矩阵论

习题课

马锦华

数据科学与计算机学院

中山大学

课程内容

<u>**第一章：矩阵的相似变换**</u>

第二章：范数理论

第三章：矩阵分析

第四章：矩阵分解

第五章：特征值的估计与表示

第六章：广义逆矩阵

第七章：矩阵的特殊乘积

第八章：线性空间与线性变换

第一章：矩阵的相似变换

- 基本概念
  - 特征值、特征向量、特征矩阵、特征多项式、代数重数、几何重数、矩阵的多项式、迹
  - 相似、相似变换矩阵、可对角化
  - Jordan块、Jordan标准型、λ矩阵的初等变换、Smith标准型、不变因子、初等因子、行列式因子、广义特征向量
  - 零化多项式、最小多项式
  - 向量的内积、长度、Schmidt正交化、标准正交基、酉矩阵
  - 正规矩阵、Hermite正定（半正定）矩阵

第一章：矩阵的相似变换

- 主要结论
  - 特征值与特征向量
    - 代数重数与几何重数的关系
    - 矩阵多项式的特征值与特征向量
    - 不同特征值对应的特征向量线性无关
    - 矩阵（共轭）转置的特征值
    - 行列式等于特征值乘积
    - 矩阵的迹等于特征值之和
    - $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

第一章：矩阵的相似变换

- 主要结论
  - 相似对角化
    - 相似的性质（等价关系）
    - 可对角化的充分必要条件、必要条件
  - Jordan标准型
    - Jordan分解：任一方阵相似于Jordan标准型
    - 任一λ矩阵经过初等变换可化为Smith标准型
    - k阶行列式因子等于前k个不变因子的乘积
    - Jordan块幂的表示

第一章：矩阵的相似变换

- 主要结论
  - Hamilton-Cayley定理
    - 特征多项式是零化多项式
    - 最小多项式是唯一的，且整除任一零化多项式
    - 最小多项式等于特征多项式除以$n-1$阶行列式因子
    - 相似矩阵有相同的最小多项式
    - 最小多项式与Jordan标准型的关系
  - 向量的内积
    - 内积的性质、Cauchy-Schwarz不等式
    - 长度性质、三角不等式
    - 正交向量组线性无关
    - 酉矩阵的性质

第一章：矩阵的相似变换

- 主要结论
  - 酉相似下的标准型
    - Schur分解：任一方阵酉相似于上三角矩阵
    - 酉相似于对角矩阵的充分必要条件
    - （共轭）对称矩阵的特征值均为实数、反（共轭）对称矩阵的特征值为零或纯虚数
    - 正规矩阵的共轭的特征值与特征向量
    - 正规矩阵不同特征值对应的特征向量正交
    - Hermite正定（半正定）矩阵的等价条件
    - AA^H与A^HA的性质

第一章：矩阵的相似变换

- 主要方法
  - 求特征值与特征向量
  - 判断是否可对角化、求相应的相似变换和对角矩阵
  - 求Jordan标准型
    - 特征向量法
    - 初等变换法
    - 行列式因子法
  - 求Jordan标准型的相似变换矩阵
  - 求矩阵多项式的值、求逆、求最小多项式

第一章：矩阵的相似变换

- 主要方法
  - 求矩阵的幂
    - 相似对角化
    - Jordan分解
    - 零化多项式
    - 最小多项式
  - 求标准正交基
  - 求正规矩阵的酉相似变换矩阵与对角矩阵

习题一：矩阵的相似变换

1. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}$，试求$A$的Jordan标准形$J$及相似变换矩阵$P$, 使得$P^{-1}AP=J$.
2. 设n阶方阵$A=(a_{ij})$满足$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=\lambda, \forall j$，试证明$\lambda$是$A$的特征值.
3. 证明任意n阶方阵A的转置的最小多项式$m_{A^T}(\lambda)$等于A的最小多项式$m_A(\lambda)$.

习题一：矩阵的相似变换

4. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$，试求$A$的特征多项式与最小多项式.

5. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，试讨论$A$是否可以酉相似于对角矩阵，若是，试求酉矩阵$U$，使$U^TAU$为对角矩阵.

6. 证明定理1. 25.

课程内容

第一章：矩阵的相似变换

<u>第二章：范数理论</u>

第三章：矩阵分析

第四章：矩阵分解

第五章：特征值的估计与表示

第六章：广义逆矩阵

第七章：矩阵的特殊乘积

第八章：线性空间与线性变换

范数理论的基本概念

- 向量范数
  - 向量空间C^n中满足非负性、齐次性和三角不等式的实值函数
  - 1−范数、2−范数、p−范数、∞−范数、椭圆范数
- 矩阵范数
  - 以矩阵$A \in C^{m\times n}$为变量，满足非负性、齐次性、三角不等式和乘法相容性的实值函数
  - 向量范数的推广：m_1−范数、m_2−范数（F−范数）、m_∞−范数、G−范数
  - 向量范数的从属范数：1−范数、2−范数、∞−范数

范数理论的基本概念

- 矩阵范数与向量范数相容

$$\|Ax\|_v \le \|A\|_m \cdot \|x\|_v ,$$

(1)矩阵m_1-范数、$1-$范数都与向量$1-$范数相容

(2)矩阵$F-$范数、$2-$范数都与向量$2-$范数相容

(3)矩阵$m_\infty-$范数、G$-$范数、$\infty-$范数

都与向量$\infty-$范数相容

范数理论的主要结论

- 范数的等价性
  - C^n上的所有向量范数都等价
  - $C^{m\times n}$上的所有矩阵范数都等价
- 矩阵范数与向量范数的相容性
  - 对任意给定的矩阵范数，必存在与它相容的向量范数
  - 对任意给定的向量范数，必存在与它相容的矩阵范数
  - 一种矩阵范数可以与多种向量范数相容
  - 多种矩阵范数可以与一种向量范数相容

范数理论的主要结论

- 向量p–范数的极限是∞–范数，即

$$\forall x \in \mathrm{C}^n,\ \lim_{p\to\infty}\|x\|_p = \|x\|_\infty .$$

- 向量2–范数与矩阵2–范数、F–范数的酉不变性
- 由列满秩矩阵A构造新的向量范数

$$\|x\|_b = \|Ax\|_a$$

- 由可逆矩阵S构造新的矩阵范数

$$\|A\|_m = \|S^{-1}AS\|$$

范数理论的应用

- 谱半径估计：

$$(1)\rho(A) \le \|A\|$$

$$(2)\forall \varepsilon > 0, \exists \ \|\cdot\|_m, \text{s.t.} \ \|A\|_m \le \rho(A) + \varepsilon.$$

(3) 当A是正规矩阵时，$\rho(A) = \|A\|_2$.

矩阵范数的应用

- 若$\|P\| < 1$，则$I - P$可逆
- 误差分析

(1)定义条件数：$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

(2)矩阵求逆误差：$\dfrac{\left\|A^{-1} - (A + \delta A)^{-1}\right\|}{\|A^{-1}\|} \le \dfrac{cond(A) \cdot \|\delta A\| / \|A\|}{1 - cond(A) \cdot \|\delta A\| / \|A\|}$

(3)方程组求解误差：

$$\frac{\|\delta x\|_v}{\|x\|_v} \le \frac{cond(A)}{1 - cond(A) \cdot \|\delta A\| / \|A\|} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|_v}{\|b\|_v} \right),$$

习题二：范数理论

1. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，试求$A$的$m_1$-范数、$m_2$-范数（F-范数）、$m_\infty$-范数、1-范数、2-范数、∞-范数.

2. 若m为正整数，试讨论$\sqrt[m]{\|A^m\|}$是否矩阵范数，若是，证明结论；若不是，举出反例.

3. 试求1）中矩阵A的条件数$\mathrm{cond}_1(A)$和$\mathrm{cond}_\infty(A)$.

习题二：范数理论

4. 设列向量$\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$，证明：$\|\alpha+\beta\|_2=\|\alpha\|_2+\|\beta\|_2$的充要条件是$\alpha$与$\beta$线性相关且$\alpha^T\beta\geq 0$.
5. 给定矩阵范数$\|\cdot\|$，可选取可逆矩阵P，使得$\|P\|=1$；定义$\|A\|_M=\|AP^{-1}\|$，证明$\|\cdot\|_M$是矩阵范数.
6. 设A,B都是可逆矩阵，且$(A+B)x=0$有非零解，证明对任意矩阵范数$\|\cdot\|$，都有$\|A^{-1}B\|\geq 1,\|AB^{-1}\|\geq 1$.

课程内容

第一章：矩阵的相似变换

第二章：范数理论

<u>第三章：矩阵分析</u>

第四章：矩阵分解

第五章：特征值的估计与表示

第六章：广义逆矩阵

第七章：矩阵的特殊乘积

第八章：线性空间与线性变换

基本概念

- 矩阵序列
  - 收敛性、收敛矩阵
- 矩阵级数
  - 收敛性、幂级数、Neumann级数
- 矩阵函数
  - 收敛的矩阵幂级数：指数函数、三角函数等
- 矩阵微分和积分
  - 函数矩阵对参数的微分和积分
  - 数量函数对矩阵变量的导数
  - 矩阵函数对矩阵变量的导数

主要结论

- 矩阵序列的收敛性
  - 充要条件：对任何矩阵范数，有 $\lim_{k\to+\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|=0,$
  - 矩阵序列收敛的性质：
    - 线性
    - 乘积
    - 逆矩阵
  - 收敛矩阵的充要条件：$\rho(A)<1$
  - 收敛矩阵的充分条件：$\|A\|<1$

主要结论

- 矩阵级数的收敛性
  - 充要条件：对任何矩阵范数，正项级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\left\|A^{(k)}\right\|$ 收敛
  - 矩阵级数收敛的性质：
    - 收敛：线性、左（右）乘常数矩阵
    - 绝对收敛：左（右）乘常数矩阵、求和顺序、乘积
  - 矩阵幂级数的敛散性
    - $\rho(A) < r$收敛
    - $\rho(A) > r$发散
  - Neumann级数收敛的充要条件：$\rho(A) < 1$
  - Neumann级数收敛的充分条件：$\|A\| < 1$

主要结论

- 矩阵函数的性质
  - 矩阵指数函数与三角函数的关系（欧拉公式）
  - 矩阵指数函数的性质
    - 可交换矩阵的指数函数
    - 行列式、逆矩阵
  - 矩阵三角函数的性质
    - 和角公式（可交换矩阵）
    - 倍角公式
    - 平方关系
    - 周期性

主要结论

- 矩阵微分与积分的性质
  - 微分与积分的线性运算
  - 微分
    - 函数乘积的导数
    - 逆矩阵的导数
    - 矩阵指数函数和三角函数的导数
  - 积分
    - 微分与积分的关系
    - 定积分的计算

常用方法

- 矩阵函数求值的常用方法
  - 利用零化多项式（特征多项式或最小多项式）
    - 找出矩阵方幂的特殊关系
    - 待定系数法
  - 利用Jordan标准型
- 矩阵分析的应用
  - 求解微分方程组
  - 求解矩阵方程
  - 求解最优化问题
    - 最小二乘问题

习题三：矩阵分析

1. 若$B \in \mathbb{R}^{m\times n}$， A和C分别是m阶和n阶实对称正定矩阵，试求解以下的最优化问题，

$$\min_{X\in\mathbb{R}^{m\times n}} \mathrm{tr}(CX^TAX) - 2\mathrm{tr}(X^TB)$$

2. 已知矩阵$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$，试求$e^{At}$.

3. 对2) 中矩阵A，求解微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = Ax(t), x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

习题三：矩阵分析

4\. 已知$e^{At}=e^{2t}\begin{pmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{pmatrix}$，试求$A$.

5\. 已知$A^2=A$，试求$\sin(\pi A)$.

6\. 判断矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{4^k}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 4 & 4\end{pmatrix}^k$的敛散性.

7\. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$，试求$\sin At$.

课程内容

第一章：矩阵的相似变换

第二章：范数理论

第三章：矩阵分析

第四章：矩阵分解

第五章：特征值的估计与表示

第六章：广义逆矩阵

第七章：矩阵的特殊乘积

第八章：线性空间与线性变换

基本概念

- 方阵的三角分解
  - LR分解、Doolittle分解、 Crout分解、 LDR分解、Cholesky分解
- 矩阵的QR分解
  - 方阵、长方阵、Householder矩阵（变换）、Givens矩阵（变换）
- 矩阵的满秩分解
  - 矩阵等价、Hermite标准型、置换矩阵
- 矩阵的奇异值分解
  - 矩阵的奇异值、酉等价

主要结论

- 三角分解的存在性
  - $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$可进行三角分解（唯一的*LDR*分解、*Doolittle*分解、*Crout*分解）的充要条件是A的n-1个顺序主子式$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_{n-1}$不为零
  - 设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$是正定的Hermite矩阵，则$A$可作Cholesky分解.

主要结论

- 矩阵的QR分解
  - Householder矩阵的性质
    - Hermite矩阵、酉矩阵、对合矩阵、自逆矩阵、行列式为-1
    - 设$z \in \mathbf{C}^n$是单位向量，则对于任意向量$x \in \mathbf{C}^n$，存在Householder矩阵，使得$Hx = \alpha z$，$\alpha \in \mathbf{C}$
  - Givens矩阵的性质
    - 酉矩阵、行列式为1
    - 对任意非零向量$\boldsymbol{x} \in C^n$和单位向量$\boldsymbol{e} \in C^n$，总存在有限个Givens矩阵的乘积T，使得$T\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|_2\, \boldsymbol{e}$

主要结论

- 矩阵的QR分解
  - 任意$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$都可作$QR$分解
  - 可逆矩阵QR分解的唯一性
  - 任意$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$酉相似于Hessenberg矩阵
    - Hermite矩阵酉相似于三对角矩阵
- 矩阵的满秩分解
  - 设$A \in \mathbf{C}_r^{m\times n}$，则使用初等行变换可将$A$化为Hermite标准型
  - 设$A \in \mathbf{C}_r^{m\times n}(r > 0)$，则$A$的满秩分解总存在

主要结论

- 矩阵的奇异值分解
  - 酉等价矩阵有相同的奇异值
  - 设$A \in \mathbf{C}_r^{m\times n}(r > 0)$，则$A$的奇异值分解总存在
  - 对任意方阵可以进行极分解

矩阵分解的计算方法

- 三角分解的紧凑计算格式
  - Doolittle分解、 Crout分解、 Cholesky分解
- 矩阵的QR分解
  - Schmidt正交化、 Householder变换、 Givens变换
- 矩阵的满秩分解
  - 逆矩阵法、 Hermite标准型法
- 矩阵的奇异值分解
  - 直接构造：1）求$A^H A$的特征值和特征向量；2）计算U_1并扩展称酉矩阵
  - 试算验证：分别求$A^H A$和AA^H的特征值和特征向量

习题四：矩阵分解

1. 已知$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$，求$A$的Doolittle分解.

2. 已知$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求$A$的QR分解.

3. 已知$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$，求$A$的满秩分解.

习题四：矩阵分解

4. 已知$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$，求$A$的奇异值分解.

5. 已知A的奇异值分解为$A=$ $(U_1 \quad U_2)\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(V_1 \quad V_2)^H$，求$B=\begin{pmatrix}A\\ A\end{pmatrix}$的奇异值分解.

课程内容

第一章：矩阵的相似变换

第二章：范数理论

第三章：矩阵分析

第四章：矩阵分解

第五章：特征值的估计与表示

第六章：广义逆矩阵

第七章：矩阵的特殊乘积

第八章：线性空间与线性变换

基本概念

- 特征值的估计
  - 矩阵的盖尔圆
  - 矩阵的Ostrowski圆
  - 矩阵的Cassini卵形
- 特征值的表示
  - Hermite矩阵的Rayleigh商
  - 广义特征值问题
  - 广义Rayleigh商

主要结论

- 特征值的界
  - 谱半径与矩阵范数的关系
  - 特征值实部和虚部的界
  - 实矩阵特征值虚部的界
  - 特征值模的平方和的界
- 特征值的包含区域
  - 盖尔圆：圆盘定理1、圆盘定理2
  - Ostrowski圆：Ostrowski定理1
  - Cassini卵形：Ostrowski定理2

主要结论

- Hermite矩阵特征值的表示
  - Hermite矩阵的最大和最小特征值分别是Rayleigh商的最大值和最小值
  - Hermite矩阵的任意特征值可由Rayleigh商在特征向量组成的子空间的最大或最小值表示
  - 特征值的极小极大原理和极大极小原理
- 广义特征值的性质与表示
  - 性质1-3
  - Hermite矩阵特征值表示的推广

常用方法

- 特征值的隔离
  - 用对角矩阵进行相似变换
- 求广义特征值
  - 直接法
  - 转化法

习题五：特征值的估计与表示

1. 已知$A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，应用盖尔圆定理证明$A$至少有两个实特征值.

2. 设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$是Hermite矩阵，$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n$是$A$的$n$个特征值，证明

$$\lambda_s=\max_{P\in\mathbf{C}^{n\times(n-s)}}\min\left\{\frac{x^HAx}{x^Hx}\middle|x\in\mathbf{C}^n,x\neq0,P^Tx=0\right\},1\le s<n$$