Formelsammlung Hochfrequenztechnik

Alex Jäger

24. April 2019

1 Grundlegende Formeln

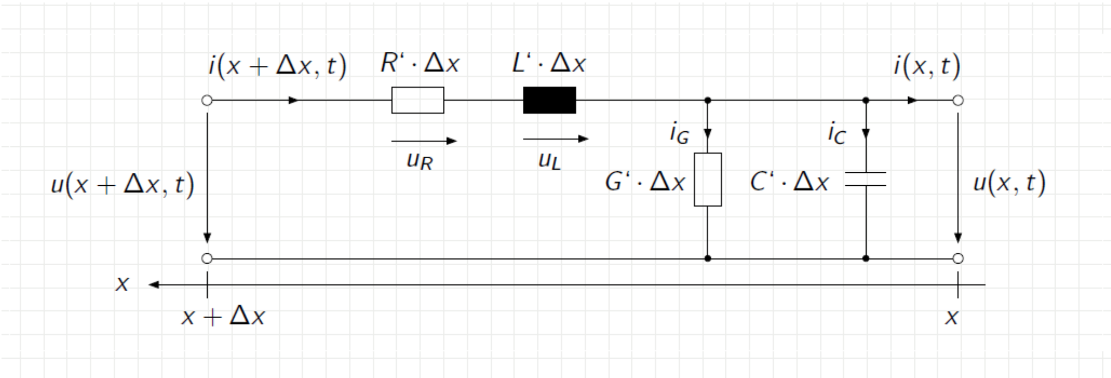
$$\lambda_0 \hat{=} \text{ Wellenlänge im Vakuum}$$
$$v_{ph} \hat{=} \text{ Phasengeschwindigkeit}$$
$$T = \frac{1}{f}$$
$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f}$$
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_R}}$$
$$v_{ph} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_R}}$$

Zusammenhang komplexer Zeiger und Zeitfunktion

$$u(t) \hat{=} \text{ Zeitfunktion}$$
$$\underline{\hat{U}} \hat{=} \text{ Komplexer Amplitudenzeiger}$$
$$\underline{\hat{U}}(x) \hat{=} \text{ Komplexer Amplitudenzeiger an der Stelle x}$$
$$\underline{\hat{U}}_0 \hat{=} \text{ Komplexer Amplitudenzeiger bei x=0}$$
$$u(t) = Re\{\underline{\hat{U}} e^{j\omega t}\}$$
$$\underline{\hat{U}} = \hat{U} * e^{j\varphi}$$
$$\underline{\hat{U}}(x) = \underline{\hat{U}}_0 * e^{\gamma x}$$

2 Leitungstheorie

2.1 Leitungsmodell



Kirchhoff'sche Regel führt z.B. zu

$$u_R + u_L + u(x,t) - u(x+\Delta x,t) = 0$$
$$R' * \Delta x * i(x+\Delta x,t) + L' * \Delta x * \frac{\partial i(x+\Delta x,t)}{\partial t} + u(x,t) - u(x+\Delta x,t) = 0$$

oder

$$i(x+\Delta x,t) - i_g - i_c - i(x,t) = 0$$
$$i(x+\Delta x,t) - G' * \Delta x * u(x,t) - C' * \Delta x * \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - i(x,t) = 0$$

2.2 Telegraphengleichungen

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = R' * i(x,t) + L' * \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$
$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G' * u(x,t) + C' * \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = L'C'\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + (R'C' + L'G')\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + R'G' * u(x,t)$$

2.2.1 Telegraphengleichungen im Komplexen

$$\frac{\partial \underline{\hat{U}}(x)}{\partial x} = (R' + j\omega L') * \underline{\hat{I}}(x) \tag{1}$$
$$\frac{\partial \underline{\hat{I}}(x)}{\partial x} = (G' + j\omega C') * \underline{\hat{U}}(x) \tag{2}$$
$$\frac{\partial^2 \underline{\hat{U}}(x)}{\partial x^2} = L'C'(j\omega)^2 * \underline{\hat{U}}(x) + (R'C' + L'G')j\omega * \underline{\hat{U}}(x) + R'G'\underline{\hat{U}}(x) \tag{3}$$

Durch Einsetzen von $\underline{\hat{U}}(x) = \underline{\hat{U}}_0 e^{\gamma x}$ folgt

$$\gamma_{1,2} = \pm\sqrt{(R' + j\omega L') + (G' + j\omega C')}$$
$$\gamma_{1,2} = \pm(\alpha + j\beta) \text{ mit } \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

2.3 Spannungszeiger an der Position x als Summe fort- und rücklaufender Welle

$$\underline{\hat{U}}(x) = \underline{\hat{U}}_F(x) + \underline{\hat{U}}_B(x)$$
$$\underline{\hat{U}}(x) = \underline{\hat{U}}_{0F}e^{\gamma x} + \underline{\hat{U}}_{0B}e^{-\gamma x}$$

Hinweis: Der Stromzeiger ergibt sich als Differenz der anderen Stromzeiger.

$$\underline{\hat{I}}(x) = \underline{\hat{I}}_{0F}e^{\gamma x} - \underline{\hat{I}}_{0B}e^{-\gamma x}$$

2.4 Charakteristische Impedanz einer Leitung

$$\underline{Z}_0 = \frac{R' + j\omega L'}{\gamma} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad (4)$$

$$\underline{\hat{I}}(x) = \frac{1}{\underline{Z}_0} * (\underline{\hat{U}}_{0F} e^{\gamma x} - \underline{\hat{U}}_{0B} e^{-\gamma x}) \quad (5)$$

2.5 Reflexionskoeffizient verlustfreier Leitungen

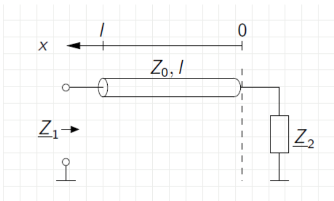
Trifft eine Leitung der charakteristische Impedanz Z_0 auf einen Widerstand der Impedanz $\underline{Z}_2$ (Hinweis: $Z_0 \in \mathbb{R}$, weil die Leitung verlustfrei ist), so ergibt sich eine Reflexion mit dem Faktor

$$\underline{r} = \frac{\underline{\hat{U}}_B}{\underline{\hat{U}}_F}$$

An der Position x=0 gilt

$$\underline{r}(x=0) = \frac{\underline{Z}_2 - Z_0}{\underline{Z}_2 + Z_0}$$

2.6 Gesamtimpedanz von Leitung und Widerstand



$$\underline{Z}_1 = Z_0 * \frac{\underline{Z}_2 + jZ_0 tan(\beta l)}{Z_0 + j\underline{Z}_2 tan(\beta l)}$$

Daraus folgt für $\underline{Z}_2 = 0$

$$\underline{Z}_1 = jZ_0 tan(\beta l)$$

und für $\underline{Z}_2 \to \infty$

$$\underline{Z}_1 = -jZ_0 \frac{1}{tan(\beta l)}$$

2.7 Leistung am Widerstand

Falls $\underline{r} = 0$ gilt

$$A(x=l) = \frac{P_{load}}{P_{in}} = e^{-2\alpha l}$$

Für die am Lastwiderstand $\underline{Z}_2$ abfallende Leistung gilt

$$P_{avg} = \frac{1}{2} \frac{|\underline{\hat{U}}_{F0}|^2}{Z_0} (1 - |\underline{r}|^2)$$