Formelsammlung Hochfrequenztechnik

Alex Jäger

26. April 2019

1 Grundlegende Formeln

$$\lambda_0 \hat{=} \text{ Wellenlänge im Vakuum} \tag{1}$$

$$T = \frac{1}{f} \tag{2}$$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} \tag{3}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_R}} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Zusammenhang komplexer Zeiger und Zeitfunktion

$$u(t) \hat{=} \text{ Zeitfunktion} \tag{6}$$

$$\underline{\hat{U}} \hat{=} \text{ Komplexer Amplitudenzeiger} \tag{7}$$

$$\underline{\hat{U}}(x) \hat{=} \text{ Komplexer Amplitudenzeiger an der Stelle x} \tag{8}$$

$$\underline{\hat{U}}_0 \hat{=} \text{ Komplexer Amplitudenzeiger bei x=0} \tag{9}$$

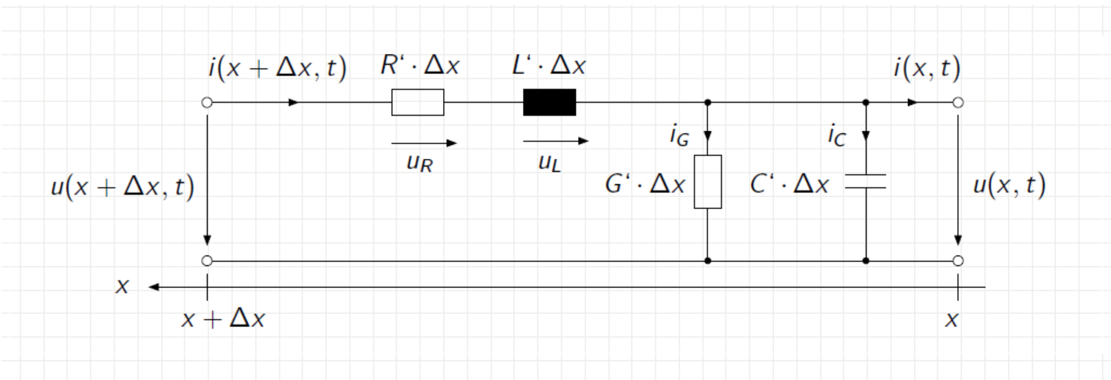
$$u(t) = Re\{\underline{\hat{U}} e^{j\omega t}\} \tag{10}$$

$$\underline{\hat{U}} = \hat{U} * e^{j\varphi} \tag{11}$$

$$\underline{\hat{U}}(x) = \underline{\hat{U}}_0 * e^{\gamma x} \tag{12}$$

2 Leitungstheorie

2.1 Leitungsmodell



Kirchhoff'sche Regel führt z.B. zu

$$u_R + u_L + u(x,t) - u(x+\Delta x, t) = 0 \tag{13}$$

$$R' * \Delta x * i(x+\Delta x, t) + L' * \Delta x * \frac{\partial i(x+\Delta x, t)}{\partial t} + u(x,t) - u(x+\Delta x, t) = 0 \tag{14}$$

oder

$$i(x+\Delta x,t) - i_g - i_c - i(x,t) = 0 \tag{15}$$

$$i(x+\Delta x,t) - G' * \Delta x * u(x,t) - C' * \Delta x * \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - i(x,t) = 0 \tag{16}$$

2.2 Telegraphengleichungen

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = R' * i(x,t) + L' * \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \tag{17}$$

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G' * u(x,t) + C' * \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{18}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = L'C' \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + (R'C' + L'G') \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + R'G' * u(x,t) \tag{19}$$

2.2.1 Telegraphengleichungen im Komplexen

$$\frac{\partial \underline{\hat{U}}(x)}{\partial x} = (R' + j\omega L') * \underline{\hat{I}}(x) \tag{20}$$

$$\frac{\partial \underline{\hat{I}}(x)}{\partial x} = (G' + j\omega C') * \underline{\hat{U}}(x) \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\hat{U}}(x)}{\partial x^2} = L'C'(j\omega)^2 * \underline{\hat{U}}(x) + (R'C' + L'G')j\omega * \underline{\hat{U}}(x) + R'G'\underline{\hat{U}}(x) \tag{22}$$

Durch Einsetzen von $\underline{\hat{U}}(x) = \underline{\hat{U}}_0 e^{\gamma x}$ folgt

$$\gamma_{1,2} = \pm\sqrt{(R' + j\omega L') + (G' + j\omega C')} \tag{23}$$

$$\gamma_{1,2} = \pm(\alpha + j\beta) \text{ mit } \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{24}$$

2.3 Spannungszeiger an der Position x als Summe fort- und rücklaufender Welle

$$\underline{\hat{U}}(x) = \underline{\hat{U}}_F(x) + \underline{\hat{U}}_B(x) \tag{25}$$

$$\underline{\hat{U}}(x) = \underline{\hat{U}}_{0F} e^{\gamma x} + \underline{\hat{U}}_{0B} e^{-\gamma x} \tag{26}$$

Hinweis: Der Stromzeiger ergibt sich als Differenz der anderen Stromzeiger.

$$\underline{\hat{I}}(x) = \underline{\hat{I}}_{0F} e^{\gamma x} - \underline{\hat{I}}_{0B} e^{-\gamma x} \tag{27}$$

2.4 Charakteristische Impedanz einer Leitung

$$\underline{Z}_0 = \frac{R' + j\omega L'}{\gamma} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \tag{28}$$

$$\underline{\hat{I}}(x) = \frac{1}{\underline{Z}_0} * (\underline{\hat{U}}_{0F} e^{\gamma x} - \underline{\hat{U}}_{0B} e^{-\gamma x}) \tag{29}$$

2.5 Reflexionskoeffizient verlustfreier Leitungen

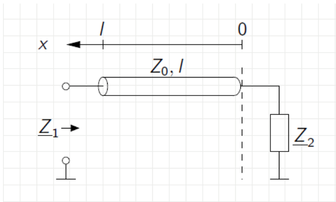
Trifft eine Leitung der charakteristische Impedanz Z_0 auf einen Widerstand der Impedanz $\underline{Z}_2$ (Hinweis: $Z_0 \in \mathbb{R}$, weil die Leitung verlustfrei ist), so ergibt sich eine Reflexion mit dem Faktor

$$\underline{r} = \frac{\underline{\hat{U}}_B}{\underline{\hat{U}}_F} \tag{30}$$

An der Position x=0 gilt

$$\underline{r}(x = 0) = \frac{\underline{Z}_2 - Z_0}{\underline{Z}_2 + Z_0} \tag{31}$$

2.6 Gesamtimpedanz von Leitung und Widerstand



$$\underline{Z}_1 = Z_0 * \frac{\underline{Z}_2 + jZ_0 tan(\beta l)}{Z_0 + j\underline{Z}_2 tan(\beta l)} \text{ mit } \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{32}$$

Daraus folgt für $\underline{Z}_2 = 0$

$$\underline{Z}_1 = jZ_0 tan(\beta l) \tag{33}$$

und für $\underline{Z}_2 \to \infty$

$$\underline{Z}_1 = -jZ_0 \frac{1}{tan(\beta l)} \tag{34}$$

2.7 Leistung am Widerstand

Falls $\underline{r} = 0$ gilt

$$A(x = l) = \frac{P_{load}}{P_{in}} = e^{-2\alpha l} \tag{35}$$

Für die am Lastwiderstand $\underline{Z}_2$ abfallende Leistung gilt

$$P_{avg} = \frac{1}{2} \frac{|\underline{\hat{U}}_{F0}|^2}{Z_0} (1 - |\underline{r}|^2) \tag{36}$$

2.8 TEM Leitungen

Tranversive-Elektromagnetisch Wellen: $TEM \hat{=} E_Z = H_Z = 0$ Ist eine Welle auf einer Leitung TEM, so gelten die folgenden Formeln.

$$\textbf{Phasengeschwindigkeit} \tag{37}$$

$$\frac{v_{ph}}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_R}} \tag{38}$$

$$\textbf{Verzögerung} \tag{39}$$

$$\frac{1}{v_{ph}} \approx 3,3\frac{ns}{m}\sqrt{\epsilon_R} \tag{40}$$

$$\textbf{Induktivitätsbelag} \tag{41}$$

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi}ln(\frac{D}{d}) \approx 0,2\frac{\mu H}{m} * ln(\frac{D}{d}) \tag{42}$$

$$\textbf{Charakteristische Impedanz} \tag{43}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} * \frac{ln\frac{D}{d}}{2\pi\sqrt{\epsilon_R}} = \frac{60\omega}{\sqrt{\epsilon_R}}ln\frac{D}{d} \tag{44}$$

$$\textbf{Grenzfrequenz des } TE_{11} \textbf{ Modells} \tag{45}$$

$$f_c \approx \frac{2c_0}{\pi\sqrt{\epsilon_R}(D+d)} \tag{46}$$

$$\textbf{Kapazitätsbelag} \tag{47}$$

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_R}{ln\frac{D}{d}} \approx 55,6\frac{pF}{m} * \frac{\epsilon_R}{ln\frac{D}{d}} \tag{48}$$

$$\tag{49}$$

2.9 Streuparameter

Normiere hin- und rücklaufende Wellen mit der Wurzel des Wellenwiderstand Z_{0n} der jeweiligen Anschlussleitung an Tor i:

$$\underline{a}_n = \frac{\underline{\hat{U}}_{Fn}}{\sqrt{Z_{0n}}} = \underline{\hat{I}}_{Fn} * \sqrt{Z_{0n}} \tag{50}$$

$$\underline{b}_n = \frac{\underline{\hat{U}}_{Bn}}{\sqrt{Z_{0n}}} = -\underline{\hat{I}}_{Bn} * \sqrt{Z_{0n}} \tag{51}$$

Mit der Matrix aller Streuparameter $\underline{S} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gilt nun das Gleichungssystem:

$$\underline{\vec{b}} = \underline{S} * \underline{\vec{a}} \tag{52}$$

So entsteht beispielsweise für einen Vierpol (Zweitor) folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \underline{b_1} \\ \underline{b_2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S_{11}} & \underline{S_{12}} \\ \underline{S_{21}} & \underline{S_{22}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{a_1} \\ \underline{a_2} \end{bmatrix} \tag{53}$$

3 Sende- und Empfangsantennen

3.1 Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{54}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J_c} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{55}$$

$$\vec{\nabla} * \vec{D} = \rho \tag{56}$$

$$\vec{\nabla} * \vec{B} = 0 \tag{57}$$

4 Standard-Parameter

$$\epsilon_R = 4,6 \tag{58}$$

$$H = 1,5mm \tag{59}$$

$$T = 35\mu m \tag{60}$$

$$tanD = 0,02 \tag{61}$$