RO05 - Évolution de la valeur d'un actif financier

Maxime Delboulle, Pascal Quach

18 octobre 2022

Considérons une option européenne représentant un actif financier dont la valeur au temps t est $S(t)$ pour $0 \leq t \leq T$, où T est le temps de l'exercice de l'option.

Notons $m \in \mathbb{N}^*$ le nombre de sous-divisions de l'intervalle $[0, T]$ et $h = \frac{T}{M}$.

Notons également $S_n = S(nh)$, pour $n = 0, \dots, M$, les valeurs de l'actif aux instants $t = nh$. L'équation d'évolution du prix de l'actif en temps discret s'écrit comme suit :

$$S_{n+1} = S_n + \mu h S_n + \sigma h^{\frac{1}{2}} S_n \xi_n, \quad n \geq 0 \tag{1}$$

où $\xi_n, n \geq 0$ est une suite de v.a. iid de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendante de S_0.

1. Expliquer la construction de eq. (1).

Solution : Ici, on note la modélisation suivante :
- $S(t)$, la valeur de l'actif financier au temps t.
- μ, le taux d'intérêt de l'actif
- σ, la volatilité de l'actif
- $(\xi_n)_{n\geq 0}$ représente du bruit

Dans l'équation d'évolution, chaque terme représente respectivement le capital à l'instant présent, l'évolution de l'actif, et la volatilité stochastique :

$$S_{n+1} = \underbrace{S_n}_{\text{valeur précédente}} + \underbrace{\mu h S_n}_{\text{intérêt}} + \underbrace{\sigma h^{\frac{1}{2}} S_n \xi_n}_{\text{bruit}}, \quad n \geq 0$$

2. Montrer que

$$S(t) = S_0 \prod_{n=0}^{t-1} (1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n),$$

et en déduire que

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \sum_{n=0}^{t-1} \ln(1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n).$$

Solution : On factorise $S(t)$ tel que

$$S(t) = \left[1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_{t-1}\right] S(t-1).$$

Par récurrence,

$$S(t) = S_0 \prod_{n=0}^{t-1} (1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n)$$

Alors, on obtient,

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \sum_{n=0}^{t-1} \ln(1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n), \tag{2}$$

car ln est strictement croissante.

3. En utilisant l'approximation $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}$, pour $\varepsilon \to 0$, et la loi des grands nombres, montrer que

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \approx \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t.$$

Ici, on a supposé que l'approximation proposée est valable lorsque $h \to 0$.

Solution : On note $\varepsilon = \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k$, pour un $k \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Alors,

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k\right) &\approx \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k - \frac{1}{2}\left(\mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k\right)^2 \\
&\approx \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k - \frac{1}{2}\left(\mu^2 h^2 + 2\mu h^{\frac{3}{2}} \xi_k + \sigma^2 h \xi_k^2\right) \\
&\approx \mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_k - \frac{1}{2}\sigma^2 h \xi_k^2 \qquad h \to 0, \text{h très grand devant } h^{1+\delta}, \delta > 0
\end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant l'approximation obtenue dans eq. (2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) &\approx \sum_{n=0}^{t-1} \left(\mu h + \sigma h^{\frac{1}{2}} \xi_n - \frac{1}{2}\sigma^2 h \xi_n^2\right) \\
&\approx \ldots.
\end{aligned}$$

4. À l'aide du théorème de la limite centrale, montrer que l'approximation ci-dessus peut se préciser plus par la relation

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - 1/2\sigma^2\right) t, \sigma^2 t\right).$$

Solution : ...

5. Conclure de la question précédente que

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma\sqrt{t} Z\right),$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Solution : ...

6. Expliquer pourquoi la v.a. $\frac{S(t)}{S_0}$, (T fixé) suit-elle une loi log-normale ? Spécifier ses paramètres.

   Solution : ...

7. Donner un intervalle de confiance de valeur l'option au temps d'exercice au niveau α.

   Solution : ...

8. *Monte Carlo.* Effectuer 1000 réalisations des v.a. S_n, pour $n = 0, \dots, M$, et donner l'évolution moyenne de la valeur de l'actif. Les données sont :
   — $T = 1$
   — $h = 0.05$
   — $S_0 = 1$
   — $\mu = 0.05$
   — $\sigma = 0.3$