

# RO05 - Évolution de la valeur d'un actif financier

Maxime Delboulle, Pascal Quach

18 octobre 2022

Considérons une option européenne représentant un actif financier dont la valeur au temps  $t$  est  $S(t)$  pour  $0 \leq t \leq T$ , où  $T$  est le temps de l'exercice de l'option.

Notons  $m \in \mathbb{N}^*$  le nombre de sous-divisions de l'intervalle  $[0, T]$  et  $h = \frac{T}{M}$ .

Notons également  $S_n = S(nh)$ , pour  $n = 0, \dots, M$ , les valeurs de l'actif aux instants  $t = nh$ . L'équation d'évolution du prix de l'actif en temps discret s'écrit comme suit :

$$S_{n+1} = S_n + \mu h S_n + \sigma h^{\frac{1}{2}} S_n \xi_n, \quad n \geq 0 \quad (1)$$

où  $\xi_n, n \geq 0$  est une suite de v.a. iid de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  indépendante de  $S_0$ .

1. Expliquer la construction de eq. (1).

**Solution :** Ici, on note la modélisation suivante :

- $S(t)$ , la valeur de l'actif financier au temps  $t$ .
- $\mu$ , le taux d'intérêt de l'actif
- $\sigma$ , la volatilité de l'actif
- $(\xi_n)_{n \geq 0}$  représente du bruit

Dans l'équation d'évolution, chaque terme représente respectivement le capital à l'instant présent, l'évolution de l'actif et la volatilité stochastique :

$$S_{n+1} = \underbrace{S_n}_{\text{valeur précédente}} + \underbrace{\mu h S_n}_{\text{intérêt}} + \underbrace{\sigma h^{\frac{1}{2}} S_n \xi_n}_{\text{bruit}}, \quad n \geq 0$$

2. Montrer que

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n),$$

et en déduire que

$$\ln \left( \frac{S_M}{S_0} \right) = \sum_{n=0}^{M-1} \ln(1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n).$$

**Solution :** Pour  $M \in \mathbb{N}^*$  fixe, on factorise  $S_M$  tel que

$$S_M = [1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n] S_{M-1}$$

Par récurrence,

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n)$$

Alors, on obtient,

$$\ln \left( \frac{S_M}{S_0} \right) = \sum_{n=0}^{M-1} \ln(1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n), \quad (2)$$

car  $\ln$  est strictement croissante.

3. En utilisant l'approximation  $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}$ , pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et la loi des grands nombres, montrer que

$$\ln \left( \frac{S(t)}{S_0} \right) \approx \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t.$$

Ici, on a supposé que l'approximation proposée est valable lorsque  $h \rightarrow 0$ .

**Solution :** On note  $\varepsilon = \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k$ , pour un  $k \in \mathbb{N}^*$  fixé.

Alors,

$$\begin{aligned} \ln \left( 1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k \right) &\approx \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k - \frac{1}{2} \left( \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k \right)^2 \\ &\approx \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k - \frac{1}{2} \left( \mu^2 h^2 + 2\mu h^{\frac{3}{2}} \xi_k + \sigma^2 h \xi_k^2 \right) \quad h \rightarrow 0, h \text{ très grand devant } h^{1+\delta}, \delta > 0 \\ &\approx \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k - \frac{1}{2} \sigma^2 h \xi_k^2 \end{aligned}$$

Le résultat précédent (eq. (2)) est valable pour tout  $n = 0, \dots, M$ .

Finalement, en remplaçant l'approximation obtenue dans eq. (2), on obtient :

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{S(t)}{S_0} \right) &\approx \sum_{n=0}^{M-1} \left( \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n - \frac{1}{2} \sigma^2 h \xi_n^2 \right) \\ &\approx . \end{aligned}$$

4. À l'aide du théorème de la limite centrale, montrer que l'approximation ci-dessus peut se préciser plus par la relation

$$\ln \left( \frac{S(t)}{S_0} \right) \sim \mathcal{N} \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right).$$

**Solution :** ...

5. Conclure de la question précédente que

$$S(t) = S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \sqrt{t} Z \right),$$

où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Solution :** ...

6. Expliquer pourquoi la v.a.  $\frac{S(t)}{S_0}$ , ( $T$  fixé) suit-elle une loi log-normale ? Spécifier ses paramètres.

**Solution :** ...

7. Donner un intervalle de confiance de valeur l'option au temps d'exercice au niveau  $\alpha$ .

**Solution :** ...

8. *Monte Carlo*. Effectuer 1000 réalisations des v.a.  $S_n$ , pour  $n = 0, \dots, M$ , et donner l'évolution moyenne de la valeur de l'actif. Les données sont :

- $T = 1$
- $h = 0.05$
- $S_0 = 1$
- $\mu = 0.05$
- $\sigma = 0.3$