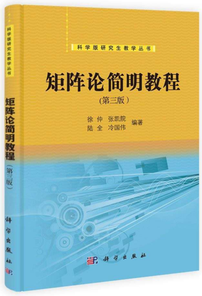
矩阵分析

马锦华

计算机学院
中山大学

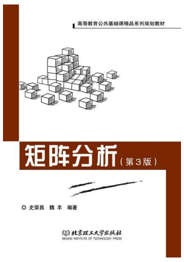
课程简介

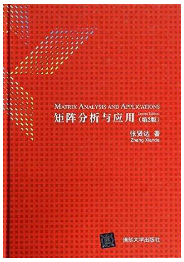
- 教材：
  - 徐仲、张凯院等，《矩阵论简明教程（第3版）》，科学出版社出版，2014.



课程简介

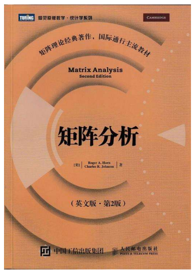
- 推荐书目：
  - 史荣昌、魏丰，《矩阵分析（第3版）》，北京理工大学出版社，2010.
  - 张贤达，《矩阵分析与应用（第2版）》，清华大学出版社，2013.

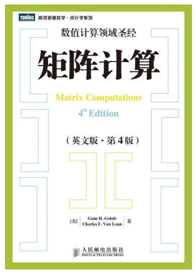




课程简介

- 推荐书目：
  - R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis (Second Edition)*, Cambridge University Press, 2012.
  - G. H. Golub and C. F. van Loan, *Matrix Computations (Fourth Edition)*, John Hopkins University Press, 2013.





课程简介

- 成绩评定：
  - 平时作业（40%）、期末考（60%）、考勤
- 课程内容：
  1. 矩阵的相似变换
  2. 范数理论
  3. 矩阵分析

  1-9周，马锦华

  4. 矩阵分解
  5. 特征值的估计与表示
  6. 广义逆矩阵

  10-18周，黎卫兵

  7. 矩阵的特殊乘积
  8. ~~线性空间与线性变换~~

课程简介

- 广泛的应用领域：
  - Signal processing, image processing, machine learning, optimization, computer vision, control, robotics, etc.
  - 大量使用矩阵操作
- 为众多科研课题提供必要基础：
  - Sparse representation, matrix completion, non-negative matrix factorization, structured low-rank matrix approximation

课程简介

What we see

0	3	2	5	4	7	6	9	8
3	0	1	2	3	4	5	6	7
2	1	0	3	2	5	4	7	6
5	2	3	0	1	2	3	4	5
4	3	2	1	0	3	2	5	4
7	4	5	2	3	0	1	2	3
6	5	4	3	2	1	0	3	2
9	6	7	4	5	2	3	0	1
8	7	6	5	4	3	2	1	0

What a computer sees

Source: S. Narasimhan

课程简介

- 通过本课程能学到
  - 如何运用矩阵进行运算操作（学习矩阵运算算法）
  - 哪些应用可以使用矩阵运算，或找到新的应用方向（应用矩阵运算算法）
  - 深入分析能力（理解所用算法可行的原因，并尝试提出新算法）
- 课件
  - https://pan.baidu.com/s/1U8jgAsZMFx6Lk6EdVbE_mQ
  - 提取码：w3bd

符号说明

$\overline{\boldsymbol{A}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置(即 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$)
$\boldsymbol{A}^{+}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 逆
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{D}}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Drazin 逆
$\boldsymbol{A}^{\#}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的群逆
$\vec{\boldsymbol{A}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的拉直
$\boldsymbol{A}^{(i,j,\cdots,l)}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\{i,j,\cdots,l\}$逆
$A\{i,j,\cdots,l\}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\{i,j,\cdots,l\}$逆的集合
$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的直积或 Kronecker 积
$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积或 Schur 积
$\boldsymbol{J}$	方阵的 Jordan 标准形
$\boldsymbol{J}_i$	第 i 个 Jordan 块

符号说明

$\boldsymbol{I}$	单位矩阵
$\boldsymbol{O}$	零矩阵
$\mathbf{0}$	零向量
$\boldsymbol{e}_i$	第 i 个分量为 1,其余分量为 0 的 n 维列向量
$\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$\det\boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数
$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹,$\boldsymbol{A}$ 的主对角元之和
$\rho(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径
$\lVert\boldsymbol{A}\rVert$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的范数
$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{R}^n$	实 n 维列向量集合,n 维实向量空间
$\mathbf{R}^{m\times n}$	实 $m\times n$ 矩阵集合
$\mathbf{R}_r^{m\times n}$	秩为 r 的实 $m\times n$ 矩阵集合

符号说明

$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{C}^n$	复 n 维列向量集合,n 维复向量空间
$\mathbf{C}^{m\times n}$	复 $m\times n$ 矩阵集合
$\mathbf{C}_r^{m\times n}$	秩为 r 的复 $m\times n$ 矩阵集合
$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积
$\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$	以 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为对角元素的 n 阶对角矩阵
$\mathrm{span}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s)$	由向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s$ 生成的子空间
$\psi(\lambda)$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式
$m_A(\lambda)$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式
$G_k(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 个 Gerschgorin 圆(盖尔圆)
$\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个奇异值
$\mathrm{Re}(\lambda)$	复数 λ 的实部
$\mathrm{Im}(\lambda)$	复数 λ 的虚部
$f(\lambda)\mid g(\lambda)$	多项式 $f(\lambda)$整除 $g(\lambda)$
$X\cap Y$	集合 X 与 Y 的交集
$X\cup Y$	集合 X 与 Y 的并集

符号说明

$\boldsymbol{\theta}$	线性空间 V 的零元
W_1+W_2	子空间 W_1 与 W_2 的和
$W_1\dot{+}W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的直和
V^n	n 维线性空间
$\dim V$	线性空间 V 的维数
$\mathbf{K}$	一般的数域
$\mathbf{K}^n$	数域 $\mathbf{K}$ 上 n 维向量的集合
$\mathbf{K}^{m\times n}$	数域 $\mathbf{K}$ 上 $m\times n$ 矩阵的集合
$\mathrm{P}[t]$	数域 $\mathbf{K}$ 上一元多项式的集合
$\mathrm{P}[t]_n$	数域 $\mathbf{K}$ 上次数不超过 n 的一元多项式集合
$\mathrm{C}[a,b]$	区间$[a,b]$上连续实函数的集合
$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域,$\boldsymbol{A}$ 的列空间
$\mathrm{N}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的核,$\boldsymbol{A}$ 的零空间
$\mathrm{R}(T)$	线性变换 T 的值域
$\mathrm{N}(T)$	线性变换 T 的核
$W^{\perp}$	子空间 W 的正交补

第一章：矩阵的相似变换

§1. 1　特征值与特征向量

- 有关定义回顾

  –特征值、特征向量

  定义1. 1：

  设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, 若存在数$\lambda \in \mathbf{C}$和$\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$使得

  $$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

  则称λ是A的特征值，$\boldsymbol{x}$称为A属于λ的特征向量

如：
$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则2是方阵$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$的特征值；$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$是关于2的特征向量

§1. 1　特征值与特征向量

- 有关定义回顾

  –特征矩阵、特征多项式

  若λ是A的特征值，$\boldsymbol{x}$为A属于λ的特征向量，则

  $$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \Leftrightarrow (\lambda I_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\text{有非零解}$$

  因此，$\det(\lambda I_n - A) = 0$

  $\det(\lambda I_n - A) = f_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_0$

  定义1. 2：

设$A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, 称$\lambda I_n - A$为$A$的特征矩阵，称$\det(\lambda I_n - A)$为$A$的特征多项式，称$\det(\lambda I_n - A) = 0$为$A$的特征方程

§1. 1　特征值与特征向量

- Remarks

(1) A 的特征值就是A 的特征方程$\det(\lambda I_n - A) = 0$ 的根

(2) n 阶方阵A 在复数范围内一定有n 个特征值

- 特征值与特征向量的求法

(1)求$\det(\lambda I_n - A) = 0$ 的n 个根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,它们即为$A$ 的全部特征值

(2)求解齐次方程组$(\lambda_i I_n - A)x = 0$,其非零解向量即为A 的对应特征值λ_i 的特征向量

求特征值与特征向量

- 例1. 1

  求下列矩阵的特征值与特征向量

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix};\ (2)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 解(1)

A 的特征多项式为

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = ?$$

行列式回顾

- 行列式的定义

$$|A| = \det(A) = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} \operatorname{sign}(j_1 j_2 \cdots j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

  –几何含义：类似于面积、体积

- 行列式的性质

  –Laplace展开

$$|A| = \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

$$\text{代数余子式}A_{ij} = (-1)^{i+j} \left|\mathbf{M}_{ij}\right|$$

求特征值与特征向量

- 解(1)

A 的特征多项式为

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

求特征值与特征向量

- 解(1):

所以A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-7$

当$\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解方程组$(2I-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

求特征值与特征向量

- 解(1):

当$\lambda_3=-7$时，解方程组$(-7I-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0.5\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$

求特征值与特征向量

- 解(2):

(2) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

A 的特征多项式为

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=2$，and

$$\left.\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}\right|_{\lambda=1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{row elementary operations}}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

求特征值与特征向量

- 解(2):

得基础解系 $x_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

- Remarks
  - 矩阵的2重特征值只有1个线性无关向量

§1.1 特征值与特征向量

- 定理1.1:

设λ_i是$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$的$r_i$重特征值(称$r_i$为特征值$\lambda_i$的代数重数)，对应$\lambda_i$有$s_i$个线性无关的特征向量(称$s_i$为特征值$\lambda_i$的几何重数)，则$1\le s_i\le r_i$.

- 简言之：矩阵特征值的几何重数小于或等于其代数重数
- 证明：利用秩定理、Jordan分解或Schur分解

矩阵多项式的特征值和特征向量

- **定义1.3：** 设$f(\lambda)$是λ的多项式
$$f(\lambda)=a_s\lambda^s+a_{s-1}\lambda^{s-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0,$$
对于$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，规定
$$f(A)=a_sA^s+a_{s-1}A^{s-1}+\cdots+a_1A+a_0I$$
称$f(A)$为矩阵A的多项式.
- **定理1.2：**

设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$A$的$n$个特征值为$\lambda_1$，$\lambda_2,\cdots$，$\lambda_n$，对应的特征向量为$x_1,x_2,\cdots,x_n$，则$f(A)$的特征值为$f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$，对应的特征向量仍为$x_1,x_2,\cdots,x_n$.
  - 推论：$f(A)=O \quad\Rightarrow\quad f(\lambda_i)=0,\forall i$

特征值与特征向量的性质

- **定理1.3：**

设λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_s是方阵A的互不相同的特征值，$x_1,x_2,\cdots,x_s$是分别与之对应的特征向量，则$x_1,x_2,\cdots,x_s$线性无关.（归纳法或利用线性相关性质证明）
  - 简言之：矩阵的属于不同特征值的特征向量线性无关
- **推论：定理1.4**

设λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_s是方阵A的互不相同的特征值，$x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ir_i}$是对应$\lambda_i$的线性无关的特征向量，则向量组$x_{11},x_{12},\cdots,x_{1r_1},\cdots,x_{s1},x_{s2},\cdots,x_{sr_s}$线性无关.

特征值与特征向量的性质

- **定理1.5：**

设n 阶方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值为λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_n，则

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\mathrm{tr}(A)$;

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det A$;

(3) A^T的特征值是λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_n，而A^H的特征值是$\bar\lambda_1$，$\bar\lambda_2,\cdots$，$\bar\lambda_n$
  - 注：$\mathrm{tr}(A)$表示矩阵A的迹，$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$
- **推论：0是A的特征值的充要条件是$\det(A)=0$.**

特征值与特征向量的性质

- **定理1.5的证明：**

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$
$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\ldots+\ldots$$
$$=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)$$

特征值与特征向量的性质

- **练习题**

例1 方阵 A 满足 $A^2=A$，证明 A 的特征值只有0或1.

证明：设 λ_0 是A任一特征值

记 $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda$

$\because f(A)=0$

由定理1.2知 $f(\lambda_0)=0$ 即 $\lambda_0{}^2-\lambda_0=0$

$\lambda_0=0 \quad or \quad \lambda_0=1$ 所以A的特征值只有0或1.

特征值与特征向量的性质

- **练习题**

例2 $A\in C^{3\times3}$特征值为1，2，3，求$3I-A$的特征值.

解：令 $f(\lambda)=3-\lambda$

•因为1，2，3是A的特征值，

由定理1.2知$f(1),f(2),f(3)$是$f(A)$特征值，即

2，1，0是$3I-A$特征值.

例3 利用性质求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$特征值$\lambda_1,\lambda_2$.

解：由特征值的性质 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=1+5=6\\ \lambda_1\lambda_2=|A|=7\end{cases}$ 解得 $\lambda_{1,2}=3\pm\sqrt{2}$

第一章：矩阵的相似变换

§1.2　矩阵的相似对角化

- 矩阵(方阵)相似

定义1.5：设$A,B\in\mathbf{C}^{n\times n}$,若存在可逆矩阵$P\in\mathbf{C}^{n\times n}$使得

$$P^{-1}AP=B$$

则称A与B相似，记为$A\sim B$.

定理1.7　设$A,B,C\in\mathbf{C}^{n\times n}$, 则

(1)自反性：$A\sim A$;

(2)对称性：若$A\sim B$,则$B\sim A$;

(3)传递性：若$A\sim B,B\sim C$,则$A\sim C$.

– 推论：相似关系是等价关系

矩阵(方阵)相似的性质

- 定理1.7（续）：

设$A,B\in\mathbf{C}^{n\times n}$, $A\sim B$, $f(\lambda)$是一多项式，则

(4) $rank(A)=rank(B)$;

(5) $f(A)\sim f(B)$; $\lambda A\sim\lambda B, A^m\sim B^m$

(7) A、B可逆时，有 $A^{-1}\sim B^{-1}$

(6) $\det(\lambda I-A)=\det(\lambda I-B)$,即$A$与$B$有相同的特征多项式，从而有相同的特征值.

– 证（6）：$\because A\sim B$, $\therefore\exists$可逆阵P使得 $P^{-1}AP=B$,

因此，$|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|$

$=|P^{-1}||\lambda I-A||P|=|\lambda I-A|$.

可对角化

- 相似对角化

– 定义1.6：

设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$,若$A$与一个对角矩阵相似，则称$A$可对角化.

– 矩阵可对角化的条件

定理1.8：

设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$,则$A$可对角化的充分必要条件是$A$有$n$个线性无关的特征向量.

– 注：在复数域可对角化的矩阵在实数域不一定可以

矩阵可对角化的条件

- Proof：

$\Rightarrow$ 若 $A\sim\Lambda=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$,则存在可逆阵$P$,使得

$$P^{-1}AP=\Lambda,$$

即

$$AP=P\Lambda,\ 令\ P=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n),$$

故

$$A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

矩阵可对角化的条件

- Proof（续）：

即，$A\beta_i=\lambda_i\beta_i, i=1,2,\cdots,n$,

因此，β_i 是A对应特征值λ_i的特征向量.

由于P是可逆的, 因此 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是线性无关.

$\Leftarrow$

若A有 n 个线性无关的特征向量$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$,则

$$A\beta_i=\lambda_i\beta_i, i=1,2,\cdots,n,$$

令 $P=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$, 则$P$ 是可逆的，且

矩阵可对角化的条件

- Proof（续）：

$$AP=(\lambda_1\beta_1,\lambda_2\beta_2,\cdots,\lambda_n\beta_n)=Pdiag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$$

即

$$P^{-1}AP=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},$$

也就是A可对角化.

矩阵可对角化的条件

- 推论1：

设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，如果$A$有$n$个不同的特征值，则$A$可对角化.

- 推论2：

设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$是$n$阶方阵$A$的所有互不相同的特征值，其重数分别为$r_1,r_2,\cdots,r_s$. 若对应$r_i$重特征值$\lambda_i$有$r_i$个线性无关的特征向量，则$A$可对角化.

对角化例子

- 例1.2

Whether the following matrices are similar to a digonal matrix, if yes, find a nonsingular matrix P such that

$$P^{-1}AP=\Lambda$$

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix};\qquad (2)\ A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&4\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$$

对角化例子

解（1）：

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

(1) 由例1.1求得矩阵的2重特征值$\lambda_1=\lambda_2=1$

只有一个线性无关向量，所以此矩阵不可对角化

对角化例子

- 解：

$$(2)\ A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&4\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$$

对角化例子

- 解： $(2)\ \because|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)$

$$\therefore\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=3,$$

thus, A is diagonalizable.

For $\lambda_1=1$, sovle the equation $(E-A)x=0$,

$$\begin{pmatrix}\lambda\text{-}2&\text{-}1&\text{-}1\\\text{-}2&\lambda\text{-}3&\text{-}4\\1&1&\lambda\text{+}2\end{pmatrix}_{\lambda=1}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-2&-2&-4\\1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix},\text{ that is}$$

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\2x_3=0\end{cases}$$

对角化例子

- **解（续）：**

from which we obtain an eigenvector $\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ of $\lambda_1 = 1$.

Similarly, for $\lambda_2 = -1$, we have an eigenvector $\beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

for $\lambda_3 = 3$, we have an eigenvector $\beta_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Let $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, then $P^{-1}AP = diag\{1, -1, 3\}$.

可对角化的应用

- **例1.3：** If $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, find A^{100}.

－解：

$$A^{100} = \left(P\Lambda P^{-1}\right)^{100} = \left(P\Lambda P^{-1}\right)\cdot\left(P\Lambda P^{-1}\right)\cdots\left(P\Lambda P^{-1}\right) = P\Lambda^{100}P^{-1}$$

$$\because |\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 25) \therefore \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -5$$

Similar to example 2, we get the corresponding eigenvectors $\beta_1 = (1,0,0)^T, \beta_2 = (2,1,2)^T, \beta_3 = (1,-2,1)^T$ of $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

可对角化的应用

- **解（续）：**

Let $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, then $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & -5 \end{pmatrix}$.

Thus,

$$A^{100} = \left(P\Lambda P^{-1}\right)^{100} = \left(P\Lambda P^{-1}\right)\cdot\left(P\Lambda P^{-1}\right)\cdots\left(P\Lambda P^{-1}\right)$$

$$= P\Lambda^{100}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5^{100}-1 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix}.$$

•例1.4 求解微分方程组

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = x_3, \frac{dx_3}{dt} = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 \quad \ldots\ldots（1）$$

解：记 $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$

则方程组（1）可记为：$\dfrac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ ……………（2）

通过计算知：A的特征值为-1，-2，-3

相应的特征向量为：$\vec{p_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{p_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{p_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$

记 $P = (\vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{P_3})$ 则：$P^{-1}AP = diag(-1,-2,-3) = \Lambda$

•例1.4 求解微分方程组

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = x_3, \frac{dx_3}{dt} = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 \quad \ldots\ldots（1）$$

解：记 $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$

则方程组（1）可记为：$\dfrac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ ……………（2）

（2）式两边左乘P^{-1}：

$$P^{-1}\frac{d\vec{x}}{dt} = P^{-1}A\vec{x} = P^{-1}APP^{-1}\vec{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dP^{-1}\vec{x}}{dt} = \Lambda P^{-1}\vec{x} \quad ……………（3）$$

记：$P^{-1}\vec{x} = \vec{y}$ 则方程（3）为 $\dfrac{d\vec{y}}{dt} = \Lambda\vec{y}$

•例1.4 求解微分方程组

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = x_3, \frac{dx_3}{dt} = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 \quad \ldots\ldots（1）$$

解：

即：$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \frac{dy_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1 \longrightarrow y_1 = c_1e^{-t}$$
$$\frac{dy_2}{dt} = -2y_2 \longrightarrow y_2 = c_2e^{-2t}$$
$$\frac{dy_3}{dt} = -3y_3 \longrightarrow y_3 = c_3e^{-3t}$$

即：$\vec{y} = \begin{bmatrix} c_1e^{-t} & c_2e^{-2t} & c_3e^{-3t} \end{bmatrix}^T$

$$\therefore \quad \vec{x} = P\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{-3t}$$
$$x_2 = c_1e^{-t} - 2c_2e^{-2t} - 3c_3e^{-3t}$$
$$x_3 = c_1e^{-t} + 4c_2e^{-2t} + 9c_3e^{-3t}$$

小结

- 特征值、特征向量的概念
- 特征值、特征向量的性质
- 方阵相似对角化条件及方法

问题与思考

- 以下几种情况如何判断两个方阵是否相似

  1）两个方阵 A, B 都可对角化；

  2）两个方阵 A, B 只有一个可对角化；

  3）两个方阵 A, B 都不能对角化.

思考练习题

1、判断 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 能否相似对角化.

2、$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ 特征多项相同，它们是否相似.

3、设A为三阶矩阵, 已知$E-A$, $3E-A$, $E+A$ 都不可逆, 试问A是否相似于对角阵? 说明理由.

1、 A 不能相似对角化.

2、A 和 E 不相似.

3、A有三个不同的特征值, 有三个线性无关的特征向量, A可相似于对角阵.

Assignment

- 徐仲、张凯院等.《矩阵论简明教程》，第三版. 科学出版社出版.
  - 习题一：1、3、4、5
  - 预习1.3节Jordan标准形介绍