第二章：范数理论

向量的范数

- 范数的定义
  - 定义2. 1：（绝对值的推广，研究分析性质）
    若对任意$x \in C^n$都有一个实数$\|x\|$与之对应，且满足

    (1)正定性　$\forall x \in \mathrm{C}^n$，$\|x\| \geq 0$且$\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$;

    (2)齐次性　$\forall \lambda \in \mathrm{C}, x \in \mathrm{C}^n$，$\|\lambda x\|=|\lambda| \cdot \|x\|$;

    (3)三角不等式　$\forall x, y \in \mathrm{C}^n$，$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

    则称$\|x\|$为C^n上向量x的范数.
  - 向量长度的性质

向量范数的性质

- 定理2. 1：　对任意$x, y \in \mathrm{C}^n$,有

$$(1)\|-x\|=\|x\|$$

$$(2)\big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \|x-y\|$$

- 证明（2）：

$$\because \|x\|=\|x-y+y\| \leq \|x-y\|+\|y\|,$$

$$\|y\|=\|y-x+x\| \leq \|y-x\|+\|x\|$$

$$故, \big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \|x-y\|$$

常用的向量范数

- 设　$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathrm{C}^n$.

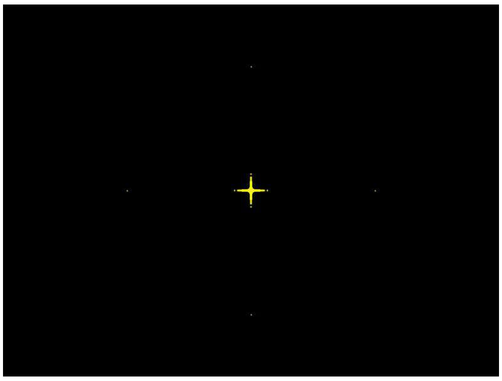
1范数：$\|x\|_1=\sum_{i=1}^n |x_i|$

2范数：$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

p范数：$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$，$1 \leq p<+\infty$

∞范数：$\|x\|_\infty=\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

p范数示意图



Unit circles in p-norms 0.1 through 2 (image from Wikipedia)

1范数

- 验证满足三角不等式
  - 设　$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T \in \mathrm{C}^n$,

则　$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)^T$

$$\|x+y\|_1=\sum_{i=1}^n |x_i+y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)$$

$$=\sum_{i=1}^n |x_i|+\sum_{i=1}^n |y_i|=\|x\|_1+\|y\|_1.$$

2范数

- 酉不变性（旋转不变性）
  - 对任意$x \in C^n$和任意的n阶酉矩阵U, 有

$$\|Ux\|_2 = \sqrt{x^H U^H U x} = \|x\|_2$$

p范数

- 引理2.1（Young不等式）：

$$\forall \alpha, \beta \geq 0, \text{都有}$$

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

- 其中 $1 \leq p, q < \infty$且$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

p范数

- 定理2.2（Hölder不等式）：

$\forall x_i, y_i \in C^n,\ i = 1, 2, \cdots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

- 其中 $1 \leq p, q < \infty$且$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

p范数

- 验证三角不等式（Minkowski不等式）

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

  - 向量形式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

p范数

- 定理2.3：$\forall x \in C^n,\ \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$

证明：$\vec{x} = \vec{o}$ 时，显然成立。

$\vec{x} \neq \vec{o}$ 时，令 $|x_t| = \max_i |x_i| = \|\vec{x}\|_\infty$

$$\therefore \|\vec{x}\|_\infty = |x_t| = \left(|x_t|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|\vec{x}\|_p \leq \left(n|x_t|^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} |x_t| = n^{\frac{1}{p}} \|\vec{x}\|_\infty$$

$\because \lim_{p\to+\infty} n^{\frac{1}{p}} = 1$ 所以由夹逼定则有 $\lim_{p\to+\infty} \|\vec{x}\|_p = \|\vec{x}\|_\infty$

构造向量范数

- 定理2.4：设$A \in C_n^{m\times n}$（列满秩），$\|\cdot\|_a$是C^m上的一种向量范数. 对任意$x \in C^n$, 规定 $\|x\|_b = \|Ax\|_a$

则$\|\cdot\|_b$是C^n上的向量范数

证明：1、非负性证明

$\vec{x} = \vec{o}$ 时, $A\vec{x} = \vec{o}$ $\quad \therefore \|\vec{x}\|_b = \|A\vec{x}\|_a = 0$

$\vec{x} \neq \vec{o}$ 时，$\because A \in C_n^{n\times n}$ $\quad \therefore A\vec{x} \neq \vec{o}$

$\therefore \|\vec{x}\|_b = \|A\vec{x}\|_a > 0$

构造向量范数

- 定理2.4：设$A \in C_n^{m\times n}$（列满秩），$\|\cdot\|_a$是C^m上的一种向量范数. 对任意$x \in C^n$，规定 $\|x\|_b = \|Ax\|_a$
 则$\|\cdot\|_b$是C^n上的向量范数

证明：2、齐次性证明，设 $\lambda \in C, \vec{x} \in C^n$

$$\|\lambda\vec{x}\|_b = \|A(\lambda\vec{x})\|_a = |\lambda|\|A\vec{x}\|_a = |\lambda|\|\vec{x}\|_b$$

3、三角不等式 $\|\vec{x}+\vec{y}\|_b = \|A(\vec{x}+\vec{y})\|_a = \|A\vec{x}+A\vec{y}\|_a$

$\le \|A\vec{x}\|_a + \|A\vec{y}\|_a = \|\vec{x}\|_b + \|\vec{y}\|_b \quad \therefore \|\vec{x}\|_b$ 是向量范数

构造向量范数

- 例2.5 如果A是n阶Hermite正定矩阵，规定

$$\|x\|_A = \sqrt{x^H Ax},\ x \in \mathrm{C}^n$$

则$\|x\|_A$是C^n上的向量范数(椭圆范数).

证明：A 是正定Hermite矩阵 $A = P^H P$, P 可逆

则 $\|\vec{x}\|_A = \|P\vec{x}\|_2 = \sqrt{\vec{x}^H P^H P\vec{x}} = \sqrt{\vec{x}^H A\vec{x}}$ 是向量范数

向量范数的等价性

同一向量 $\vec{x}$，可取不同范数

如：$\vec{x} = (1,1,\cdots,1)^T \in C^n$

则 $\|\vec{x}\| = \sum|x_i| = n$

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2} = \sqrt{n}$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_i |x_i| = 1$$

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}$$

向量范数的等价性

- 定义2.2：
 - 设$\|\cdot\|_a$和$\|\cdot\|_b$是C^n上的两种向量范数. 如果存在正数α和β，使对任意$x \in C^n$都有

$$\alpha\|x\|_b \le \|x\|_a \le \beta\|x\|_b$$

 则称向量范数$\|\cdot\|_a$和$\|\cdot\|_b$等价

例：$\|\vec{x}\|_\infty \le \|\vec{x}\|_1 \le n\|\vec{x}\|_\infty$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_i |x_i| = |x_t| \le |x_1| + |x_2| + \cdots |x_t| + \cdots |x_n|$$

$$= \|\vec{x}_1\| \le n|x_t| = n\|\vec{x}\|_\infty$$

向量范数的等价性

- 定理2.5：C^n上的所有向量范数都等价

证明 $\varphi(x_1,x_2,\cdots x_n) = \|\vec{x}\|_a$ 是连续的

$$\vec{x}-\vec{y} = (x_1-y_1 \quad x_2-y_2 \quad \cdots \quad x_n-y_n)^T$$

$$= (x_1-y_1)\vec{e}_1 + (x_2-y_2)\vec{e}_2 + \cdots + (x_n-y_n)\vec{e}_n$$

$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots\vec{e}_n$ 是C^n 中的自然基 $\therefore \|\vec{e}_i\|_a$ 为常数

$$|\varphi(x_1,x_2,\cdots x_n) - \varphi(y_1,y_2,\cdots y_n)| = \left|\|\vec{x}\|_a - \|\vec{y}\|_a\right|$$

$$\le \|\vec{x}-\vec{y}\|_a = \left\|\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)\vec{e}_i\right\|_a \le \sum_{i=1}^n |x_i-y_i| \cdot \|\vec{e}_i\|_a$$

$\therefore \varphi(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 是连续的

向量范数的等价性

- 定理2.5：C^n上的所有向量范数都等价

令 $S = \{\vec{x} \mid \|\vec{x}\|_2 = 1 \quad \vec{x} \in C^n\}$ 则 S 是 C^n 中有界集（列紧）

$\therefore \varphi(x_1,x_2,\cdots x_n) = \|\vec{x}\|_a$ 在 S 上有最大、最小值 β,α,

$\forall \vec{x} \ne \vec{o} \quad \vec{x}' = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2} \in S \quad \therefore$ 有 $\alpha \le \|\vec{x}'\|_a \le \beta$

即 $\alpha \le \left\|\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2}\right\|_a = \dfrac{\|\vec{x}\|_a}{\|\vec{x}\|_2} \le \beta$ 或 $\alpha\|\vec{x}\|_2 \le \|\vec{x}\|_a \le \beta\|\vec{x}\|_2$

即向量的2范数与a范数是等价的

向量范数的等价性

- 定理2.5：C^n上的所有向量范数都等价

同理可证：$\|\cdot\|_b$ 向量范数有 $\alpha_0\|\vec{x}\|_2 \le \|\vec{x}\|_b \le \beta_0\|\vec{x}\|_2$

所以有：$\frac{\alpha}{\beta_0}\|\vec{x}\|_b \le \|\vec{x}\|_a \le \frac{\beta}{\alpha_0}\|\vec{x}\|_b$

即 $\|\vec{x}\|_a$ 与 $\|\vec{x}\|_b$ 等价

向量范数等价性的应用

- 定义2.3：给定C^n中的向量序列$\{x^{(k)}\}$，其中

$$x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}\right)^T \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

如果 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_j^{(k)} = x_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)$

则称向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛于$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，记作

$$\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = x$$

- 定理 2.6：C^n中向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛于x的充要条件是：对于C^n上任一种向量范数$\|\cdot\|$都有

$$\lim_{k\to+\infty}\left\|x^{(k)} - x\right\| = 0.$$

向量范数等价性的应用

证明： $\bar{x}^{(k)}$ 与 $\bar{x}$ 的记法同上

$$\because \left|\xi_i^{(k)} - \xi_i\right| \le \max_i\left|\xi_i^{(k)} - \xi_i\right| = \left\|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}\right\|_\infty \le \sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i^{(k)} - \xi_i\right|$$

$$\therefore \lim_{k\to+\infty} \xi_i^{(k)} = \xi_i \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty}\left\|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}\right\|_\infty = 0$$

由向量等价性，

$$\alpha\left\|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}\right\|_\infty \le \left\|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}\right\| \le \beta\left\|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}\right\|_\infty$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}\right\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\left\|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}\right\| = 0$

小结

- 向量的范数的概念与性质
- 向量范数等价性
- 向量序列收敛的充要条件

Assignment

- 徐仲、张凯院等.《矩阵论简明教程》,第三版.科学出版社出版.
  - 习题二：2、3(2)
  - 预习：2.2节矩阵范数