第三章：矩阵分析

矩阵序列

定义3.1：设有 $C^{m\times n}$ 中的矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$，其中 $A^{(k)}=\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{m\times n}$，

若 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{ij}^{(k)}=a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$

收敛于 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，记为 $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}=A$ 或 $A^{(k)}\to A\ (k\to+\infty)$.

不收敛的矩阵序列称为发散.

注：$\{A^{(k)}\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $m\times n$ 个数列 $\{a_{ij}^{(k)}\}$ 同时收敛

例如：$\{A^{(k)}\}=\begin{bmatrix}\frac{1}{k} & \frac{1}{2^k}\\ -1 & \frac{1}{k^2}\end{bmatrix}$　则　$\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}=A$

矩阵序列

定理 3.1：设 $A^{(k)}, A\in C^{m\times n}\ (k=0,1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|=0$，其中 $\|\cdot\|$ 是 $C^{m\times n}$ 上的任一矩阵范数.

证明：由 $C^{m\times n}$ 上G范数 $\|A\|_G=\sqrt{mn}\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$

得：$\left|a_{ij}^{(k)}-a_{ij}\right|\le\sqrt{mn}\max\limits_{i,j}\left|a_{ij}^{(k)}-a_{ij}\right|=\left\|A^{(k)}-A\right\|_G\le\sqrt{mn}\sum\limits_{i-1}^{m}\sum\limits_{j-1}^{n}\left|a_{ij}^{(k)}-a_{ij}\right|$

$$\therefore\lim_{k\to+\infty} A^{(k)}=A\Leftrightarrow\lim_{k\to+\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|_G=0$$

又设任一范数 $\|\cdot\|$，则由等价性

$$\alpha\left\|A^{(k)}-A\right\|_G\le\left\|A^{(k)}-A\right\|\le\beta\left\|A^{(k)}-A\right\|_G$$

即有　$\therefore\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}=A\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|=0$

矩阵序列

推论：设 $A^{(k)}, A\in C^{m\times n}\ (k=0,1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}=A$，

　则 $\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|A^{(k)}\right\|=\|A\|$，

其中 $\|\cdot\|$ 是 $C^{m\times n}$ 上任一矩阵范数.

证明：由于 $\left\|A^{(k)}\right\|-\|A\|\le\left\|A^{(k)}-A\right\|$

注：1）推论逆命题不一定成立

　如 $A^{(k)}=\begin{bmatrix}(-1)^k & \frac{1}{k+1}\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ 不收敛，　但 $\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|A^{(k)}\right\|_F=\lim\limits_{k\to+\infty}\sqrt{6+\frac{1}{(k+1)^2}}=\sqrt{6}$

注：2）推论逆否命题？

矩阵序列

定理 3.2：设 $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}=A$，$\lim\limits_{k\to+\infty} B^{(k)}=B$，其中 $A^{(k)}, B^{(k)}, A, B$ 为适当阶的矩阵，$\alpha,\beta\in C$，则

(1) $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\alpha A^{(k)}+\beta B^{(k)}\right)=\alpha A+\beta B$

(2) $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}B^{(k)}=AB$

(3) 当 $A^{(k)}$ 与 A 均可逆时，$\lim\limits_{k\to+\infty}\left(A^{(k)}\right)^{-1}=A^{-1}$.

矩阵序列

证明: 1) 取一矩阵范数 $\|\cdot\|$，则

$$\left\|\left(\alpha A^{(k)}+\beta B^{(k)}\right)-\left(\alpha A+\beta B\right)\right\|\le|\alpha|\left\|A^{(k)}-A\right\|+|\beta|\left\|B^{(k)}-B\right\|$$

$$\therefore\left\|\left(\alpha A^{(k)}+\beta B^{(k)}\right)-\alpha A-\beta B\right\|\to 0$$

由定理3.1便得证

2)的证明类似

3)的证明利用行列式和伴随矩阵表示逆矩阵

矩阵序列

注意：3)中条件 $A^{(k)}$ 与 A 可逆不可少

如：$A^{(k)}=\begin{bmatrix}1+\frac{1}{k} & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=A$

不可逆

$(A^{(k)})^{-1}=\begin{bmatrix}k & -k\\ -k & k+1\end{bmatrix}$ 无极限

收敛矩阵

定义：设 $A\in C^{n\times n}$，若 $\lim\limits_{k\to+\infty}A^k=0$，则称 A 为收敛矩阵.

如：1） $A=\begin{bmatrix}0.1 & 0 & 0\\ 0 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & 0.3\end{bmatrix}$ $A^k\to 0$ A是收敛矩阵

如：2） $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $A^k\to 0$ A也是收敛矩阵

收敛矩阵

定理 3.3：设 $A\in C^{n\times n}$，则 A 为收敛矩阵的充要条件是 $\rho(A)<1$.

证明：必要性：若 $\lim\limits_{k\to+\infty}A^k=0$，则由定理3.1可知，任一矩阵范数 $\|\cdot\|$ 有 $\lim\limits_{k\to+\infty}\|A^k\|=0$

$(\rho(A))^k=\rho(A^k)\le\|A^k\|$ $\therefore\lim\limits_{k\to+\infty}(\rho(A))^k=0$ 即 $\rho(A)<1$

充分性：若 $\rho(A)<1$，取 $\varepsilon>0$，使 $\rho(A)+\varepsilon<1$

存在矩阵范数 $\|\cdot\|_m$，使 $\|A\|_m\le\rho(A)+\varepsilon<1$

$\therefore\|A^k\|_m\le\|A\|_m^k\le(\rho(A)+\varepsilon)^k$

$\therefore\|A^k\|_m\to 0$ $\therefore\lim\limits_{k\to+\infty}A^k=0$ 即A为收敛矩阵

收敛矩阵

推论：设 $A\in C^{n\times n}$. 若对 $C^{n\times n}$ 上的某一矩阵范数 $\|\cdot\|$ 有 $\|A\|<1$，则 A 为收敛矩阵.

（由 $\rho(A)\le\|A\|<1$ 即可证明）

例1） $A=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 8\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ 其特征值为 $\lambda_1,\lambda_2=\frac{5}{6},-\frac{1}{2}.\rho(A)<1$

故为收敛矩阵

例2） $A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1 & 0.2\\ 0.5 & 0.5 & 0.4\\ 0.1 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}$ $\|A\|_1=0.9<1$ 故为收敛矩阵

第三章：矩阵分析

矩阵级数

定义3.3：由 $C^{m\times n}$ 中的矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 构成的无穷和

$$\sum_{k=0}^{+\infty}A^{(k)}=A^{(0)}+A^{(1)}+A^{(2)}+\cdots$$

称为矩阵级数. 对任一正整数 N，称 $S^{(N)}=\sum\limits_{k=0}^{N}A^{(k)}$ 为矩阵级数的部分和. 如果由部分和构成的矩阵序列 $\{S^{(N)}\}$ 收敛，即 $S=\lim\limits_{N\to+\infty}S^{(N)}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}A^{(k)}$. 则称矩阵级数 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}A^{(k)}$ 收敛，而且有和 S，记为 $\lim\limits_{N\to+\infty}S^{(N)}=S$，

不收敛的矩阵级数称为发散的.

矩阵级数

如： $A^{(k)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & \frac{\pi}{4^k} \\ 0 & \frac{1}{(k+1)(k+2)} \end{bmatrix}$

由于级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi}{4^k}$ $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 都是收敛的

$$\sum A^{(k)}=\sum\begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & \frac{\pi}{4^k} \\ 0 & \frac{1}{(k+1)(k+2)} \end{bmatrix}$$ 收敛

原级数收敛，且和为 $S=\begin{bmatrix} 2 & \frac{4\pi}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

绝对收敛

定义3.4：设 $A^{(k)}=\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}\ (k=0,1,2,\cdots)$. 如果 $m\times n$ 个数项级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}a_{ij}^{(k)}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 都绝对收敛，即 $\sum_{k=0}^{+\infty}\left|a_{ij}^{(k)}\right|$ 都收敛，则称矩阵级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}A^{(k)}$ 绝对收敛.

注意：1) $\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}=S\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}a_{ij}^{(k)}=S_{ij},i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n;$

注意：2) 矩阵级数绝对收敛充要条件：

$\sum_{k=0}^{\infty}a_{ij}^{(k)}=S_{ij},i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n;$ 绝对收敛

注意：3) 若矩阵级数绝对收敛，则矩阵级数收敛

绝对收敛

定理 3.4：设 $A^{(k)}=\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}\ (k=0,1,\cdots)$, 则矩阵级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}A^{(k)}$ 绝对收敛的充要条件是正项级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\left\|A^{(k)}\right\|$ 收敛，

其中 $\|\cdot\|$ 是 $C^{m\times n}$ 上任一矩阵范数.

证明： 1）先证 $\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\left\|A^{(k)}\right\|_{m_1}$ 收敛

充分性：若 $\sum_{k=0}^{\infty}\left\|A^{(k)}\right\|_{m_1}$ 收敛，则由 $\left|a_{ij}^{(k)}\right|\le\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}^{(k)}\right|=\left\|A^{(k)}\right\|_{m_1}$

知 $\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{ij}^{(k)}\right|$ 都收敛 $\therefore\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 绝对收敛

绝对收敛

必要性：若 $\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 绝对收敛，即所有的级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{ij}^{(k)}\right|$ 收敛

则 $\sum_{k=0}^{N}\left\|A^{(k)}\right\|_{m_1}=\sum_{k=0}^{N}(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}^{(k)}\right|)\le\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{ij}^{(k)}\right|)$ ， 即级数收敛

2）$\|\cdot\|$ 是任一种矩阵级数，存在 $\alpha,\beta>0$ ，

$$\alpha\left\|A^{(k)}\right\|_{m_1}\le\left\|A^{(k)}\right\|\le\beta\left\|A^{(k)}\right\|_{m_1}$$

$\therefore\sum_{k=0}^{\infty}\left\|A^{(k)}\right\|_{m_1}$ 收敛的充要条件：$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|A^{(k)}\right\|$ 收敛

综合1）、2）可有结论获证

矩阵级数收敛的性质

定理 3.5：设 $\sum_{k=0}^{+\infty}A^{(k)}=A,\ \sum_{k=0}^{+\infty}B^{(k)}=B,$ 其中 $A^{(k)},B^{(k)},A,B$ 是适当阶的矩阵，则

(1) $\sum_{k=0}^{+\infty}(A^{(k)}+B^{(k)})=A+B;$

(2) 对任意 $\lambda\in C$，有 $\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda A^{(k)}=\lambda A;$

(3) 绝对收敛(的矩阵级数)必收敛，并且任意调换其项的顺序所得的矩阵级数仍收敛，且其和不变；

矩阵级数收敛的性质

(4) 若矩阵级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}A^{(k)}$ 收敛(或绝对收敛)，则矩阵级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}PA^{(k)}Q$ 也收敛(或绝对收敛)，并且有

$$\sum_{k=0}^{+\infty}PA^{(k)}Q=P\left(\sum_{k=0}^{+\infty}A^{(k)}\right)Q;$$

矩阵级数收敛的性质

(5) 若 $\sum_{k=0}^{+\infty} A^{(k)}$ 与 $\sum_{k=0}^{+\infty} B^{(k)}$ 均绝对收敛，则它们按项相乘所得的矩阵级数

$$A^{(0)}B^{(0)}+\left(A^{(0)}B^{(1)}+A^{(1)}B^{(0)}\right)+\cdots+\left(A^{(0)}B^{(k)}+A^{(1)}B^{(k-1)}+\cdots+A^{(k)}B^{(0)}\right)+\cdots$$

也绝对收敛，且其和为 AB.

矩阵幂级数

定义3.5： 设 $A\in C^{n\times n}, a_k\in C\,(k=0,1,2,\cdots)$,称矩阵级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$$

为矩阵 A 的幂级数.

问题：什么样的矩阵A才能使 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 收敛？

而其收敛情况与幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 的收敛情况有何联系和区别？

矩阵幂级数

定理3.6： 设幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ 的收敛半径为 r, $A\in C^{n\times n}$，则

(1) 当 $\rho(A)<r$ 时，矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$ 绝对收敛.

(2) 当 $\rho(A)>r$ 时，矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$ 发散.

证明：1）存在 $\varepsilon>0$ ，使 $\rho(A)+\varepsilon<r$

所以存在矩阵范数 $\|\cdot\|_m$ ，使 $\|A\|_m\le\rho(A)+\varepsilon<r$

$$\left\|a_kA^k\right\|_m\le|a_k|\left\|A^k\right\|_m\le|a_k|\|A\|_m\|A\|_m\cdots\|A\|_m$$

$$=|a_k|\|A\|_m^k\le|a_k|(\rho(A)+\varepsilon)^k$$

矩阵幂级数

而级数 $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|(\rho(A)+\varepsilon)^k$ 是收敛的，所以 $\sum_{k=0}^{\infty}\|a_kA^k\|_m$ 是收敛的

所以 $\sum_{k=0}^{\infty}a_kA^k$ 是绝对收敛的

2）$\rho(A)>r$ 时，A的n个特征值 $\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots,\ \lambda_n$ 中有

$$\lambda_k,|\lambda_k|=\rho(A)>r$$

则存在可逆矩阵P：$P^{-1}AP=J$ $\quad J=\begin{bmatrix}\lambda_1&\delta_1&&\\&\lambda_2&\ddots&\\&&\ddots&\delta_{n-1}\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$

若 $\sum_{k=0}^{\infty}a_kA^k$ 收敛

则 $P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_kA^k\right)P=\sum_{k=0}^{\infty}a_kP^{-1}A^kP=\sum_{k=0}^{\infty}a_kJ^k$ 也收敛

矩阵幂级数

而 $\quad J^k=\begin{bmatrix}\lambda_1^k&&&*\\&\lambda_2^k&&\\&&\ddots&\\0&&&\lambda_n^k\end{bmatrix}$ 则 $\sum_{k=0}^{\infty}a_kJ^k=\begin{bmatrix}\sum a_k\lambda_1^k&&&*\\&\sum a_k\lambda_2^k&&\\&&\ddots&\\0&&&\sum a_k\lambda_n^k\end{bmatrix}$

其中 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lambda_k^n$ 发散（$|\lambda_k|=\rho(A)>r$）

$\therefore\sum_{k=0}^{\infty}a_kJ^k$ 发散 矛盾 故必有 $\sum_{k=0}^{\infty}a_kA^k$ 发散

矩阵幂级数

例 3.3 判断矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{6^k}\begin{pmatrix}1&-8\\-2&1\end{pmatrix}^k$ 的敛散性.

解 令 $A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&-8\\-2&1\end{pmatrix}$. 例 3.1 中已求得 $\rho(A)=\frac{5}{6}$. 由于幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}kz^k$ 的收敛半径为 $r=1$,故由 $\rho(A)<1$ 知矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}kA^k$ 绝对收敛.

矩阵幂级数

推论：设幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ 的收敛半径是 r, $A \in C^{n\times n}$.

若存在 $C^{n\times n}$ 上的某一矩阵范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\|A\| < r$,

则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$ 绝对收敛. （$\rho(A) \le \|A\|$）

定理 3.7：设 $A \in C^{n\times n}$，矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ 收敛的充要条件是 $\rho(A) < 1$，并且在收敛时，其和为 $(I-A)^{-1}$.

矩阵幂级数

【证明】充分性：若 $\rho(A)<1$，由于 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ 收敛半径为1，

由定理3.16可知 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 绝对收敛

必要性：若 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛，可设和S，即 $S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$

记 $S^{(N)} = \sum_{k=0}^{N} A^k$ 则 $S = \lim_{N\to\infty} S^{(N)}$

$$\lim_{N\to\infty} A^N = \lim_{N\to\infty}(S^{(N)} - S^{(N-1)}) = 0$$

由定理3.3知 $\rho(A) < 1$

矩阵幂级数

【证明】 由于 $\rho(A) < 1 \therefore I - A$ 可逆　　由 $S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$

$$\text{则 } (I-A)S = (I-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left[A^k - A^{k+1}\right]$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\left[A^k - A^{k+1}\right]$$
$$= \lim_{N\to\infty}\left[(I-A)+(A-A^2)+\cdots+(A^N-A^{N+1})\right]$$
$$= \lim_{N\to\infty}\left[I - A^{N+1}\right] = I$$

$\because A^{N+1} \to 0 \quad \therefore S = (I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$

矩阵幂级数

例 3.4　已知 $A=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$，判断矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ 的敛散性. 若收敛，试求其和.

解　因为 $\|A\|_1 = 0.9 < 1$，所以 $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ 收敛，且

$$\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = (I-A)^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 28 & 14 & 14 \\ 44 & 62 & 42 \\ 20 & 25 & 35 \end{pmatrix}.$$

小结

- 矩阵序列
  - 矩阵序列的概念
  - 收敛的充要条件
  - 收敛的性质
- 矩阵级数
  - 矩阵级数
  - 矩阵幂级数

Assignment

- 徐仲、张凯院等.《矩阵论简明教程》，第三版. 科学出版社出版.
  - 习题三：1、2、3