RO05 - Évolution de la valeur d'un actif financier

Maxime Delboulle, Pascal Quach

20 octobre 2022

Considérons une option européenne représentant un actif financier dont la valeur au temps t est $S(t)$ pour $0 \leq t \leq T$, où T est le temps de l'exercice de l'option.

Notons $m \in \mathbb{N}^*$ le nombre de sous-divisions de l'intervalle $[0, T]$ et $h = \frac{T}{M}$.

Notons également $S_n = S(nh)$, pour $n = 0, \dots, M$, les valeurs de l'actif aux instants $t = nh$. L'équation d'évolution du prix de l'actif en temps discret s'écrit comme suit :

$$S_{n+1} = S_n + \mu h S_n + \sigma h^{\frac{1}{2}} S_n \xi_n, \quad n \geq 0 \tag{1}$$

où $\xi_n, n \geq 0$ est une suite de v.a. iid de loi $\mathcal{N}(0,1)$ indépendante de S_0.

1. Expliquer la construction de eq. (1).

Solution : Ici, on note la modélisation suivante :
- $S(t)$, la valeur de l'actif financier au temps t.
- μ, le taux d'intérêt de l'actif
- σ, la volatilité de l'actif
- $(\xi_n)_{n\geq 0}$ représente du bruit

Dans l'équation d'évolution, chaque terme représente respectivement le capital à l'instant présent, l'évolution de l'actif et la volatilité stochastique :

$$S_{n+1} = \underbrace{S_n}_{\text{valeur précédente}} + \underbrace{\mu h S_n}_{\text{intérêt}} + \underbrace{\sigma h^{\frac{1}{2}} S_n \xi_n}_{\text{bruit}}, \quad n \geq 0$$

2. Montrer que

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M} (1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n),$$

et en déduire que

$$\ln\left(\frac{S_M}{S_0}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} \ln(1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n).$$

Solution : Pour $M \in \mathbb{N}^*$ fixe, on factorise S_M tel que

$$S_M = \left[1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n\right] S_{M-1}$$

Par récurrence,

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n)$$

Alors, on obtient,

$$\ln\left(\frac{S_M}{S_0}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} \ln(1+\mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_n), \tag{2}$$

car ln est strictement croissante.

3. En utilisant l'approximation $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}$, pour $\varepsilon \to 0$, et la loi des grands nombres, montrer que

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \approx \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t.$$

Ici, on a supposé que l'approximation proposée est valable lorsque $h \to 0$.

Solution : On note $\varepsilon = \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_k$, pour un $k \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Alors,

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+\mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_k\right) &\approx \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_k - \frac{1}{2}\left(\mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_k\right)^2 && (3)\\
&\approx \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_k - \frac{1}{2}\left(\cancel{\mu^2 h^2} + \cancel{2\mu h^{\frac{3}{2}}}\xi_k + \sigma^2 h \xi_k^2\right) \quad h \to 0, h \ggg h^{1+\delta}, \delta > 0 && (4)\\
&\approx \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_k - \frac{1}{2}\sigma^2 h \xi_k^2 && (5)
\end{aligned}$$

Le résultat précédent (eq. (2)) est valable pour tout $n = 0, \dots, M$.
Finalement, en remplaçant l'approximation obtenue dans eq. (2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) &\approx \sum_{n=0}^{M-1}\left(h\mu + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_n - \frac{1}{2}\sigma^2 h \xi_n^2\right)\\
&\approx Mh\mu + \sigma h^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{M-1}\xi_n - \frac{1}{2}\sigma^2 h \sum_{n=0}^{M-1}\xi_n^2 && \text{LGN}\\
&\approx Mh\mu + \sigma M h^{\frac{1}{2}}\underbrace{\mathbb{E}\left[\xi_n\right]}_{0} - \frac{1}{2}\sigma^2 Mh \underbrace{\mathbb{E}\left[\xi_n^2\right]}_{\mathrm{Var}[\xi_n]-(\mathbb{E}[\xi_n])^2} && (\xi_n)_{n\geq 0} \sim \mathcal{N}(0,1)\\
&\approx \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\underbrace{Mh}_{t}\\
\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) &\approx \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t && \blacksquare
\end{aligned}$$

4. À l'aide du théorème de la limite centrale, montrer que l'approximation ci-dessus peut se préciser plus par la relation

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - 1/2\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right).$$

Solution : En notant la suite de v.a. iid $(X_n)_{n=0,\dots,M}$, avec $X_n = \ln\left(1+\mu h+\sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_n\right)$, on applique le théorème centrale limite :

$$X_1+\cdots+X_M \sim \mathcal{N}\left(M\mathbb{E}\left[X_1\right], M\text{Var}\left[X_1\right]\right)$$

à

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \approx \sum_{n=0}^{M-1}\left(h\mu+\sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_n-\frac{1}{2}\sigma^2 h\xi_n^2\right)$$

Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mu h+\sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_n-\frac{1}{2}\sigma^2 h\xi_n^2\right] &= \mu h+\sigma h^{\frac{1}{2}}\underbrace{\mathbb{E}\left[\xi_n\right]}_{0}-\frac{1}{2}\sigma^2 h\underbrace{\mathbb{E}\left[\xi_n\right]}_{1}\\ \mathbb{E}\left[X_1\right] &= h\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\\ M\mathbb{E}\left[X_1\right] &= \underbrace{Mh}_{t}\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}\left[X_1\right] &= \mathbb{E}\left[X_1^2\right]-\left(\mathbb{E}\left[X_1\right]\right)^2\\ &= \mathbb{E}\left[\left(\mu h+\sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_n-\frac{1}{2}\sigma^2 h\xi_n^2\right)^2\right]-h^2\left(mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \qquad h\to 0, h \ggg h^{1+\delta}, \delta>0\\ &= \mathbb{E}\left[\sigma^2 h\xi_n\right]\\ \text{Var}\left[X_1\right] &= h\sigma^2\\ M\text{Var}\left[X_1\right] &= \underbrace{Mh}_{t}\sigma^2\end{aligned}$$

Finalement,

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$$

5. Conclure de la question précédente que

$$S(t) = S_0\exp\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma\sqrt{t}Z\right),$$

où $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$.

Solution : On pose :
- $Y = \ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)$,
- $\mu\prime = \left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t$,
- $\sigma\prime = \sigma^2 t$,

— $Z = \frac{Y-\mu\prime}{\sigma\prime} \sim \mathcal{N}(0,1)$

ce qui donne immédiatement

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}Z\right)$$

6. Expliquer pourquoi la v.a. $\frac{S(t)}{S_0}$, (T fixé) suit-elle une loi log-normale ? Spécifier ses paramètres.

Solution : ...

7. Donner un intervalle de confiance de valeur l'option au temps d'exercice au niveau α.

Solution : ...

8. *Monte Carlo.* Effectuer 1000 réalisations des v.a. S_n, pour $n = 0, \ldots, M$, et donner l'évolution moyenne de la valeur de l'actif. Les données sont :
   - $T = 1$
   - $h = 0.05$
   - $S_0 = 1$
   - $\mu = 0.05$
   - $\sigma = 0.3$