矩阵分析

第七章　矩阵的特殊乘积

7.1 直积的定义与性质
7.2 直积的应用
7.3 Hadamard积

7.1　直积的定义和性质

【定义7. 1】设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{p\times q}$,称如下的分块矩阵

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

为A与B的直积或Kronecker积。

【例7.1 】 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B=(2,-1)$, 则

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} B & 2B \\ 3B & 4B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 6 & -3 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B\otimes A=(2A \quad -A)=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & -2 \\ 6 & 8 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

7.1　直积的定义和性质

【定义7. 1】设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{p\times q}$,称如下的分块矩阵

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

为A与B的直积或Kronecker积。

【例 】 设 $A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} \mu_1 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}$ 则

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} \lambda_1\begin{bmatrix} \mu_1 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} \mu_1 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} \\ 0\begin{bmatrix} \mu_1 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} & \lambda_2\begin{bmatrix} \mu_1 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1 & 0 & \mu_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1\mu_2 & \lambda_1 & 0 & \mu_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1\mu_3 & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\mu_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2\mu_3 \end{bmatrix}$$

7.1　直积的定义和性质

【定义7. 1】设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{p\times q}$,称如下的分块矩阵

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

为A与B的直积或Kronecker积。

上三角矩阵的直积仍为上三角

【例 】 设 $A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} \mu_1 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}$ 则

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} \lambda_1\begin{bmatrix} \mu_1 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} \mu_1 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} \\ 0\begin{bmatrix} \mu_1 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} & \lambda_2\begin{bmatrix} \mu_1 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1 & 0 & \mu_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1\mu_2 & \lambda_1 & 0 & \mu_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1\mu_3 & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\mu_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2\mu_3 \end{bmatrix}$$

7.1　直积的定义和性质

【定义7. 1】设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{p\times q}$,称如下的分块矩阵

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

为A与B的直积或Kronecker积。

【注意】 1、 $A\otimes B$ 是$(mp)\times(nq)$矩阵

2、它是以$a_{ij}B$为 子块的分块矩阵。

3、矩阵的直积不满足交换律，但有

$$I_n\otimes I_m=I_m\otimes I_n=I_{mn}$$

7.1　直积的定义和性质

矩阵的直积具有下列基本性质：

性质1　设 k 为常数，则

$$k(A\otimes B)=(kA)\otimes B=A\otimes(kB)$$

性质2　设 A_1与A_2 为同阶矩阵，则

$$(A_1+A_2)\otimes B=A_1\otimes B+A_2\otimes B$$

$$B\otimes(A_1+A_2)=B\otimes A_1+B\otimes A_2$$

性质3　$(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$，$(A\otimes B)^H=A^H\otimes B^H$

7.1 直积的定义和性质

【性质4】 矩阵的直积满足结合律，即

$$(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C) \qquad (7.2)$$

【证】 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则由定义7.1可得

$$(A\otimes B)\otimes C=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}\otimes C$$

$$=\begin{bmatrix} (a_{11}B)\otimes C & \cdots & (a_{1n}B)\otimes C \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{m1}B)\otimes C & \cdots & (a_{mn}B)\otimes C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}(B\otimes C) & \cdots & a_{1n}(B\otimes C) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(B\otimes C) & \cdots & a_{mn}(B\otimes C) \end{bmatrix}$$

$$=A\otimes(B\otimes C)$$

7.1 直积的定义和性质

【性质5】 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{p\times q}, C=(c_{ij})_{n\times s}, D=(d_{ij})_{q\times t}$，

则 $(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD) \qquad (7.3)$

【证】 $(A\otimes B)(C\otimes D)$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1s}D \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1}D & \cdots & c_{ns}D \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n}(a_{1k}B)(c_{k1}D) & \cdots & \sum_{k=1}^{n}(a_{1k}B)(c_{ks}D) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n}(a_{mk}B)(c_{k1}D) & \cdots & \sum_{k=1}^{n}(a_{mk}B)(c_{ks}D) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n}a_{1k}c_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n}a_{1k}c_{ks} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n}a_{mk}c_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n}a_{mk}c_{ks} \end{bmatrix}\otimes(BD)$$

$$=(AC)\otimes(BD)$$

7.1 直积的定义和性质

【性质6 】 设 $A\in C^{m\times m}$与$B\in C^{n\times n}$都是可逆矩阵

则 $A\otimes B$ 也可逆，且有

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1} \qquad (7.4)$$

【证】 根据性质5可得

$$(A\otimes B)(A^{-1}\otimes B^{-1})=(AA^{-1})\otimes(BB^{-1})$$

$$=I_m\otimes I_n=I_{mn}.$$

故 $A\otimes B$ 可逆，且式 (7.4) 成立。

【性质7 】 设 $A\in C^{m\times m}$与$B\in C^{n\times n}$都是酉矩阵，

则 $A\otimes B$ 也是酉矩阵。

7.1 直积的定义和性质

下面讨论矩阵直积的特征值问题。

【定理7.1】 设 $A\in C^{m\times m}$的全体特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$

$B\in C^{n\times n}$ 全体特征值为 μ_1，μ_2,…，μ_n，那么

(1) $A\otimes B$的全体特征值为 $\lambda_i\mu_j \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$;

(2) $A\otimes I_n+I_m\otimes B^T$的全体特征值为 $\lambda_i+\mu_j \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$;

7.1 直积的定义和性质

下面讨论矩阵直积的特征值问题。

【定理7.1】 设 $A\in C^{m\times m}$的全体特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$

$B\in C^{n\times n}$ 全体特征值为 μ_1，μ_2,…，μ_n，那么

(1) $A\otimes B$的全体特征值为 $\lambda_i\mu_j \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$;

(2) $A\otimes I_n+I_m\otimes B^T$的全体特征值为 $\lambda_i+\mu_j \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$;

定理 1.9(Jordan) 设 $A\in C^{n\times n}$，则 A 与一个 Jordan 矩阵 J 相似，即存在$P\in C_n^{n\times n}$，使得 $P^{-1}AP=J$. 这个 Jordan 矩阵 J 除 Jordan 块的排列次序外由 A 唯一确定，称 J 为 A 的 Jordan 标准形.

7.1 直积的定义和性质

下面讨论矩阵直积的特征值问题。

【定理7.1】 设 $A\in C^{m\times m}$的全体特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$

$B\in C^{n\times n}$ 全体特征值为 μ_1，μ_2,…，μ_n，那么

(1) $A\otimes B$的全体特征值为 $\lambda_i\mu_j \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$;

(2) $A\otimes I_n+I_m\otimes B^T$的全体特征值为 $\lambda_i+\mu_j \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$;

【证】 (1) 对于矩阵A与B，存在可逆矩阵 P 与 $\tilde{P}$，使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_{m-1} \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}=J,\quad \tilde{P}^{-1}B\tilde{P}=\begin{bmatrix} \mu_1 & \tilde{\delta}_1 & & \\ & \mu_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \tilde{\delta}_{n-1} \\ & & & \mu_n \end{bmatrix}=\tilde{J}$$

其中$\delta_i,\tilde{\delta}_j$代表1或0,

7.1 直积的定义和性质

下面讨论矩阵直积的特征值问题。

【定理7.1】 设 $A\in \boldsymbol{C}^{m\times m}$ 的全体特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$

$B\in C^{n\times n}$ 全体特征值为 μ_1，$\mu_2,\cdots$，μ_n，那么

(1) $A\otimes B$ 的全体特征值为 $\lambda_i\mu_j\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$;

(2) $A\otimes I_n+I_m\otimes B^T$ 的全体特征值为 $\lambda_i+\mu_j\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$;

【证】 (1) 对于矩阵A与B，存在可逆矩阵P与 $\tilde{P}$,

于是有 $(P\otimes\tilde{P})^{-1}(A\otimes B)(P\otimes\tilde{P})$

$=(P^{-1}AP)\otimes(\tilde{P}^{-1}B\tilde{P})=J\otimes\tilde{J}$

易知，$J\otimes\tilde{J}$ 是上三角矩阵，而$A\otimes B$相似于$J\otimes\tilde{J}$,

故$A\otimes B$的全体特征值为$J\otimes\tilde{J}$的主对角线元素，

即$\lambda_i\mu_j\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

7.1 直积的定义和性质

下面讨论矩阵直积的特征值问题。

【定理7.1】 设 $A\in \boldsymbol{C}^{m\times m}$ 的全体特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$

$B\in C^{n\times n}$ 全体特征值为 μ_1，$\mu_2,\cdots$，μ_n，那么

(1) $A\otimes B$ 的全体特征值为 $\lambda_i\mu_j\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$;

(2) $A\otimes I_n+I_m\otimes B^T$ 的全体特征值为 $\lambda_i+\mu_j\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$;

【证】 (2) 对于矩阵A与B^T，存在可逆矩阵 P 与 $\hat{P}$，使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \delta_1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_{m-1} \\ & & & \lambda_m\end{bmatrix}=J,\quad \hat{P}^{-1}B\hat{P}=\begin{bmatrix}\mu_1 & \hat{\delta}_1 & & \\ & \mu_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \hat{\delta}_{n-1} \\ & & & \mu_n\end{bmatrix}=\hat{J}$$

其中$\delta_i,\hat{\delta}_j$代表1或0,

7.1 直积的定义和性质

下面讨论矩阵直积的特征值问题。

【定理7.1】 设 $A\in \boldsymbol{C}^{m\times m}$ 的全体特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$

$B\in C^{n\times n}$ 全体特征值为 μ_1，$\mu_2,\cdots$，μ_n，那么

(1) $A\otimes B$ 的全体特征值为 $\lambda_i\mu_j\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$;

(2) $A\otimes I_n+I_m\otimes B^T$ 的全体特征值为 $\lambda_i+\mu_j\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$;

【证】 (2)对于矩阵A与B^T，存在可逆矩阵P与 $\hat{P}$,

于是有 $(P\otimes\hat{P})^{-1}(A\otimes I_n+I_m\otimes B^T)(P\otimes\hat{P})$

$=(P^{-1}AP)\otimes(\hat{P}^{-1}I_n\hat{P})+(P^{-1}I_mP)\otimes(\hat{P}^{-1}B^T\hat{P})$

$=J\otimes I_n+I_m\otimes\hat{J}$

易知，$J\otimes I_n+I_m\otimes\hat{J}$ 是上三角矩阵，

$A\otimes I_n+I_m\otimes B^T$的全体特征值为$J\otimes I_n+I_m\otimes\hat{J}$

的主对角线元素，即$\lambda_i+\mu_j\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

7.1 直积的定义和性质

下面讨论矩阵直积的特征值问题。

【定理7.1】 设 $A\in \boldsymbol{C}^{m\times m}$ 的全体特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$

$B\in C^{n\times n}$ 全体特征值为 μ_1，$\mu_2,\cdots$，μ_n，那么

(1) $A\otimes B$ 的全体特征值为 $\lambda_i\mu_j\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$;

(2) $A\otimes I_n+I_m\otimes B^T$ 的全体特征值为 $\lambda_i+\mu_j\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$;

【推论】矩阵A与B条件同上

则$A\otimes I_n+I_m\otimes B^T$可逆的充分必要条件是

$\lambda_i+\mu_j\neq 0\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

7.1 直积的定义和性质

下面讨论矩阵直积的特征值问题。

【例7.2】设$\vec{x}$是$A\in C^{m\times m}$的特征向量，$\vec{y}$是$B\in C^{n\times n}$的特征向量，证明：$\vec{x}\otimes\vec{y}$是$A\otimes B$的特征向量。

【证】 设 $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$, $B\vec{y}=\mu\vec{y}$, 则由性质5可得

$(A\otimes B)(\vec{x}\otimes\vec{y})=(A\vec{x})\otimes(B\vec{y})$

$=(\lambda\vec{x})\otimes(\mu\vec{y})=(\lambda\mu)(\vec{x}\otimes\vec{y})$

即$\vec{x}\otimes\vec{y}$是$A\otimes B$的对应于特征值$\lambda\mu$的特征向量。

7.1 直积的定义和性质

下面讨论矩阵直积的特征值问题。

【例7.3】设 $A\in C^{n\times n}$，证明：

$$e^{I\otimes A}=I\otimes e^A,\qquad e^{A\otimes I}=e^A\otimes I \qquad (7.5)$$

【证】根据矩阵幂级数的定义，并利用性质5和性质2可得

$$e^{I\otimes A}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(I\otimes A)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(I\otimes A^k)$$

$$=I\otimes\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^k\right)=I\otimes e^A$$

同理可证另一结论。

$$e^A=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^k \qquad (\forall A\in C^{n\times n})$$

7.1　直积的定义和性质

下面讨论矩阵直积的特征值问题。

【例7.4】 设 $A\in C^{m\times m}, B\in C^{n\times n}$,证明:

$$e^{(A\otimes I_n+I_m\otimes B)}=e^A\otimes e^B=e^B\otimes e^A \qquad (7.6)$$

【证】 因为

$$(A\otimes I_n)(I_m\otimes B)=A\otimes B=(I_m\otimes B)(A\otimes I_n)$$

所以根据定理3.10和例7.5可得

$$e^{(A\otimes I_n+I_m\otimes B)}=e^{A\otimes I_n}e^{I_m\otimes B}$$

$$=(e^A\otimes I_n)(I_m\otimes e^B)=e^A\otimes e^B$$

同理可证另一等式。

定理 3.10　设 $A,B\in C^{n\times n}$,且 $AB=BA$,则

(1) $e^{A+B}=e^Ae^B=e^Be^A$;

7.1　直积的定义和性质

下面讨论矩阵直积的特征值问题。

【例7.5】 设 $A\in C^{m\times m}, B\in C^{n\times n}$, 证明:

$$\det(A\otimes B)=(\det A)^n(\det B)^m \qquad (7.7)$$

【证】 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2,\cdots, \lambda_m$, B 的特征值为 $\mu_1, \mu_2,\cdots, \mu_n$,

由定理7.1知,

$A\otimes B$ 的特征值为 $\lambda_i\mu_j \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$.

于是可得

$$\det(A\otimes B)=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j=\left(\prod_{i=1}^{m}\lambda_i\right)^n\left(\prod_{j=1}^{n}\mu_j\right)^m$$

$$=(\det A)^n(\det B)^m$$

7.2　直积的应用

1、矩阵的拉直及其与直积的关系

【定义7.2】 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,称 mn 维列向量

$$\vec{A}=(a_{11},\cdots,a_{1n},a_{21},\cdots,a_{2n},\cdots a_{m1},\cdots,a_{mn})^T \qquad (7.8)$$

为矩阵 A 的（按行）拉直。

例如:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix},\ \text{则}\ \vec{A}=(1,2,3,4,5,6)^T.$$

2、矩阵的拉直有以下的基本性质:

性质1　设 $A,B\in C^{m\times n}$,k 与 l 为常数,

则 $\overrightarrow{(kA+lB)}=k\vec{A}+l\vec{B}$.

性质2　设 $A(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$,　则 $\dfrac{\overrightarrow{dA(t)}}{dt}=\dfrac{d\,\overrightarrow{A(t)}}{dt}$.

7.2　直积的应用

【定理7.2】 设 $A\in C^{m\times n},X\in C^{n\times p},B\in C^{p\times q}$,则 $\overrightarrow{AXB}=(A\otimes B^T)\vec{X}$.

【证】 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, 将 X^T 按列分块,即 $X^T=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_n)$,

$$\text{则}\ AXB=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\cdots&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{x}_1^T\\ \vdots\\ \vec{x}_n^T\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}(a_{11}\vec{x}_1^T+\cdots+a_{1n}\vec{x}_n^T)B\\ \vdots\\ (a_{m1}\vec{x}_1^T+\cdots+a_{mn}\vec{x}_n^T)B\end{bmatrix},\vec{X}=\begin{bmatrix}\vec{x}_1\\ \vdots\\ \vec{x}_n\end{bmatrix}$$

从而

$$\overrightarrow{AXB}=((a_{11}\vec{x}_1^T+\cdots+a_{1n}\vec{x}_n^T)B,\cdots,(a_{m1}\vec{x}_1^T+\cdots+a_{mn}\vec{x}_n^T)B)^T$$

$$=\begin{bmatrix}B^T(a_{11}\vec{x}_1+\cdots+a_{1n}\vec{x}_n)\\ \vdots\\ B^T(a_{m1}\vec{x}_1+\cdots+a_{mn}\vec{x}_n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}B^T&\cdots&a_{1n}B^T\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}B^T&\cdots&a_{mn}B^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{x}_1\\ \vdots\\ \vec{x}_n\end{bmatrix}$$

$$=(A\otimes B^T)\vec{X}$$

7.2　直积的应用

【定理7.2】 设 $A\in C^{m\times n},X\in C^{n\times p},B\in C^{p\times q}$,则 $\overrightarrow{AXB}=(A\otimes B^T)\vec{X}$.

【例】 解下列矩阵方程: $\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\2&1\end{bmatrix}$

【解】 方程两边按行拉直:

$$\begin{bmatrix}0&2&0&1\\2&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\2\\1\end{bmatrix}\quad \text{解得:}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\1\\2\end{bmatrix}\quad \text{即:}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&1\\1&2\end{bmatrix}$$

【推论】 设 $A\in C^{m\times n},B\in C^{n\times n},X\in C^{m\times n}$, 则有

$$\overrightarrow{AX}=(A\otimes I_n)\vec{X},\ \overrightarrow{XB}=(I_m\otimes B^T)\vec{X} \qquad (7.9)$$

$$\overrightarrow{AX+XB}=(A\otimes I_n+I_m\otimes B^T)\vec{X}$$

7.2　直积的应用

3、线性矩阵方程的可解性及其求解

类型 I　设 $A\in C^{m\times m},B\in C^{n\times n},F\in C^{m\times n}$,

解Lyapunov矩阵方程

$$AX+XB=F \qquad (7.10)$$

$$\Longrightarrow\quad (A\otimes I_n+I_m\otimes B^T)\vec{X}=\vec{F} \qquad (7.11)$$

因为矩阵方程(7.10)与线性方程组(7.11)等价，根据线性方程组的可解性判别条件可得：矩阵方程(7.10)有解的充分必要条件是

$$rank(A\otimes I_n+I_m\otimes B^T\,|\,\vec{F})=rank(A\otimes I_n+I_m\otimes B^T)$$

有唯一解的充分必要条件是:

$$\det(A\otimes I_n+I_m\otimes B^T)\neq 0$$

即 A 与 B 无互为反号的特征值(定理7.1的推论)。

【例7.6】解矩阵方程 $AX+XB=F$ 其中

(1) $A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&4\\1&0\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}1&3\\-2&2\end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&4\\0&-1\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}0&5\\2&9\end{bmatrix}$

【解】(1) A的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$;

B的特征值为 $\mu_1=1$, $\mu_2=-4$.

A与B无互为反号的特征值，故矩阵方程有唯一解。设

$$X=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix},$$

将矩阵方程转化为线性方程组(7. 11)的形式

【例7.6】解矩阵方程 $AX+XB=F$ 其中

(1) $A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&4\\1&0\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}1&3\\-2&2\end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&4\\0&-1\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}0&5\\2&9\end{bmatrix}$

【解】(1)
$$\begin{bmatrix}-2&1&-1&0\\4&1&0&-1\\0&0&-1&1\\0&0&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\\2\end{bmatrix}$$

可求得 $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=1$, $x_4=-1$,

于是矩阵方程的惟一解为 $X=\begin{bmatrix}0&2\\1&-1\end{bmatrix}$

【例7.6】解矩阵方程 $AX+XB=F$ 其中

(1) $A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&4\\1&0\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}1&3\\-2&2\end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&4\\0&-1\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}0&5\\2&9\end{bmatrix}$

【解】 (2) A的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$;

B的特征值为 $\mu_1=-3$, $\mu_2=-1$.

易见 $\lambda_1+\mu_2=0$. 设 $X=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$,

【例7.6】解矩阵方程 $AX+XB=F$ 其中

(1) $A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&4\\1&0\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}1&3\\-2&2\end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&4\\0&-1\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}0&5\\2&9\end{bmatrix}$

【解】 (2) 将矩阵方程转化为线性方程组(7. 11)的形式

$$\begin{bmatrix}-2&0&-1&0\\4&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&0&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\5\\2\\-9\end{bmatrix}$$

通解为 $X=\begin{bmatrix}1&0\\-2&-1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ (c为任意常数)

7.2 直积的应用

3、线性矩阵方程的可解性及其求解

类型II 设 $A_k\in C^{m\times n}, B_k\in C^{p\times q}, F\in C^{m\times q}$,

解一般的线性矩阵方程

$$\sum_{k=1}^{r}A_kXB_k=F \qquad (r=1,2,\cdots) \tag{7. 12}$$

$$\Rightarrow (\sum_{k=1}^{r}(A_k\otimes B_k^T))\vec{X}=\vec{F} \tag{7. 13}$$

因为矩阵方程(7. 12)与线性方程组(7. 13)等价，所以它们有解的充分必要条件是:

$$rank(\sum_{k=1}^{r}(A_k\otimes B_k^T)\big|\vec{F})=rank(\sum_{k=1}^{r}(A_k\otimes B_k^T))$$

【例7.8】 求矩阵方程 $A_1XB_1+A_2XB_2=F$,其中

$A_1=\begin{bmatrix}2&2\\2&-1\end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-1\end{bmatrix}$, $B_1=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}$

$B_2=\begin{bmatrix}0&2\\-1&3\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}4&-6\\3&6\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$

【解】 将矩阵方程转化为线性方程组(7. 13)的形式

$$\begin{bmatrix}2&-2&2&-3\\0&2&2&5\\2&0&-1&2\\-4&-4&-2&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-6\\3\\6\end{bmatrix}$$

于是矩阵方程的唯一解为 $X=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&0\end{bmatrix}$

7.2 直积的应用

3、线性矩阵方程的可解性及其求解

类型III 设 $A\in C^{m\times m}, B\in C^{n\times n}, X(t)\in C^{m\times n}$,

求解矩阵微分方程

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= AX(t)+X(t)B \\ X(0) &= X_0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.15)$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{X(t)}}{dt} &= (A\otimes I_n + I_m\otimes B^T)\overrightarrow{X(t)} \\ \overrightarrow{X(0)} &= \overrightarrow{X_0} \end{aligned}\right\} \qquad (7.16)$$

根据§3.5及例7.4的结果可得其解为:

$$\overrightarrow{X(t)} = e^{(A\otimes I_n + I_m\otimes B^T)t}\overrightarrow{X_0} = (e^{At}\otimes e^{B^Tt})\overrightarrow{X_0} = \overrightarrow{e^{At}X_0(e^{B^Tt})^T}$$

因为

$$(e^{B^Tt})^T = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(B^T)^k t^k\right)^T = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}B^k t^k = e^{Bt}$$

所以 (7.15)的解为 $X(t) = e^{At}X_0e^{Bt}$

7.3 Hadamard积

【定义7.3】设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{p\times q}$,称如下矩阵

$$A\circ B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}$$

为A与B的Hadamard积或Schur积。

【例】 设 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$,则

$$A\circ B = \begin{bmatrix}1\times5 & 2\times6\\ 3\times7 & 4\times8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5&12\\21&32\end{bmatrix}$$

7.3 Hadamard积

矩阵的Hadamard积具有下列基本性质:

性质1

$A\circ B = B\circ A, k(A\circ B) = k(A)\circ B = A\circ(kB).$

性质2

$(A+B)\circ C = A\circ B + A\circ C, A\circ(B\circ C) = (A\circ B)\circ C$

性质3 $(A\circ B)^T = A^T\circ B^T$, $(A\circ B)^H = A^H\circ B^H$

7.3 Hadamard积

矩阵的Hadamard积具有下列基本性质:

性质4

如果A和B都是对称矩阵,则$A\circ B$也是对称矩阵;

如果A和B都是反对称矩阵,则$A\circ B$是对称矩阵;

如果A是对称矩阵,B是反对称矩阵,则$A\circ B$是反对称矩阵;

性质5

设$A,B\in C^{m\times n}$,又设D和E分别为m阶和n阶对角矩阵,则

$D(A\circ B)E = (DAE)\circ B = (DA)\circ(BE) = (AE)\circ(DB) = A\circ(DBE)$

7.3 Hadamard积

矩阵的Hadamard积具有下列基本性质:

性质6

设$A,B\in C^{m\times n}, X = diag(x_1,\cdots,x_n), x=(x_1,\cdots,x_n)^T$,则

$(AXB^T)_{ii} = ((A\circ B)x)_i, i=1,\cdots,m$

性质7

设$A,B,C\in C^{m\times n}$,则三重混合积$(A\circ B)C^T$和$(A\circ C)B^T$对应的对角元素相同,即

$((A\circ B)C^T)_{ii}$=$((A\circ C)B^T)_{ii}$

7.3 Hadamard积

矩阵的Hadamard积具有下列基本定理:

【定理7.3】

设$A,B\in C^{m\times n}$,则$rank(A\circ B)\le rank(A)rank(B)$

注意:$rank(A\otimes B) = rank(A)rank(B)$

【定理7.4】

设A和B为n阶**Hermite**(半)正定矩阵,

则$A\circ B$为**Hermite**(半)正定矩阵

定理 1.25 设 $A\in C^{n\times n}$ 是 Hermite 矩阵,则下列条件等价:

(1) A 是 Hermite 半正定矩阵;

(2) A 的特征值全为非负实数;

(3) 存在矩阵 $P\in C^{n\times n}$,使得 $A=P^HP$.

7.3 Hadamard积

矩阵的Hadamard积具有下列基本定理：

【定理7.4推论】

1）设A为n阶Hermite正定矩阵，B为n阶Hermite半正定矩阵且$b_{ii}>0$，则$A\circ B$为Hermite正定矩阵

2）$A\in R^{n\times n}$为半正定矩阵的充要条件：

对所有半正定矩阵B有$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}\geq 0$

7.3 Hadamard积

矩阵的Hadamard积具有下列基本定理：

【定理7.5】

设$A,B\in C^{m\times n}$，则

$(A\circ B)[i][j]=(A\otimes B)[(i-1)m+i][(j-1)m+j]$

本章小结

一、矩阵的直积的概念与性质(7条)

【定义7.1】设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{p\times q}$，称如下的分块矩阵

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

为A与B的直积或Kronecker积。

【定理7.1】（有关直积特征值） 【定理7.2】（有关直积运算）

二、矩阵的直积在解矩阵方程中的应用

类型Ⅰ　类型II　类型III

三、矩阵的Hadamard积

作业题

8. 求解矩阵方程 $AX+XB=F$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

- 提交方式：对分易 -> 作业
- 请上传您的电子版答案（5月14日23：00前提交）
- 格式：.PDF，.JPG，.PNG
- 可手写扫描，也可LaTex或Word编辑

谢谢！