RO05 - Évolution de la valeur d'un actif financier

Maxime Delboulle, Pascal Quach

8 novembre 2022

Considérons une option européenne représentant un actif financier dont la valeur au temps t est $S(t)$ pour $0 \leq t \leq T$, où T est le temps de l'exercice de l'option.

Notons $M \in \mathbb{N}^*$ le nombre de sous-divisions de l'intervalle $[0, T]$ et $h = \frac{T}{M}$.

Notons également $S_n = S(nh)$, pour $n = 0, \ldots, M$, les valeurs de l'actif aux instants $t = nh$. L'équation d'évolution du prix de l'actif en temps discret s'écrit comme suit :

$$S_{n+1} = S_n + \mu h S_n + \sigma h^{\frac{1}{2}} S_n \xi_n, \quad n \geq 0 \tag{1}$$

où $\xi_n, n \geq 0$ est une suite de v.a. iid de loi $\mathcal{N}(0,1)$ indépendante de S_0.

1. Expliquer la construction de eq. (1).

Solution : Ici, on note la modélisation suivante :
- $S(t)$, la valeur de l'actif financier au temps t.
- μ, le taux d'intérêt de l'actif
- σ, la volatilité de l'actif
- $(\xi_n)_{n \geq 0}$ représente du bruit

Dans l'équation d'évolution, chaque terme représente respectivement le capital à l'instant présent, l'évolution de l'actif et la volatilité stochastique :

$$S_{n+1} = \underbrace{S_n}_{\text{valeur précédente}} + \underbrace{\mu h S_n}_{\text{intérêt}} + \underbrace{\sigma h^{\frac{1}{2}} S_n \xi_n}_{\text{bruit}}, \quad n \geq 0$$

2. Montrer que

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n),$$

et en déduire que

$$\ln\left(\frac{S_M}{S_0}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} \ln(1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n).$$

Solution : Pour $M \in \mathbb{N}^*$ fixe, on factorise S_M tel que

$$S_M = \left[1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n\right] S_{M-1}$$

Par récurrence,

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n)$$

Alors, on obtient,

$$\ln\left(\frac{S_M}{S_0}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} \ln(1+\mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_n), \tag{2}$$

car on fait l'hypothèse que $\forall n \geq 0 : S_M > S_0 > 0$. De même, pour calculer la somme des log, on doit avoir

$$\forall n \geq 0 : 1+\mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_n > 0 \iff \forall n \geq 0 : \xi_n > \frac{-1+\mu h^{\frac{1}{2}}}{\sigma}$$

Ces inégalités ne sont pas systématiquement vérifiées pour tout n. On en fait l'hypothèse.

3. En utilisant l'approximation $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}$, pour $\varepsilon \to 0$, et la loi des grands nombres, montrer que

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \approx \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t.$$

Ici, on a supposé que l'approximation proposée est valable lorsque $h \to 0$.

Solution : On note $\varepsilon = \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_k$, pour un $k \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Alors,

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+\mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_k\right) &\approx \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_k - \frac{1}{2}\left(\mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_k\right)^2 && (3)\\
&\approx \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_k - \frac{1}{2}\left(\cancel{\mu^2 h^2} + \cancel{2\mu h^{\frac{3}{2}}}\xi_k + \sigma^2 h \xi_k^2\right) \quad h \to 0, h \ggg h^{1+\delta}, \delta > 0 && (4)\\
&\approx \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_k - \frac{1}{2}\sigma^2 h \xi_k^2 && (5)
\end{aligned}$$

Le résultat précédent (eq. (2)) est valable pour tout $n = 0, \ldots, M$.
Finalement, en remplaçant l'approximation obtenue dans eq. (2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) &\approx \sum_{n=0}^{M-1}\left(h\mu + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_n - \frac{1}{2}\sigma^2 h \xi_n^2\right)\\
&\approx Mh\mu + \sigma h^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{M-1}\xi_n - \frac{1}{2}\sigma^2 h \sum_{n=0}^{M-1}\xi_n^2 && \text{LGN}\\
&\approx Mh\mu + \sigma M h^{\frac{1}{2}} \underbrace{\mathbb{E}\left[\xi_n\right]}_{0} - \frac{1}{2}\sigma^2 Mh \quad \underbrace{\mathbb{E}\left[\xi_n^2\right]}_{\mathrm{Var}[\xi_n]-(\mathbb{E}[\xi_n])^2} && (\xi_n)_{n\geq 0} \sim \mathcal{N}(0,1)\\
&\approx \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\underbrace{Mh}_{t}\\
\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) &\approx \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t && \blacksquare
\end{aligned}$$

4. À l'aide du théorème de la limite centrale, montrer que l'approximation ci-dessus peut se préciser plus par la relation

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - 1/2\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right).$$

Solution : En notant la suite de v.a. iid $(X_n)_{n=0,\dots,M}$, avec $X_n = \ln\left(1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_n\right)$, on applique le théorème centrale limite :

$$X_1 + \cdots + X_M \sim \mathcal{N}\left(M\mathbb{E}\left[X_1\right], M\mathrm{Var}\left[X_1\right]\right)$$

à

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \approx \sum_{n=0}^{M-1}\left(h\mu + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_n - \frac{1}{2}\sigma^2 h\xi_n^2\right)$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_n - \frac{1}{2}\sigma^2 h\xi_n^2\right] &= \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\underbrace{\mathbb{E}\left[\xi_n\right]}_{0} - \frac{1}{2}\sigma^2 h\underbrace{\mathbb{E}\left[\xi_n\right]}_{1} \\
\mathbb{E}\left[X_1\right] &= h\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \\
M\mathbb{E}\left[X_1\right] &= \underbrace{Mh}_{t}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[X_1\right] &= \mathbb{E}\left[X_1^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[X_1\right]\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}}\xi_n - \frac{1}{2}\sigma^2 h\xi_n^2\right)^2\right] - h^2\left(mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \qquad h \to 0, h \ggg h^{1+\delta}, \delta > 0 \\
&= \mathbb{E}\left[\sigma^2 h\xi_n\right] \\
\mathrm{Var}\left[X_1\right] &= h\sigma^2 \\
M\mathrm{Var}\left[X_1\right] &= \underbrace{Mh}_{t}\sigma^2
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$$

5. Conclure de la question précédente que

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}Z\right),$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Solution : On pose :

— $Y = \ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)$,
— $\mu' = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$,
— $\sigma' = \sigma\sqrt{t}$,
— $Z = \frac{Y-\mu'}{\sigma'} \sim \mathcal{N}(0,1)$
ce qui donne immédiatement

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}Z\right) \tag{6}$$

6. Expliquer pourquoi la v.a. $\frac{S(t)}{S_0}$, (T fixé) suit-elle une loi log-normale ? Spécifier ses paramètres.

Solution : Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors, $\exp(X) \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$.
Ici, en considérant $Y = \ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \frac{Z-\mu'}{\sigma'} \sim \mathcal{N}(\mu', \sigma'^2)$, on obtient alors,

$$\frac{S(t)}{S_0} \sim \mathrm{LN}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right).$$

7. Donner un intervalle de confiance de valeur l'option au temps d'exercice au niveau α.

Solution : On calcule un intervalle de confiance bilatéral pour Z, et on en déduit l'intervalle de confiance pour $S(t)$.
On note $u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$, le quantile d'ordre α de la loi normale centrée-réduite.
Alors,

$$Z = \frac{1}{\sigma'}\left(\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) - \mu'\right).$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(u_{\alpha/2} \leq Z \ \leq u_{1-\alpha/2}\right) &= 1-\alpha && u_\alpha \text{ symétrique} \\
\mathbb{P}\left(u_{\alpha/2} \leq \frac{1}{\sigma'}\left(\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) - \mu'\right) \leq u_{1-\alpha/2}\right) &= 1-\alpha && \sigma' > 0 \\
\mathbb{P}\left(S_0\exp\left(\sigma' u_{\alpha/2} + \mu'\right) \leq S(t) \leq S_0 \exp\left(\sigma' u_{1-\alpha/2} + \mu'\right)\right) &= 1-\alpha && \exp \text{ strictement croissante}
\end{aligned}$$

Donc l'intervalle de confiance au niveau α pour $S(t)$ est

$$\mathrm{IC}_\alpha = \left[S_0 \exp\left(\sigma\sqrt{t}u_{\alpha/2} + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right); S_0 \exp\left(\sigma\sqrt{t}u_{1-\alpha/2} + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right)\right].$$

8. *Monte Carlo.* Effectuer 1000 réalisations des v.a. S_n, pour $n = 0, \ldots, M$, et donner l'évolution moyenne de la valeur de l'actif. Les données sont :
— $T = 1$
— $h = 0.05$
— $S_0 = 1$
— $\mu = 0.05$
— $\sigma = 0.3$

Solution :

```python
import numpy as np ; import math ; from scipy.stats import norm

# paramètres du problème
mu = 0.05 ; alpha = 0.1
sigma = 0.3 ; sigma2 = sigma**2
S0 = 1 ; h = 0.05 ; T = 1
M = int(T/h) ; N = 1000

def get_IC (t) :
    """ get IC """
    return (S0 * np.exp(
                    sigma * math.sqrt(t) * np.array([norm.ppf(alpha/2),
                    ↪  norm.ppf(1 - alpha/2)]) +
                    (mu - sigma2/2) * t))
def get_S_t () :
    """ retourne une liste de S(t) ; t allant de 1 à M. et intervalle de
    ↪  confiance IC """
    Z = np.random.rand(M)
    SM =[
        S0 * np.exp((mu - sigma2/2) * t + sigma * np.sqrt(t) * Z[t])
        for t in range(M)]
    IC = np.array([get_IC(t) for t in range(M)])
    return {"SM":SM, "IC":IC}

# génération d'une liste de N échantillons S(t) ; t allant de 1 à M
SMN = np.array([get_S_t()["SM"] for n in range(N)])

# affichage du gain moyen de l'actif boursier de 1 à M (N éléments)
print(f"gain moyen: {(SMN[:, -1] - S0).mean():.2f}")
```

Le gain moyen est de 1,3. Nous obtenons finalement les courbes suivantes :

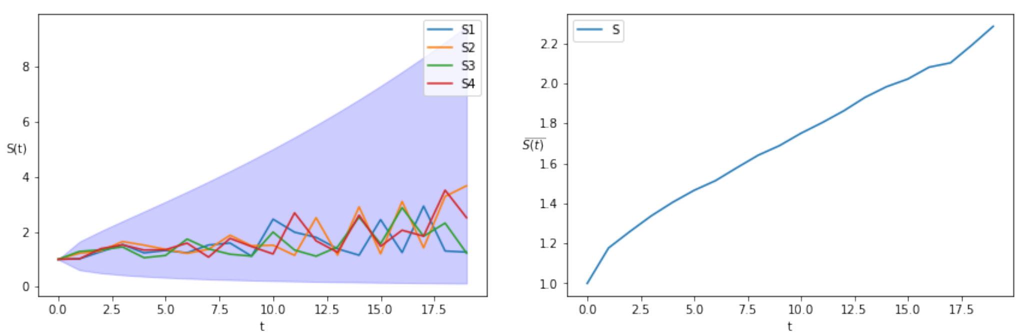

FIGURE 1 – le graphique de gauche représente l'évolution de 4 actifs financiers avec un intervalle de confiance à 90 %. La figure de droite représente l'évolution moyen de 1.000 actifs.