

RO05 - Évolution de la valeur d'un actif financier

Maxime Delboulle, Pascal Quach

8 novembre 2022

Considérons une option européenne représentant un actif financier dont la valeur au temps t est $S(t)$ pour $0 \leq t \leq T$, où T est le temps de l'exercice de l'option.

Notons $M \in \mathbb{N}^*$ le nombre de sous-divisions de l'intervalle $[0, T]$ et $h = \frac{T}{M}$.

Notons également $S_n = S(nh)$, pour $n = 0, \dots, M$, les valeurs de l'actif aux instants $t = nh$. L'équation d'évolution du prix de l'actif en temps discret s'écrit comme suit :

$$S_{n+1} = S_n + \mu h S_n + \sigma h^{\frac{1}{2}} S_n \xi_n, \quad n \geq 0 \quad (1)$$

où $\xi_n, n \geq 0$ est une suite de v.a. iid de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendante de S_0 .

1. Expliquer la construction de eq. (1).

Solution : Ici, on note la modélisation suivante :

- $S(t)$, la valeur de l'actif financier au temps t .
- μ , le taux d'intérêt de l'actif
- σ , la volatilité de l'actif
- $(\xi_n)_{n \geq 0}$ représente du bruit

Dans l'équation d'évolution, chaque terme représente respectivement le capital à l'instant présent, l'évolution de l'actif et la volatilité stochastique :

$$S_{n+1} = \underbrace{S_n}_{\text{valeur précédente}} + \underbrace{\mu h S_n}_{\text{intérêt}} + \underbrace{\sigma h^{\frac{1}{2}} S_n \xi_n}_{\text{bruit}}, \quad n \geq 0$$

2. Montrer que

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n),$$

et en déduire que

$$\ln \left(\frac{S_M}{S_0} \right) = \sum_{n=0}^{M-1} \ln(1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n).$$

Solution : Pour $M \in \mathbb{N}^*$ fixe, on factorise S_M tel que

$$S_M = \left[1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n \right] S_{M-1}$$

Par récurrence,

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n)$$

Alors, on obtient,

$$\ln \left(\frac{S_M}{S_0} \right) = \sum_{n=0}^{M-1} \ln(1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n), \quad (2)$$

car on fait l'hypothèse que $\forall n \geq 0 : S_M > S_0 > 0$. De même, pour calculer la somme des log, on doit avoir

$$\forall n \geq 0 : 1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n > 0 \iff \forall n \geq 0 : \xi_n > \frac{-1 + \mu h^{\frac{1}{2}}}{\sigma}$$

Ces inégalités ne sont pas systématiquement vérifiées pour tout n . On en fait l'hypothèse.

3. En utilisant l'approximation $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}$, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, et la loi des grands nombres, montrer que

$$\ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right) \approx \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t.$$

Ici, on a supposé que l'approximation proposée est valable lorsque $h \rightarrow 0$.

Solution : On note $\varepsilon = \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k$, pour un $k \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Alors,

$$\ln \left(1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k \right) \approx \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k - \frac{1}{2} \left(\mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k \right)^2 \quad (3)$$

$$\approx \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k - \frac{1}{2} \left(\mu^2 h^2 + 2\mu h^{\frac{3}{2}} \xi_k + \sigma^2 h \xi_k^2 \right) \quad h \rightarrow 0, h \gg h^{1+\delta}, \delta > 0 \quad (4)$$

$$\approx \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k - \frac{1}{2} \sigma^2 h \xi_k^2 \quad (5)$$

Le résultat précédent (eq. (2)) est valable pour tout $n = 0, \dots, M$.

Finalement, en remplaçant l'approximation obtenue dans eq. (2), on obtient :

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right) &\approx \sum_{n=0}^{M-1} \left(h\mu + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n - \frac{1}{2} \sigma^2 h \xi_n^2 \right) \\ &\approx Mh\mu + \sigma h^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{M-1} \xi_n - \frac{1}{2} \sigma^2 h \sum_{n=0}^{M-1} \xi_n^2 && \text{LGN} \\ &\approx Mh\mu + \underbrace{\sigma Mh^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}[\xi_n]}_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 Mh \underbrace{\mathbb{E}[\xi_n^2]}_{\text{Var}[\xi_n] - (\mathbb{E}[\xi_n])^2} && (\xi_n)_{n \geq 0} \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ &\approx \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \underbrace{Mh}_t \\ \ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right) &\approx \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4. À l'aide du théorème de la limite centrale, montrer que l'approximation ci-dessus peut se préciser plus par la relation

$$\ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right) \sim \mathcal{N} \left(\left(\mu - 1/2\sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right).$$

Solution : En notant la suite de v.a. iid $(X_n)_{n=0,\dots,M}$, avec $X_n = \ln \left(1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n \right)$, on applique le théorème centrale limite :

$$X_1 + \dots + X_M \sim \mathcal{N} (M\mathbb{E} [X_1], M\text{Var} [X_1])$$

à

$$\ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right) \approx \sum_{n=0}^{M-1} \left(h\mu + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n - \frac{1}{2} \sigma^2 h \xi_n^2 \right)$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n - \frac{1}{2} \sigma^2 h \xi_n^2 \right] &= \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \underbrace{\mathbb{E} [\xi_n]}_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 h \underbrace{\mathbb{E} [\xi_n^2]}_1 \\ \mathbb{E} [X_1] &= h \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \\ M\mathbb{E} [X_1] &= \underbrace{Mh}_t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var} [X_1] &= \mathbb{E} [X_1^2] - (\mathbb{E} [X_1])^2 \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n - \frac{1}{2} \sigma^2 h \xi_n^2 \right)^2 \right] - h^2 \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \quad h \rightarrow 0, h \gg h^{1+\delta}, \delta > 0 \\ &= \mathbb{E} [\sigma^2 h \xi_n^2] \\ \text{Var} [X_1] &= h\sigma^2 \\ M\text{Var} [X_1] &= \underbrace{Mh}_t \sigma^2 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right) \sim \mathcal{N} \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right)$$

5. Conclure de la question précédente que

$$S(t) = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \sqrt{t} Z \right),$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Solution : On pose :

— $Y = \ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right)$,
 — $\mu' = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t$,
 — $\sigma' = \sigma \sqrt{t}$,
 — $Z = \frac{Y - \mu'}{\sigma'} \sim \mathcal{N}(0, 1)$
 ce qui donne immédiatement

$$S(t) = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \sqrt{t} Z \right) \quad (6)$$

6. Expliquer pourquoi la v.a. $\frac{S(t)}{S_0}$, (T fixé) suit-elle une loi log-normale ? Spécifier ses paramètres.

Solution : Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors, $\exp(X) \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$.

Ici, en considérant $Y = \ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right) = \frac{Z - \mu'}{\sigma'} \sim \mathcal{N}(\mu', \sigma'^2)$, on obtient alors,

$$\frac{S(t)}{S_0} \sim \text{LN} \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right).$$

7. Donner un intervalle de confiance de valeur l'option au temps d'exercice au niveau α .

Solution : On calcule un intervalle de confiance bilatéral pour Z , et on en déduit l'intervalle de confiance pour $S(t)$.

On note $u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$, le quantile d'ordre α de la loi normale centrée-réduite.

Alors,

$$Z = \frac{1}{\sigma'} \left(\ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right) - \mu' \right).$$

$$\mathbb{P} \left(u_{\alpha/2} \leq Z \leq u_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha \quad u_\alpha \text{ symétrique}$$

$$\mathbb{P} \left(u_{\alpha/2} \leq \frac{1}{\sigma'} \left(\ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right) - \mu' \right) \leq u_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha \quad \sigma' > 0$$

$$\mathbb{P} \left(S_0 \exp \left(\sigma' u_{\alpha/2} + \mu' \right) \leq S(t) \leq S_0 \exp \left(\sigma' u_{1-\alpha/2} + \mu' \right) \right) = 1 - \alpha \quad \exp \text{ strictement croissante}$$

Donc l'intervalle de confiance au niveau α pour $S(t)$ est

$$\text{IC}_\alpha = \left[S_0 \exp \left(\sigma \sqrt{t} u_{\alpha/2} + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right); S_0 \exp \left(\sigma \sqrt{t} u_{1-\alpha/2} + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right) \right].$$

8. *Monte Carlo*. Effectuer 1000 réalisations des v.a. S_n , pour $n = 0, \dots, M$, et donner l'évolution moyenne de la valeur de l'actif. Les données sont :

- $T = 1$
- $h = 0.05$
- $S_0 = 1$
- $\mu = 0.05$
- $\sigma = 0.3$

Solution :

```
import numpy as np

# paramètres du problème
mu = 0.05
sigma = 0.3
sigma2 = sigma**2
S0 = 1
h = 0.05
T = 1
M = int(T/h) # floor
N = 1000

def get_M():
    """Retourne une liste de S(t), t allant de 1 à M. """
    Z = np.random.rand(M)
    SM = [
        S0 * np.exp((mu - sigma2/2) * t + sigma * np.sqrt(t) * Z[t])
        for t in range(M)
    ]
    SMF = [S0] + SM
    return SMF

# génération d'une liste de N échantillons S(t) ; t allant de 1 à M
SMN = np.array([get_M() for n in range(N)])

# affichage du gain moyen de l'actif boursier de 1 à M (N éléments)
print(f"gain moyen: {(SMN[:, -1] - S0).mean():.2f}")
```