

Mục tiêu: Cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về hàm số một biến số và nhiều biến số. Trên cơ sở đó, sinh viên có thể học tiếp các học phần sau về Toán cũng như các môn học kỹ thuật khác, góp phần tạo nên nền tảng Toán học cơ bản cho kỹ sư các ngành công nghệ và kinh tế.

Objective: This course provides the basics knowledge about functions of one variable and several variables. Students can understand the basics of computing technology and continue to study further.

Nội dung: Giới hạn, liên tục, đạo hàm, vi phân của hàm số một biến số và nhiều biến số. Tích phân của hàm số một biến số.

Contents: Limits, continuities, derivatives, differentials of functions of one variable and several variables. Integrals of functions of one variable.

1. THÔNG TIN CHUNG

Tên học phần:	Giải tích I ((Analysis I)
Đơn vị phụ trách:	Viện Toán ứng dụng và Tin học
Mã số học phần:	MI1111
Khối lượng:	4(3-2-0-8) - Lý thuyết: 45 tiết - Bài tập: 30 tiết - Thí nghiệm: 0 tiết
Học phần tiên quyết:	Không
Học phần song hành:	Không

2. MÔ TẢ HỌC PHẦN

Môn học này nhằm cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về phép tính vi phân hàm một biến số, phép tính tích phân hàm một biến số, hàm số nhiều biến số.

3. MỤC TIÊU VÀ CHUẨN ĐẦU RA CỦA HỌC PHẦN

Sinh viên hoàn thành học phần này có khả năng:

Mục tiêu/CĐR	Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần	CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ(I/T/U)
[1]	[2]	[3]
M1	Nắm vững các kiến thức cơ bản của giải tích 1 và vận dụng thực hành giải được các bài tập liên quan	
M1.1	Nắm vững các khái niệm cơ bản của giải tích 1 như: Giới hạn dãy số, giới hạn hàm số, hàm số liên tục, đạo hàm và vi phân cấp cao, cực trị của hàm số một biến số và hàm nhiều biến số; nguyên hàm và tích phân của hàm một biến số...	I/T
M1.2	Có khả năng vận dụng các kiến thức để giải được các bài tập liên quan tới nội dung môn học.	T/U

Mục tiêu/CĐR	Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần	CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ(I/T/U)
M2	Đạt được thái độ làm việc nghiêm túc cùng kỹ năng cần thiết để việc làm đạt hiệu quả cao	
M2.1	Có kỹ năng: phân tích và giải quyết vấn đề bằng tư duy, logic chặt chẽ; làm việc độc lập, tập trung.	T/U
M2.2	Nhận diện một số vấn đề thực tế có thể sử dụng công cụ của đại số tuyến tính để giải quyết.	I/T/U
M2.3	Thái độ làm việc nghiêm túc, chủ động sáng tạo, thích nghi với môi trường làm việc có tính cạnh tranh cao.	I/T

4. TÀI LIỆU HỌC TẬP

Giáo trình

- [1] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiền, Nguyễn Xuân Thảo (2015). *Toán học cao cấp, tập 2: Giải tích*, NXBGD, Hà Nội.
- [2] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiền, Nguyễn Xuân Thảo (2017). *Bài tập Toán học cao cấp, tập 2: Giải tích*, NXBGD, Hà Nội.
- [3] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2000). *Bài tập Toán học cao cấp tập 1*, NXBGD, Hà Nội.
- [4] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (1999). *Bài tập Toán học cao cấp tập 2*, NXBGD, Hà Nội.

Sách tham khảo

- [1] Trần Bình (1998), *Giải tích I, Phép tính vi phân và tích phân của hàm một biến*. NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
- [2] Trần Bình (2005), *Giải tích II và III, Phép tính vi phân và tích phân của hàm nhiều biến*. NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
- [3] Trần Bình (2001), *Hướng dẫn giải bài tập giải tích toán học, tập 1*. NXB Đại học quốc gia Hà Nội.
- [4] Trần Bình (2001), *Bài tập giải sẵn giải tích II*. NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

5. CÁCH ĐÁNH GIÁ HỌC PHẦN

Điểm thành phần	Phương pháp đánh giá cụ thể	Mô tả	CĐR được đánh giá	Tỷ trọng
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
A1. Điểm quá trình (*)	Đánh giá quá trình			30%
	A1.1. Bài tập trên lớp và bài tập về nhà	Tự luận	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	
	A1.2. Kiểm tra giữa kỳ	Thi tự luận		
A2. Điểm cuối kỳ	A2.1. Thi cuối kỳ	Thi tự luận	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	70%

* Điểm quá trình sẽ được điều chỉnh bằng cách cộng thêm điểm chuyên cần, điểm tích cực học tập. Điểm chuyên cần và điểm tích cực học tập có giá trị từ -2 đến +2 theo qui định của

6. KẾ HOẠCH GIẢNG DẠY

Tuần	Nội dung	CDR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
1	<ul style="list-style-type: none"> Giới thiệu về môn học - Thông tin giảng viên - Các vấn đề liên quan đến môn học <p>Cách thức dạy, học và hình thức đánh giá.</p> <p>Chương 1. Phép tính vi phân hàm một biến số (18 LT+ 13 BT)</p> <p>1.1 Mở đầu</p> <p>1.2 Định nghĩa hàm số, một số khái niệm cơ bản về hàm số, hàm hợp, hàm ngược</p> <p>1.3 Các hàm số sơ cấp cơ bản : Hàm lượng giác ngược, hàm hyperbolic, khái niệm hàm số sơ cấp</p> <p>1.4 Dãy số: định nghĩa dãy số, các khái niệm cơ bản. Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn: tiêu chuẩn kẹp, tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn. Tiêu chuẩn Cauchy.</p>	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3	<p>Giảng viên:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Tự giới thiệu. - Giới thiệu đề cương môn học. - Giải thích cách thức dạy và học cũng như hình thức đánh giá môn học. - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài. <p>Sinh viên:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Chuẩn bị đọc trước nội dung bài giảng của tuần kế tiếp. - Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng giải các bài tập phù hợp nội dung và tiến độ môn học. 	A1.1: 1.1- 1.4, A1.2, A2.1
2	<p>1.5 Giới hạn hàm số: hai định nghĩa tương đương, các phép toán và tính chất. Giới hạn của hàm hợp, giới hạn một phía, giới hạn ở vô cực và giới hạn vô cực</p> <p>1.6 Các khái niệm vô cùng bé (VCB), vô cùng lớn (VCL), so sánh các VCB, VCL, các tính chất và các quy tắc ngắt bỏ VCB, VCL</p> <p>1.7 Hàm số liên tục, liên tục một phía, liên tục đều và các tính chất. Điểm gián đoạn của hàm số, phân loại điểm gián đoạn, Hàm liên tục từng khúc.</p>		<p>Giảng viên:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài. <p>Sinh viên:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Chuẩn bị đọc trước nội dung bài giảng của tuần kế tiếp. - Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng kiến thức thực hành giải các bài tập môn học cũng như một số bài toán thực tế có mô hình gắn với nội dung môn học. 	A1.1: 1.5- 1.7, A1.2, A2.1
3	<p>1.8 Đạo hàm và vi phân</p> <ul style="list-style-type: none"> - Một số khái niệm cơ bản - Đạo hàm một phía, mối quan hệ giữa đạo hàm và đạo hàm một phía, mối quan hệ giữa đạo hàm và liên tục. - Đạo hàm của hàm hợp, Đạo hàm của hàm số ngược - Vi phân: định nghĩa, ý nghĩa hình học, ứng dụng vi phân để tính gần đúng. Mối liên hệ giữa hàm số có đạo hàm và hàm khả vi. Vi phân của hàm hợp và tính bất biến của vi phân cấp một 			A1.1: 1.8, A1.2, A2.1
4	- Đạo hàm và vi phân cấp cao			A1.1:

Tuần	Nội dung	CDR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	1.9 Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng - Các định lý Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy			1.8-1.9, A1.2, A2.1
5	- Các công thức khai triển Taylor, Maclaurin - Các quy tắc L'Hospital để khử dạng vô định, ứng dụng khai triển hữu hạn để tìm giới hạn - Hàm số đơn điệu và các tính chất - Bất đẳng thức hàm lồi - Cực trị của hàm số - Phương pháp Newton (tiếp tuyến)			A1.1: 1.9, A1.2, A2.1
6	1.10 Khảo sát hàm số, đường cong - Hàm số $y=f(x)$ - Đường cong cho dạng tham số - Đường cong cho trong tọa độ cực	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3		A1.1: 1.10, A1.2, A2.1
7	Chương 2. Phép tính tích phân hàm một biến số (15 LT+ 9BT) 2.1 Tích phân bất định - Một số khái niệm cơ bản - Tích phân các hàm phân thức hữu tỉ	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1: 2.1, A1.2, A2.1
8	- Tích phân các hàm vô tỉ, lượng giác. Một số ví dụ đơn giản về phép đổi biến Euler 2.2 Tích phân xác định - Định nghĩa, ý nghĩa hình học, cơ học	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3		A1.1: 2.1-2.2, A1.2, A2.1
9	Kiểm tra giữa kỳ: Chương 1 và chương 2 đến hết tích phân các hàm phân thức hữu tỉ		Thi	A1.2
10	- Tiêu chuẩn khả tích. Các tính chất của tích phân xác định - Công thức đạo hàm theo cận, công thức Newton- Leibniz - Các phương pháp tính 2.3 Tích phân suy rộng (TPSR): - TPSR loại 1: Định nghĩa, ý nghĩa hình học, các khái niệm hội tụ, phân kỳ, giá trị của tích phân	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3	Giảng viên: - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài. Sinh viên: - Chuẩn bị đọc trước nội dung bài giảng của tuần kế tiếp. - Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng kiến thức thực hành giải các bài	A1.1: 2.2-2.3, A2.1
11	- TPSR loại 1: TPSR của hàm số không âm, các định lý so sánh, hội tụ tuyệt đối, bán			A1.1: 2.3-

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	hội tụ - TPSR loại 2: Định nghĩa, ý nghĩa hình học, các khái niệm hội tụ, phân kỳ, giá trị của tích phân, TPSR của hàm số không âm, các định lý so sánh, hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ 2.4 Ứng dụng của tích phân xác định - Sơ đồ tổng tích phân, vi phân		tập môn học cũng như một số bài toán thực tế có mô hình gắn với nội dung môn học.	2.4, A2.1
12	- Tính diện tích miền phẳng, mặt tròn xoay; thể tích vật thể; độ dài cung phẳng	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3		A1.1: 2.4, A2.1
13	Chương 3. Hàm số nhiều biến số (12 LT+ 8 BT) 3.1 Các khái niệm cơ bản: - Miền, khoảng cách, lân cận, biên, miền đóng, mở, bị chặn - Định nghĩa hàm nhiều biến, ý nghĩa hình học, tập xác định, tập giá trị - Giới hạn của hàm nhiều biến (giới hạn theo hàm điểm), các phép toán - Hàm liên tục: Định nghĩa, các phép toán, tính chất, liên tục đều	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1: 3.1, A2.1
14	3.2 Đạo hàm riêng và vi phân - Đạo hàm riêng: Định nghĩa, cách tính - Vi phân toàn phần: Định nghĩa, mối liên hệ giữa hàm số khả vi và có đạo hàm riêng, ứng dụng tính gần đúng - Đạo hàm riêng và vi phân của các hàm hợp, tính bất biến của vi phân cấp 1 - Hàm ẩn: Định nghĩa, định lý tồn tại và cách tính đạo hàm riêng			A1.1: 3.2, A2.1
15	- Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao: Định nghĩa, định lý Schwartz về điều kiện các đạo hàm riêng hỗn hợp bằng nhau, tính không bất biến của vi phân cấp cao - Công thức khai triển Taylor 3.3 Cực trị của hàm số nhiều biến - Định nghĩa - Quy tắc tìm cực trị	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3		A1.1: 3.2-3.3, A2.1
16	- Cực trị có điều kiện - Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất		Giảng viên: - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình	A1.1: 3.3, A2.1

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	Tổng kết		giảng bài. Sinh viên: - Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng kiến thức thực hành giải các bài tập môn học cũng như một số bài toán thực tế có mô hình gắn với nội dung môn học.	

7.

8. QUY ĐỊNH CỦA HỌC PHẦN

(Các quy định của học phần nếu có)

9. NGÀY PHÊ DUYỆT: 26/7/2020



Viện Toán ứng dụng và Tin học

VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy



BÀI TẬP THAM KHẢO GIẢI TÍCH I**Nhóm ngành 1****Mã số : MI 1111**

1) Kiểm tra giữa kỳ hệ số 0.3, Tự luận, 60 phút.

Nội dung: Chương 1 và chương 2 đến hết tích phân các hàm phân thức hữu tỉ.

2) Thi cuối kỳ hệ số 0.7, Tự luận, 90 phút.

Chương 1

Phép tính vi phân hàm một biến số

1.1-1.4. Dãy số, hàm số

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \sqrt{2 \operatorname{arccot} x - \pi}$

c) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

b) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

d) $y = \arccos(\sin x)$

Bài 2. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sinh(-x) = -\sinh x$

d) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

b) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

e) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

c) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

f) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

Bài 3. Tìm miền giá trị của các hàm số

a) $y = \log(1 - 2 \cos x)$

c) $y = \operatorname{arccot}(\sin x)$

b) $y = \arcsin\left(\log \frac{x}{10}\right)$

d) $y = \arctan(e^x)$

Bài 4. Tìm $f(x)$ biết

a) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

b) $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$

Bài 5. Tìm hàm ngược của các hàm số

a) $y = 2 \arcsin x$

b) $y = \frac{1-x}{1+x}$

c) $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Bài 6. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số

a) $f(x) = a^x + a^{-x}, (a > 0)$

c) $f(x) = \sin x + \cos x$

b) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

d) $f(x) = \arcsin(\tan x)$

Bài 7. Chứng minh rằng bất kỳ hàm số $f(x)$ nào xác định trong một khoảng đối xứng $(-a, a)$, $(a > 0)$ cũng đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng của một hàm số chẵn với một hàm số lẻ.

Bài 8. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số xác định trên khoảng đối xứng $(-a, a)$, $(a > 0)$. Chứng minh:

a) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm chẵn thì tổng và tích của chúng là hàm chẵn.

b) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm lẻ thì tổng của chúng là hàm lẻ và tích của chúng là hàm chẵn.

c) Nếu $f(x)$ là hàm lẻ và $g(x)$ là hàm chẵn thì tích của chúng là hàm lẻ.

Bài 9. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của các hàm số sau (nếu có)

a) $f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$

c) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$

b) $f(x) = \sin(x^2)$

d) $f(x) = \cos^2 x$

Bài 10. Tìm giới hạn của các dãy số (nếu hội tụ) với số hạng tổng quát x_n như sau

a) $x_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

c) $x_n = \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$

b) $x_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$

d) $x_n = \frac{\sqrt{n} \cos n}{n+1}$

Bài 11. Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của các dãy với số hạng tổng quát x_n như sau

a) $x_n = \sqrt[n]{n^2 + 2}$

b) $x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \right), x_0 > 0$

1.5-1.6. Giới hạn hàm số

Bài 12. Tìm các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \sqrt{1+x} - \frac{1}{x} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}, (m, n \in \mathbb{N}^*)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1}{\ln(1+3\sin x)}$

Bài 13. Tìm các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + \arccos^3 x) - \ln x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$

Bài 14. Tìm các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}), x > 0.$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(e+2x)]^{\frac{1}{\sin x}}$

Bài 15. So sánh các cặp VCB sau

a) $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ và $\beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$, khi $x \rightarrow 0^+$

b) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$ và $\beta(x) = \cos x - 1$, khi $x \rightarrow 0^+$

c) $\alpha(x) = x^3 + \sin^2 x$ và $\beta(x) = \ln(1 + 2 \arctan(x^2))$, khi $x \rightarrow 0$

1.7. Hàm số liên tục

Bài 16. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 0$

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ a, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & \text{nếu } x \geq 0, \\ a \cos x + b \sin x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Bài 17. Hàm $f(x)$ sau liên tục tại những giá trị x nào?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ}, \\ 1, & \text{nếu } x \text{ vô tỉ}. \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ}, \\ x, & \text{nếu } x \text{ vô tỉ}. \end{cases}$$

Bài 18. Điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại gì của các hàm số

$$\text{a) } y = \frac{8}{1 - 2^{\cot x}}$$

$$\text{c) } y = \frac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$\text{b) } y = \frac{1}{x} \arcsin x$$

$$\text{d) } y = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \quad (a \neq b)$$

Bài 19. Các hàm số sau đây có liên tục đều trên miền đã cho không?

$$\text{a) } y = \frac{x}{4 - x^2}; -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{b) } y = \ln x; 0 < x < 1$$

1.8. Đạo hàm và vi phân

Bài 20. Tìm đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{nếu } x < 1, \\ (1 - x)(2 - x), & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2, \\ x - 2, & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

Bài 21. Tìm $f'(x)$ biết $\frac{d}{dx}[f(2017x)] = x^2$.

Bài 22. Với điều kiện nào thì hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

a) liên tục tại $x = 0$ c) có đạo hàm liên tục tại $x = 0$.b) khả vi tại $x = 0$

Bài 23. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x - a|\varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số liên tục và $\varphi(a) \neq 0$, không khả vi tại điểm $x = a$.

Bài 24. Tìm vi phân của các hàm số

a) $y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, (a \neq 0)$

c) $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|, (a \neq 0)$

b) $y = \arcsin \frac{x}{a}, (a \neq 0)$

d) $y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|$

Bài 25. Tìm

a) $\frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$

b) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

c) $\frac{d}{d(x^3)} (x^3 - 2x^6 - x^9)$.

Bài 26. Tính gần đúng giá trị của các biểu thức

a) $\sqrt[3]{7,97}$

b) $\sqrt[7]{\frac{2-0,02}{2+0,02}}$

c) $\sqrt{3e^{0,04} + 1,02^2}$

Bài 27. Nếu $C(x)$ là chi phí sản xuất của x đơn vị một mặt hàng nào đó. Khi đó chi phí biên là $C'(x)$ cho biết chi phí phải bỏ ra khi muốn tăng sản lượng thêm một đơn vị. Cho hàm

$$C(x) = 2000 + 3x + 0,01x^2 + 0,0002x^3.$$

Tìm hàm chi phí biên, xác định chi phí biên tại $x = 100$, giá trị đó nói lên điều gì?

Bài 28. Tìm đạo hàm cấp cao của các hàm số

a) $y = \frac{x^2}{1-x}$, tính $y^{(8)}$

d) $y = x^2 \sin x$, tính $y^{(50)}$

b) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tính $y^{(100)}$

e) $y = e^{x^2}$, tính $y^{(10)}(0)$

c) $y = \ln(2x - x^2)$, tính $y^{(5)}$

f) $y = x \ln(1 + 2x)$, tính $y^{(10)}(0)$

Bài 29. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số

a) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$

e) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

b) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

d) $y = e^{ax} \sin(bx + c)$

f) $y = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$

Bài 30. Tìm vi phân cấp cao của hàm số

a) $y = (2x + 1) \sin x$. Tính $d^{10}y(0)$

c) $y = x^9 \ln x$. Tính $d^{10}y(1)$

b) $y = e^x \cos x$. Tính $d^{20}y(0)$

d) $y = x^2 e^{ax}$. Tính $d^{20}y(0)$

Bài 31. Trong một hồ nuôi cá, cá trong hồ liên tục được sinh ra và khai thác. Số lượng cá trong hồ P được mô tả bởi phương trình:

$$P'(t) = r_0 \left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right) P(t) - \beta P(t)$$

với r_0 là tỉ lệ sinh sản, P_c là số lượng cá lớn nhất hồ có thể duy trì, β là tỉ lệ khai thác. Cho $P_c = 10000$, tỉ lệ sinh sản và tỉ lệ khai thác tương ứng là 5% và 4%. Tìm số lượng cá ổn định.

1.9. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Bài 32. Chứng minh rằng $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, phương trình

$$a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x = 0$$

có nghiệm trong khoảng $(0, \pi)$.

Bài 33. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$ với n nguyên dương, $n \geq 2$, không thể có quá 2 nghiệm thực nếu n chẵn, không có quá 3 nghiệm thực nếu n lẻ.

Bài 34. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $8ax^7 + 3bx^2 + c = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0, 1)$.

Bài 35. Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ không áp dụng được đối với các hàm số $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $-1 \leq x \leq 1$.

Bài 36. Chứng minh các bất đẳng thức

a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

c) $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2},$
 $0 < a < b$

b) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, 0 < b < a.$

Bài 37. Tồn tại hay không hàm số $f(x)$ sao cho $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ và $f'(x) \leq 2$ với mọi x ?

Bài 38. Tìm các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\tan \frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi x}{2} \ln(2-x)$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2^x)^{\frac{1}{x}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - a \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3^x)^{\tan \frac{1}{x}}$$

Bài 39. Xác định a, b sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}.$$

Bài 40. Cho f là một hàm số thực khả vi trên $[a, b]$ và có đạo hàm $f''(x)$ trên (a, b) . Chứng minh rằng với mọi $x \in (a, b)$ có thể tìm được ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c).$$

Bài 41. Dùng phương pháp Newton, tính $\sqrt[6]{2}$ đúng đến 8 chữ số thập phân sau dấu phẩy.

Bài 42. Giải thích tại sao phương pháp Newton không áp dụng trực tiếp được để giải phương trình $x^3 - 2x + 2 = 0$ với xấp xỉ đầu $x_0 = 1$.

Bài 43. Khảo sát tính đơn điệu của các hàm số

$$a) y = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$$

$$c) y = x + |\sin 2x|, x \in [0, \pi]$$

$$b) y = 3 \arctan x - \ln(1+x^2)$$

Bài 44. Chứng minh các bất đẳng thức

$$a) 2x \arctan x \geq \ln(1+x^2) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

$$b) x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \text{ với mọi } x \geq 0$$

$$c) \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Bài 45. Tìm cực trị của các hàm số

$$a) y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$$

$$c) y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$$

$$b) y = x - \ln(1+x)$$

$$d) y = x^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}$$

Bài 46. Cho $f(x)$ là hàm lồi trên đoạn $[a, b]$, chứng minh rằng $\forall c \in (a, b)$ ta có

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Bài 47. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $\tan \frac{x+y}{2} \leq \frac{\tan x + \tan y}{2}, \forall x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, \forall x, y > 0$

1.10. Khảo sát hàm số, đường cong

Bài 48. Tìm tiệm cận của các đường cong sau

a) $y = \sqrt[3]{1+x^3}$

b) $y = \ln(1 + e^{-x})$

c) $y = \frac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1+x^2}$

d) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = \frac{2016t^2}{1-t^3} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \arctan t \end{cases}$

Bài 49. Khảo sát các hàm số, đường cong sau

a) $y = e^{\frac{1}{x}-x}$

b) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

c) $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

d) $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

e) $\begin{cases} x = \frac{2t}{1-t^2} \\ y = \frac{t^2}{1+t} \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

g) $r = a + b \cos \varphi, (0 < a \leq b)$

h) $r = a \sin 3\varphi, (a > 0).$

Chương 2

Phép tính tích phân hàm một biến số

2.1 Tích phân bất định

Bài 50. Tính các tích phân

a) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$

e) $\int \frac{(x^2 + 2)dx}{x^3 + 1}$

i) $\int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}$

b) $\int (x + 2) \ln x dx$

f) $\int \frac{dx}{(x + a)^2(x + b)^2}$

j) $\int \frac{(3 - 2x)dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

c) $\int |x^2 - 3x + 2| dx$

g) $\int \sin 5x \cos 3x dx$

k) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}}$

d) $\int \frac{x dx}{(x + 2)(x + 5)}$

h) $\int \tan^3 x dx$

l) $\int \frac{(x + 1)dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$

Bài 51. Tính các tích phân

a) $\int \frac{x^4 dx}{x^{10} - 1}$

d) $\int \sin^{n-1} x \sin(n + 1)x dx, n \in \mathbb{N}^*$

b) $\int x \sqrt{-x^2 + 3x - 2} dx$

e) $\int e^{-2x} \cos 3x dx$

c) $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

f) $\int \arcsin^2 x dx$

Bài 52. Lập công thức truy hồi tính $I_n, n \in \mathbb{N}$

a) $I_n = \int x^n e^x dx$

b) $I_n = \int \sin^n x dx$

c) $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$

2.2 Tích phân xác định

Bài 53. Tính các đạo hàm

a) $\frac{d}{dx} \int_x^y e^{t^2} dt$

b) $\frac{d}{dy} \int_x^y e^{t^2} dt$

c) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{\frac{x^3}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

Bài 54. Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha + \beta} + \frac{1}{n\alpha + 2\beta} + \dots + \frac{1}{n\alpha + (n-1)\beta} \right], (\alpha, \beta > 0)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right)$

Bài 55. Tính các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$

Bài 56. Tính các tích phân sau

a) $\int_{1/e}^e |\ln x| (x+1) dx$

d) $\int_0^1 \frac{\sin^2 x \cos x}{(1 + \tan^2 x)^2} dx$

b) $\int_1^e (x \ln x)^2 dx$

e) $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$

c) $\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$

f) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx, n \in \mathbb{N}^*$

Bài 57. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì

a) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$

b) $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} f(\sin x) dx$

Áp dụng tính các tích phân sau

1. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$

2. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$

Bài 58. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả tích trên $[a, b]$. Chứng minh bất đẳng thức (với $a < b$)

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)$$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

2.3 Tích phân suy rộng

Bài 59. Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau

a) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

d) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 3x + 2}$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$

Bài 60. Xét sự hội tụ của các tích phân sau

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x) dx}{x^2}$

f) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$

g) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} dx$

c) $\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\ln^3 x}$

h) $\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} dx$

d) $\int_0^1 \frac{dx}{\tan x - x}$

i) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{\sqrt{x^3}}$

e) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}}$

j) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx$

Bài 61. Nếu $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ thì có suy ra được $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ không? Xét ví dụ $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

Bài 62. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \neq 0$. Tích phân $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ có hội tụ không?

2.4 Ứng dụng của tích phân xác định

Bài 63. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a) Parabol $y = x^2 + 4$ và đường thẳng $x - y + 4 = 0$

b) Đường cong $y = x^3$ và các đường $y = x, y = 4x, (x \geq 0)$

c) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ và parabol $y^2 = x, (y^2 \leq x)$

d) Đường $y^2 = x^2 - x^4$

Bài 64. Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ $x^2 + y^2 \leq a^2$ và $y^2 + z^2 \leq a^2$, ($a > 0$).

Bài 65. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt cong $z = 4 - y^2$, các mặt phẳng tọa độ $x = 0, z = 0$ và mặt phẳng $x = a$ ($a \neq 0$).

Bài 66. Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$

a) quanh trục Ox một vòng

b) quanh trục Oy một vòng

Bài 67. Tính độ dài đường cong

a) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ khi x biến thiên từ 1 đến 2

b) $\begin{cases} x = a \left(\cos t + \ln \tan \frac{t}{2} \right) \\ y = a \sin t \end{cases}$ khi t biến thiên từ $\frac{\pi}{3}$ đến $\frac{\pi}{2}$, ($a > 0$)

Bài 68. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau

a) $y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ quay quanh trục Ox

b) $y = \frac{1}{3}(1 - x)^3, 0 \leq x \leq 1$ quay quanh trục Ox

Chương 3

Hàm số nhiều biến số

3.1 Các khái niệm cơ bản

Bài 69. Tìm miền xác định của các hàm số sau

a) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

c) $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$

b) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$

d) $z = \sqrt{x \sin y}$

Bài 70. Tìm các giới hạn (nếu có) của các hàm số sau

a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$

b) $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + 3xy}, \quad (x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty)$

c) $f(x, y) = \frac{(x-1)^3 - (y-2)^3}{(x-1)^2 + (y-2)^2}, \quad (x \rightarrow 1, y \rightarrow 2)$

d) $f(x, y) = \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$

e) $f(x, y) = \frac{x(e^y - 1) - y(e^x - 1)}{x^2 + y^2}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$

f) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$

Bài 71. Tính các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2},$

b) $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

3.2 Đạo hàm riêng và vi phân

Bài 72. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau

a) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

d) $z = x^{y^3}, (x > 0)$

b) $z = y^2 \sin \frac{x}{y}$

e) $u = x^{y^z}, (x, y, z > 0)$

c) $z = \arctan \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

f) $u = e^{\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}}$

Bài 73. Khảo sát sự liên tục của hàm số và sự tồn tại các đạo hàm riêng của nó

a) $f(x, y) = \begin{cases} x \arctan \left(\frac{y}{x} \right)^2, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}, & \text{nếu } (x, y) \neq (0; 0), \\ 0, & \text{nếu } (x, y) = (0; 0). \end{cases}$

Bài 74. Giả sử $z = yf(x^2 - y^2)$, ở đây f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x} z_x' + \frac{1}{y} z_y' = \frac{z}{y^2}.$$

Bài 75. Tìm đạo hàm riêng các hàm số hợp sau đây

a) $z = e^{u^2 - 2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $z = \ln(u^2 + v^2), u = xy, v = \frac{x}{y}$

c) $z = \arcsin(x - y), x = 3t, y = 4t^3$

Bài 76. Cho f là hàm số khả vi đến cấp hai trên \mathbb{R} . Chứng minh rằng hàm số $\omega(x, t) = f(x - 3t)$ thỏa mãn phương trình truyền sóng $\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$.

Bài 77. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

a) $z = \sin(x^2 + y^2)$

c) $z = \arctan \frac{x + y}{x - y}$

b) $z = \ln \tan \frac{y}{x}$

d) $u = x^{y^2 z}$

Bài 78. Ứng dụng vi phân, tính gần đúng

a) $A = \sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$

c) $C = \sqrt{(2,02)^3 + e^{0,03}}$

b) $B = \ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$

d) $D = (1,02)^{1,01}$

Bài 79. Cho $z = f(x, y)$ là hàm số ẩn xác định bởi phương trình $z - ye^{\frac{z}{x}} = 0$. Ứng dụng vi phân, tính gần đúng $f(0,99; 0,02)$.

Bài 80. Tìm đạo hàm, đạo hàm riêng của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau

a) $x^3y - y^3x = a^4$, tính y'

b) $x + y + z = e^z$, tính z'_x, z'_y

c) $\arctan \frac{x+y}{a} = \frac{y}{a}$, tính y'

d) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, tính z'_x, z'_y .

Bài 81. Cho hàm số ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình $2x^2y + 4y^2 + x^2z + z^3 = 3$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}(0; 1), \frac{\partial z}{\partial y}(0; 1)$.

Bài 82. Cho $u = \frac{x+z}{y+z}$, tính u'_x, u'_y biết rằng z là hàm số ẩn của x, y xác định bởi phương trình $ze^z = xe^x + ye^y$.

Bài 83. Tìm đạo hàm của hàm số ẩn $y(x), z(x)$ xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Bài 84. Phương trình $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng

$$x^2 z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{1}{z}.$$

Bài 85. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số sau

a) $z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$

c) $z = \arctan \frac{y}{x}$

b) $z = x^2 \ln(x + y)$

d) $z = \sin(x^3 + y^2)$

Bài 86. Tính vi phân cấp hai của hàm số sau:

a) $z = xy^3 - x^2y$

b) $z = e^{2x}(x + y^2)$

c) $z = \ln(x^3 + y^2)$

Bài 87. a) Khai triển hàm số $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy + 6x + 2y - 4$ thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm $(-2, 1)$.

b) Khai triển Maclaurin hàm số $f(x, y) = e^x \sin y$ đến bậc 3.

3.3 Cực trị của hàm số nhiều biến số

Bài 88. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $z = 4x^3 + 6x^2 - 4xy - y^2 - 8x + 2$

d) $z = \frac{4}{x} + \frac{3}{y} - \frac{xy}{12}$

b) $z = 2x^2 + 3y^2 - e^{-(x^2+y^2)}$

e) $z = e^{2x}(4x^2 - 2xy + y^2)$

c) $z = 4xy - x^4 - 2y^2$

f) $z = x^3 + y^3 - (x + y)^2$

Bài 89. Tìm cực trị có điều kiện

a) $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$

b) $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $3x - 4y = 5$

c) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

Bài 90. Tìm một điểm thuộc elip $4x^2 + y^2 = 4$ sao cho nó xa điểm $A(1; 0)$ nhất.

Bài 91. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số

a) $z = x^2 + y^2 + xy - 7x - 8y$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, và $x + y = 6$

b) $z = 4x^2 - 9y^2$ trong miền giới hạn bởi đường elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Bài 86. Tính vi phân cấp hai của hàm số sau:

a) $z = xy^3 - x^2y$

b) $z = e^{2x}(x + y^2)$

c) $z = \ln(x^3 + y^2)$

Bài 87. a) Khai triển hàm số $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy + 6x + 2y - 4$ thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm $(-2, 1)$.

b) Khai triển Maclaurin hàm số $f(x, y) = e^x \sin y$ đến bậc 3.

3.3 Cực trị của hàm số nhiều biến số

Bài 88. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $z = 4x^3 + 6x^2 - 4xy - y^2 - 8x + 2$

d) $z = \frac{4}{x} + \frac{3}{y} - \frac{xy}{12}$

b) $z = 2x^2 + 3y^2 - e^{-(x^2+y^2)}$

e) $z = e^{2x}(4x^2 - 2xy + y^2)$

c) $z = 4xy - x^4 - 2y^2$

f) $z = x^3 + y^3 - (x + y)^2$

Bài 89. Tìm cực trị có điều kiện

a) $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$

b) $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $3x - 4y = 5$

c) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

Bài 90. Tìm một điểm thuộc elip $4x^2 + y^2 = 4$ sao cho nó xa điểm $A(1; 0)$ nhất.

Bài 91. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số

a) $z = x^2 + y^2 + xy - 7x - 8y$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, và $x + y = 6$

b) $z = 4x^2 - 9y^2$ trong miền giới hạn bởi đường elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

----- Hết -----

