f(J_1), f(J_2) \cdots f(J_s))P^{-1} = Pdiag(r(J_1), r(J_1) \cdots r(J_s))P^{-1}$ $\Leftrightarrow f(J_i) = r(J_i)$ $i = 1, 2 \cdots s$ $\Leftrightarrow f^{(l)}(\lambda_i) = r^{(l)}(\lambda_i) \quad i = 1, 2 \cdots s \quad l = 0, 1 \cdots (n_i - 1)$ $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$



待定系数法例子



待定系数法例子

• 例3.9

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \ \vec{x}e^{At}, \ \cos A.$$

解. 在第一章已求得4的特征多项式

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$$
. 注: $\varphi(\lambda)$ 可用任意零化多项式替代,因此, $r(\lambda,t)$ 不唯一,但并不影响 $f(A)$ 的计算

$$e^{\lambda t} = q(\lambda, t) (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2) + b_2(t) \lambda^2 + b_1(t) \lambda + b_0(t),$$
则有方程组

$$\begin{cases} e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=1} = \left(b_2(t)\lambda^2 + b_1(t)\lambda + b_0(t)\right)\Big|_{\lambda=1}, \\ \frac{d}{d\lambda}e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=1} = \frac{d}{d\lambda}\left(b_2(t)\lambda^2 + b_1(t)\lambda + b_0(t)\right)\Big|_{\lambda=1}, \\ e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=2} = \left(b_2(t)\lambda^2 + b_1(t)\lambda + b_0(t)\right)\Big|_{\lambda=2}. \end{cases}$$

$$\mathbb{E} \exists \begin{cases}
e^{t} = b_{2}(t) + b_{1}(t) + b_{0}(t), \\
te^{t} = 2b_{2}(t) + b_{1}(t), \\
e^{2t} = 4b_{2}(t) + 2b_{1}(t) + b_{0}(t).
\end{cases}$$



待定系数法例子



解得

$$\begin{cases} b_2(t) = e^{2t} - e^t - te^t, \\ b_1(t) = 2e^{2t} + 2e^t + 3te^t, \\ b_0(t) = e^{2t} - 2te^t. \end{cases}$$

从而

$$\begin{split} e^{At} &= b_2(t)A^2 + b_1(t)A + b_0(t)I \\ &= \begin{pmatrix} e^t - 2te^t & 0 & te^t \\ -e^{2t} + e^t + 2te^t & e^{2t} & e^{2t} - e^t - te^t \\ -4te^t & 0 & e^t + 2te^t \end{pmatrix}. \end{split}$$

再设

$$\cos \lambda = q(\lambda)(\lambda-1)^2(\lambda-2) + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0,$$
得方程组

$$\begin{cases} \cos \lambda \big|_{\lambda=1} = \left(b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 \right) \big|_{\lambda=1}, \\ \frac{d}{d\lambda} \cos \lambda \big|_{\lambda=1} = \frac{d}{d\lambda} \left(b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 \right) \big|_{\lambda=1}, \\ \cos \lambda \big|_{\lambda=2} = \left(b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 \right) \big|_{\lambda=2}. \end{cases}$$



待定系数法例子



常用矩阵函数的性质

即
$$\begin{cases} \cos 1 = b_2 + b_1 + b_0, \\ -\sin 1 = 2b_2 + b_1, \\ \cos 2 = 4b_2 + 2b_1 + b_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 = \sin 1 - \cos 1 + \cos 2, \\ b_1 = -3\sin 1 + 2\cos 1 - 2\cos 2, \\ b_0 = 2\sin 1 + \cos 2. \end{cases}$$

从而
$$\cos A = b_2 A^2 + b_1 A + b_0 I$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sin 1 + \cos 2 & 0 & -\sin 1 \\ -2\sin 1 + \cos 1 - \cos 2 & \cos 2 & \sin 1 - \cos 1 + \cos 2 \\ 4\sin 1 & 0 & -2\sin 1 + \cos 1 \end{pmatrix}.$$

• 定理3.9:

(1)
$$\sin(-A) = -\sin A$$
, $\cos(-A) = \cos A$;

(2)
$$e^{iA} = \cos A + i \sin A$$
, $\cos A = \frac{1}{2} (e^{iA} + e^{-iA})$,
 $\sin A = \frac{1}{2i} (e^{iA} - e^{-iA})$.



常用矩阵函数的性质



常用矩阵函数的性质

证明:**1**)
$$\sin(-A) = (-A) + \frac{1}{3!}(-A)^3 - \frac{1}{5!}(-A)^5 - \dots = -(A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 + \dots)$$

= $-\sin A$ 同理有 $\cos(-A) = \cos A$

2)
$$e^{iA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}$$

$$= \cos A + i \sin A$$

$$e^{-iA} = e^{i(-A)} = \cos(-A) + i \sin(-A) = \cos A - i \sin A$$

$$\text{At } A = \frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2}, \sin A = \frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i}$$

定理3.10: 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 且AB = BA, 则

(1)
$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$$
;

- (2) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$;
- (3) $\cos(A+B) = \cos A \cos B \sin A \sin B$.
- 推论: $\sin 2A = 2\sin A\cos A$, $\cos 2A = \cos^2 A \sin^2 A$.
- Remark: 若 $AB \neq BA$, 结论不成立



常用矩阵函数的性质



常用矩阵函数的性质

$$\therefore e^{A}e^{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^{k}}{k!} = e^{A+B}$$
 同理有 $e^{B}e^{A} = e^{B+A} = e^{A+B}$



证明: 2) 由于 $\sin A\cos B + \cos A\sin B$

$$= \frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i} \frac{e^{iB} + e^{-iB}}{2} + \frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2} \frac{e^{iB} - e^{-iB}}{2i}$$
$$= \frac{1}{4i} (e^{iA} e^{iB} - e^{-iA} e^{-iB}) + \frac{1}{4i} (e^{iA} e^{iB} - e^{-iA} e^{-iB})$$

因为AB=BA,由1)上式:

$$= \frac{1}{2i} [e^{i(A+B)} - e^{-i(A+B)}] = \sin(A+B)$$

3) 证明同2)



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad AB \neq BA$$



常用矩阵函数的性质

定理3.11: (1) det $e^A = e^{trA}$, (2) $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

-Remark

对任一方阵A, e^A 总可逆,但 $\sin A$, $\cos A$ 未必. $O \in C^{n^*n}, e^O = I$

证明:1) 4…4 是A的特征值,则

$$e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n}$$
 是 e^A 的特征值 ∴ $\det e^A = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \cdots e^{\lambda_n} = e^{trA}$
2)由1)知 $\forall A \det e^A > 0$ 即 e^A 可逆

: 由定理**3.10**
$$e^{A}e^{-A} = e^{A-A} = e^{o} = I$$
 即 $(e^{A})^{-1} = e^{-A}$



思考题



思考题答案

讨论下列矩阵幂级数的收敛情况,若收敛 求其矩阵函数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{10^k} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}^k$$

由于幂级数收敛半径为1,在(-1,1)内时

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$
 $f(0.5) = 6$, $f(-0.3) = \frac{210}{2197}$

$$A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = P\Lambda P^{-1}$$

由于A的行和范数为0.9,故上述幂级数绝对敛:且

$$f(A) = P(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Lambda^k) P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0.5) & 0 \\ 0 & f(-0.3) \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2f(0.5) + 2f(-0.3) & 4f(0.5) - 4f(-0.3) \\ f(0.5) - f(-0.3) & 2f(0.5) + 2f(-0.3) \end{bmatrix} = \dots$$



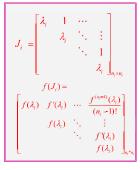
思考题



小结



- 一、矩阵函数 $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n \rho(A) < R$
- 二、f(A) 求法
- 1、Hamilton-Cayley定理
- 2、可对角化矩阵 $A=P\Lambda P^{-1}$ $f(A) = Pdiag(f(\lambda_1) \cdots f(\lambda_n))P^{-1}$
- 3、Jordan标准形法 $A = PJP^{-1} = Pdiag(J_1 \cdots J_s)P^{-1}$ $f(A) = Pdiag(f(J_1) \cdots f(J_s))P^{-1}$
- 4、待定系数法
- 三、矩阵函数的性质:





Assignment

- 徐仲、张凯院等.《矩阵论简明教程》,第 三版. 科学出版社出版.
 - 习题三: 4、6、7、8、9、11