MI1141 **ĐẠI SỐ (nhóm ngành 1)**

Phiên bản: 2020.1.0

Mục tiêu: Trang bị cho sinh viên những kiến thức cơ bản về logic và đại số tuyến tính như ma trận, định thức hệ phương trình, không gian véc tơ, không gian Euclide, ... làm cơ sở để cho việc học tiếp các học phần sau về toán cũng như các môn kỹ thuật khác, từ đó sinh viên có khả năng vận dụng kiến thức của môn học vào việc giải quyết một số mô hình bài toán thực tế.

Nội dung: Logic, Tập hợp, Ánh xạ, Số phức, Ma trận định thức, hệ phương trình; Không gian véc tơ, Ánh xạ tuyến tính, Không gian Euclide.

1. THÔNG TIN CHUNG

Tên học phần:	Đại số
Đơn vị phụ trách:	Viện Toán ứng dụng và Tin học
Mã số học phần:	MI1141
Khối lượng:	4(3-2-0-8) - Lý thuyết: 45 tiết - Bài tập: 30 tiết - Thí nghiệm: 0 tiết
Học phần tiên quyết:	Không
Học phần song hành:	Không

2. MÔ TẢ HỌC PHẦN

Môn học này nhằm cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về logic và đại số tuyến tính như logic, tập hợp, ánh xạ, số phức, ma trận, định thức hệ phương trình, không gian véc tơ, không gian Euclide,...

Ngoài ra môn học cũng rèn luyện cho sinh viên kỹ năng giải quyết vấn đề bằng tư duy logic chặt chẽ, kỹ năng làm việc độc lập, sự tập trung cùng thái độ làm việc nghiêm túc.

3. MỤC TIÊU VÀ CHUẨN ĐẦU RA CỦA HỌC PHẦN

Sinh viên hoàn thành học phần này có khả năng:

Mục tiêu/CĐR	Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần	CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ (I/T/U)
[1]	[2]	[3]
M1	**Nắm vững được các kiến thức cơ bản của logic và đại số tuyến tính**	
M1.1	Nắm vững các khái niệm cơ bản của logic và đại số tuyến tính như: mệnh đề, tập hợp, ma trận, hệ phương trình tuyến tính, không gian véc tơ, không gian Euclide, ánh xạ tuyến tính.	I/T
M1.2	Có khả năng vận dụng kiến thức đã học để giải các bài tập liên quan tới nội dung môn học.	T/U
M2	**Có thái độ làm việc nghiêm túc cùng kỹ năng cần thiết để làm việc có hiệu quả**	
M2.1	Có kỹ năng: phân tích và giải quyết vấn đề bằng tư duy, logic chặt chẽ; làm việc độc lập, tập trung.	T/U
M2.2	Nhận diện một số vấn đề thực tế có thể sử dụng công cụ của đại số tuyến tính để giải quyết.	I/T/U
M2.3	Thái độ làm việc nghiêm túc, chủ động sáng tạo, thích nghi với môi trường làm việc có tính cạnh tranh cao.	I/T

4. TÀI LIỆU HỌC TẬP

Giáo trình

[1] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Xuân Thảo (2015), ***Toán học cao cấp tập 1: Đại số và hình học giải tích***, NXB Giáo dục VN.

[2] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2006), *Bài tập Toán học cao cấp, tập 1: Đại số và hình học giải tích*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

Tài liệu tham khảo

[1] Dương Quốc Việt, Nguyễn Cảnh Lương (2015), *Đại số tuyến tính*, NXB Bách Khoa HN.

[2] Trần Xuân Hiển, Lê Ngọc Lăng, Tống Đình Quỳ, Nguyễn Cảnh Lương (2007), *Phương pháp giải toán cao cấp, Phần đại số*, NXB Đại học kinh tế quốc dân, Hà Nội.

[3] Nguyễn Tiến Quang, Lê Đình Nam (2016), *Cơ sở đại số tuyến tính*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

5. CÁCH ĐÁNH GIÁ HỌC PHẦN

Điểm thành phần	Phương pháp đánh giá cụ thể	Mô tả	CĐR được đánh giá	Tỷ trọng
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
A1. Điểm quá trình (*)	**Đánh giá quá trình**			**30%**
	A1.1. Bài tập trên lớp và bài tập về nhà	Tự luận	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	
	A1.2. Kiểm tra giữa kỳ	Thi tự luận		
A2. Điểm cuối kỳ	**A2.1. Thi cuối kỳ**	Thi tự luận	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	**70%**

** Điểm quá trình sẽ được điều chỉnh bằng cách cộng thêm điểm chuyên cần, điểm tích cực học tập. Điểm chuyên cần và điểm tích cực học tập có giá trị từ –2 đến +2, theo qui định của Viện Toán ứng dụng và Tin học cùng Quy chế Đào tạo đại học hệ chính quy của Trường ĐH Bách khoa Hà Nội.*

6. KẾ HOẠCH GIẢNG DẠY

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
1	**Chương 1. Lôgic, tập hợp, ánh xạ, số phức (12LT+ 8 BT)** **1.1** Đại cương về lôgic - Mệnh đề và trị chân lý - Các phép toán mệnh đề: hội, tuyển, phủ định, kéo theo và tương đương - Lôgic vị từ: hàm mệnh đề và phủ định	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3	**Giảng viên:** - Tự giới thiệu. - Giới thiệu đề cương môn học. - Giải thích cách thức dạy và học cũng như hình thức đánh giá môn học. - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài. **Sinh viên:** - Chuẩn bị đọc trước nội dung bài giảng của tuần kế tiếp. - Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng giải các bài tập phù hợp	A1.1 A1.2 A2.1

			nội dung và tiến độ môn học.	
2	**1.2** Sơ lược về lý thuyết tập hợp - Tập hợp và phần tử, cách cho tập hợp, tập hợp con, tập hợp bằng nhau - Các phép toán trên tập hợp: hợp, giao của hai hay nhiều tập hợp, hiệu, phần bù - Tích Decartes của hai hay nhiều tập hợp **1.3** Ánh xạ - Định nghĩa, ví dụ - Đơn ánh, toàn ánh, song ánh, tập ảnh, tập nghịch ảnh - Tích ánh xạ, ánh xạ ngược	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3	**Giảng viên:** - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài. **Sinh viên:** - Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng kiến thức thực hành giải các bài tập môn học cũng như một số bài toán thực tế có mô hình gắn với nội dung môn học.	A1.1 A1.2 A2.1
3	**1.4** Số phức - Phép toán hai ngôi - Giới thiệu cấu trúc nhóm, vành, trường	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A1.2 A2.1
4	- Xây dựng trường số phức a + ib - Biểu diễn hình học và dạng lượng giác của số phức - Các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, luỹ thừa, khai căn - Định lý cơ bản của đại số (không chứng minh)	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A1.2 A2.1
5	**Chương 2. Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính (8LT+ 6BT)** **2.1** Ma trận - Định nghĩa ma trận (MT), các kiểu MT: chữ nhật, vuông, không, tam giác trên, tam giác dưới, chéo, đơn	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A1.2 A2.1

	vị, chuyển vị,... - Các phép toán: cộng MT, nhân một số với MT, nhân MT với MT **2.2** Định thức của ma trận vuông - Định thức cấp 1, cấp 2, cấp 3, định thức cấp n (định nghĩa qua cấp n-1) - Các tính chất cơ bản của định thức, định thức của tích hai MT (không chứng minh) - Tính định thức bằng phương pháp biến đổi sơ cấp			
6	**2.3** Hạng ma trận, ma trận nghịch đảo - Hạng MT, hạng của MT bậc thang - Tính hạng MT bằng phương pháp biến đổi sơ cấp - MT nghịch đảo, tính chất, điều kiện khả đảo - Tìm MT nghịch đảo bằng phần phụ đại số và bằng biến đổi sơ cấp	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A1.2 A2.1
7	**2.4** Hệ phương trình tuyến tính - Khái niệm về hệ phương trình tuyến tính, nghiệm, hệ thuần nhất, không thuần nhất, dạng MT - Hệ Crame, định lý tồn tại duy nhất nghiệm, công thức nghiệm (chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm và dạng MT) - Hệ thuần nhất n phương trình n ẩn - Hệ phương trình tuyến tính tổng quát, định lý Kronecker – Capelli, phương pháp Gauss giải hệ phương trình **Chương 3. Không gian véctơ (7LT+ 5BT)**	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3		A1.1 A1.2 A2.1

	3.1 Khái niệm không gian véctơ - Định nghĩa, ví dụ - Những tính chất cơ bản			
8	**3.2** Không gian véctơ con - Định nghĩa, tiêu chuẩn nhận biết, ví dụ: không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất - Không gian con sinh bởi hệ véctơ	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A1.2 A2.1
9	**3.3** Cơ sở và toạ độ trong không gian véctơ hữu hạn chiều - Hệ độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính, hệ sinh, cơ sở, số chiều của không gian véctơ, định lý bổ sung vào một hệ độc lập tuyến tính trong không gian véctơ hữu hạn chiều để được cơ sở - Toạ độ của véctơ đối với một cơ sở, công thức đổi toạ độ khi đổi cơ sở - Hạng của hệ véctơ, cách tính hạng khi biết toạ độ của chúng, chiều của không gian con sinh bởi hệ véctơ	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A2.1
10	**Chương 4. Ánh xạ tuyến tính (8LT+ 5 BT)** **4.1** Khái niệm ánh xạ tuyến tín - Định nghĩa, ví dụ, các phép toán - Khái niệm hạt nhân, ảnh, đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A2.1
11	**4.2** Ma trận của ánh xạ tuyến tính - MT của ánh xạ tuyến tính f: E $\rightarrow$ F đối với cặp cơ sở của E, F tương ứng - MT của phép biến đổi tuyến tính đối với một cơ sở. Quan hệ của hai MT của cùng một phép biến đổi tuyến tính đối với hai cơ sở - MT đồng dạng	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A2.1

12	**4.3** Trị riêng và véctơ riêng - Trị riêng và véctơ riêng của toán tử tuyến tính (biến đổi tuyến tính), ví dụ. Cách tìm trị riêng và véctơ riêng trong không gian n chiều, dẫn đến định nghĩa trị riêng và véctơ riêng của MT - Chéo hoá MT: điều kiện cần và đủ để MT chéo tìm được, tìm MT làm chéo hoá và kết quả của chéo hoá (không chứng minh) **Chương 5. Dạng song tuyến tinh, dạng toàn phương, không gian Euclide, đường và mặt bậc hai (10LT+6BT)** **5.1** Dạng song tuyến, dạng toàn phương - Dạng song tuyến trên không gian véctơ: ($\varphi : V \times V \to R$), dạng song tuyến tính đối xứng	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3		A1.1 A2.1
13	- Dạng toàn phương, dạng toàn phương xác định dương, âm - Biểu thức toạ độ của dạng song tuyến tính đối với một cơ sở, MT dạng song tuyến tính, dạng toàn phương đối với một cơ sở. Đổi cơ sở - Dạng chính tắc của dạng toàn phương - Phương pháp Lagrange	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A2.1
14	**5.2** Không gian Euclide - Tích vô hướng, không gian có tích vô hướng, độ dài véctơ, sự vuông góc, góc giữa hai véctơ, bất đẳng thức Cauchy – Schwarz - Không gian Euclide, cơ sở trực giao,	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A2.1

	cơ sở trực chuẩn, biểu diễn tích vô hướng qua toạ độ trực chuẩn - Phép chiếu trực giao - Thuật toán Gram-Schmidt - MT trực giao (MT chuyển từ cơ sở trực chuẩn sang cơ sở trực chuẩn là MT trực giao) - Chéo hoá trực giao (điều kiện chéo hoá trực giao được, quy trình chéo hoá trực giao MT đối xứng)			
15	**5.3** Rút gọn dạng toàn phương - Phương pháp Jacobi - Tiêu chuẩn Sylvester (nêu kết quả) - Phương pháp chéo hoá trực giao (nêu quy trình) - Định luật quán tính (không chứng minh) **5.4** Đường và mặt bậc hai - Đường bậc hai trong mặt phẳng: phương trình tổng quát, phương trình chính tắc (nêu kết quả) - Mặt bậc hai trong không gian: nêu phương trình tổng quát, phương trình chính tắc và tên gọi của các mặt bậc hai (vẽ một số mặt thường gặp) - Nhận dạng đường bậc hai (phương pháp chéo hoá trực giao) Bước 1: rút gọn phần bậc hai (phương pháp chéo hoá trực giao) Bước 2: đổi toạ độ (tịnh tiến) nhận được phương trình chính tắc **Tổng kết**	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1 A2.1

7. QUY ĐỊNH CỦA HỌC PHẦN

(Các quy định của học phần nếu có)

8. NGÀY PHÊ DUYỆT: ...15/7/2020...

Viện Toán ứng dụng và Tin học

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy

==========***==========

BÀI TẬP THAM KHẢO

HỆ ĐÀO TẠO: CHÍNH QUY

HỌC PHẦN: ĐẠI SỐ - MÃ HỌC PHẦN: MI1141

==============================***==============================

1) Kiểm tra giữa kỳ hệ số 0.3: Tự luận, 60 phút.

Nội dung kiểm tra: Chương 1, chương 2.

2) Thi cuối kỳ hệ số 0.7: Tự luận, 90 phút.

==============================***==============================

CHƯƠNG I.

TẬP HỢP – LOGIC – ÁNH XẠ - CẤU TRÚC ĐẠI SỐ - SỐ PHỨC

Bài 1. Lập bảng giá trị chân lý của các biểu thức mệnh đề sau

a) $[A \wedge (B \vee C)] \to C$ b) $[\overline{A} \wedge (B \vee C)] \wedge B$

Bài 2. (CK 20152) Cho p, q là các mệnh đề. Hai mệnh đề $(p \to q) \to q$ và $p \vee q$ có tương đương logic không? Vì sao?

Bài 3. Chứng minh rằng:

a) $A \leftrightarrow B$ và $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$ là tương đương logic.

b) $(A \to B) \to C$ và $A \to (B \to C)$ không tương đương logic.

c) $\overline{A \leftrightarrow B}$ và $\overline{A} \leftrightarrow B$ là tương đương logic.

Bài 4 (GK 20171). Cho các mệnh đề A, B và C thỏa mãn $(A \wedge C) \to (B \wedge C)$ và $(A \vee C) \to (B \vee C)$ là các mệnh đề đúng. Chứng minh rằng $A \to B$ là mệnh đề đúng.

Bài 5. Cho mệnh đề logic "Nếu 2020 là số lẻ thì nó chia hết cho 3". Hỏi mệnh đề là đúng hay sai? Giải thích?

Bài 6. Cho hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số f là đơn ánh có thể được xác định bởi mệnh đề: "Với mọi x_1, x_2 thuộc tập $\mathbb{R}$, nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1 = x_2$". Hãy dùng các kí hiệu để diễn tả mệnh đề trên và mệnh đề phủ định của nó. Từ đó đưa ra cách chứng minh một hàm số không phải là đơn ánh.

Bài 7. Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Kí hiệu các tập hợp sau : $A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$. Biểu diễn tập nghiệm phương trình sau qua hai tập hợp A, B :

a) $f(x).g(x) = 0$ b) $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0$

Bài 8 (GK20141). Cho các tập hợp $A = [3; 6), B = (1; 5), C = [2; 4]$. Xác định tập hợp $(A \cap B) \setminus C$.

Bài 9. Cho A, B, C, D là các tập hợp bất kì, chứng minh:

a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

b) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

c) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$ **(GK20151)**

Bài 10. Cho hai ánh xạ

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$$

a) Ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh. Tìm $g(\mathbb{R})$.

b) Xác định ánh xạ $h = gof$.

Bài 11. Chứng minh các tính chất của ảnh và nghịch ảnh của ánh xạ f: $X \to Y$

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B); A, B \subset X$.

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B); A, B \subset X$. Nêu ví dụ chứng tỏ điều ngược lại không đúng.

c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B); A, B \subset Y$

d) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B); A, B \subset Y$

e) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B); A, B \subset Y$

Bài 12. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 + 4x - 5, \forall x \in \mathbb{R}$, và $A = \{x \in \mathbb{R} | -3 \le x \le 3\}$. Xác định các tập hợp $f(A)$ và $f^{-1}(A)$.

Bài 13 (CK 20161). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, x - y)$ và tập $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 9\}$. Xác định các tập hợp $f(A)$ và $f^{-1}(A)$.

Bài 14 (GK 20171). Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, xác định bởi $f(x; y) = (x^2 - y;\ x + y)$. Ánh xạ f có là đơn ánh, toàn ánh không? Vì sao?

Bài 15. Cho tập $\mathbb{Z}_4 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ được trang bị luật hợp thành như sau:

với $a, b \in \mathbb{Z}_4$ ta có $a * b = (a+b) \bmod 4$.

a) Chứng minh rằng * là một phép toán đóng trên $\mathbb{Z}_4$.

b) Hỏi $(\mathbb{Z}_4, *)$ có phải là một nhóm không?

Bài 16. Cho $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ là tập các ánh xạ từ $\mathbb{R} \setminus \{0;1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ xác định như sau:

$$f_1(x) = x; f_2(x) = \frac{1}{1-x}; f_3(x) = 1 - \frac{1}{x}; f_4(x) = \frac{1}{x}; f_5(x) = 1 - x; f_6(x) = \frac{x}{x-1}.$$

a) Tính $f_1 o f_2$

b) Lập bảng để biểu diễn giá trị $f_i o f_j$ với mọi $i, j = \overline{1..6}$.

c) Chứng minh G cùng với phép toán là phép tích ánh xạ lập thành một nhóm không Abel.

Bài 17. Nêu rõ các tập sau với các phép toán cộng và nhân thông thường có lập thành một vành, trường không?

a) Tập các số nguyên lẻ.

b) Tập các số nguyên chẵn.

c) Tập các số hữu tỉ.

d) $X = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

e) $Y = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

Bài 18. Biểu diễn các số phức sau dưới dạng chính tắc:

a) $(1 + i\sqrt{3})^9$ b) $\dfrac{(1+i)^{21}}{(1-i)^{13}}$ c) $(2 + i\sqrt{12})^5(\sqrt{3} - i)^{11}$.

Bài 19. Tìm các căn bậc 8 của số phức: $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Bài 20. Tìm nghiệm phức của phương trình sau:

a) $z^2 + z + 1 = 0$ b) $z^2 + 2iz - 5 = 0$ c) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$

d) $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$ e) $\overline{z^7} = \dfrac{1024}{z^3}$ f) $z^8(\sqrt{3} + i) = 1 - i$. g) $iz^2 - (1+8i)z + 7 + 17i = 0$ **(GK20171)**

Bài 21. (GK 20141). Cho $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2014}$ là các căn bậc 2014 phân biệt phức của đơn vị **1**. Tính $A = \sum_{i=1}^{2014} \epsilon_i^2$.

Bài 22. Cho phương trình $\dfrac{(x+1)^9 - 1}{x} = 0$.

a) Tìm các nghiệm của phương trình trên.

b) Tính môđun của các nghiệm.

c) Tính tích của các nghiệm từ đó tính $\prod_{k=1}^{8} \sin\frac{k\pi}{9}$.

Bài 23 (CK 20161). Cho ánh xạ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=iz^2+(4-i)z-9i$ với i là đơn vị ảo. Xác định $f^{-1}(\{7\})$

Bài 24 (GK 20171). Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + ai = 0$, với a là một số thực và i là đơn vị ảo. Tìm a biết $|z_1^2 - z_2^2| = 1$.

===========***===========

CHƯƠNG II.

MA TRẬN – ĐỊNH THỨC – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1. Cho các ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$.

Trong các phép toán sau: $BC^T, A+BC, A^TB-C, A(BC), (A+3B).C^T$,phép toán nào thực hiện được. Nếu thực hiện được cho biết kết quả.

Bài 2 (CK 20152). Cho $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ và E là ma trận đơn vị cấp 2

a) Tính $F=A^2-3A$

b) Tìm ma trận X thỏa mãn $(A^2+5E)X=B^T(3A-A^2)$

Bài 3. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 3\end{bmatrix}$ và đa thức $f(x)=3x^2-2x+5$. Tính f(A).

Bài 4. Tính A^n với a) $A=\begin{bmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{bmatrix}$.. b) $A=\begin{bmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}$.

Bài 5. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 thoả mãn: a) $X^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ b) $X^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Bài 6. a) Chứng minh rằng ma trận $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ thoả mãn phương trình sau: $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$.

b) Chứng minh với A là ma trận vuông cấp 2 thì $A^k=0,(k>2) \Leftrightarrow A^2=0$.

Bài 7. Không khai triển định thức mà dùng các tính chất của định thức để chứng minh:

a) $\begin{vmatrix}a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1\\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2\\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3\end{vmatrix}=-2x\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1 & a & bc\\ 1 & b & ac\\ 1 & c & ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$.

Bài 8. Tính các định thức sau:

a) $A=\begin{vmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -1 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{vmatrix}$ b) $B=\begin{vmatrix}a+b & ab & a^2+b^2\\ b+c & bc & b^2+c^2\\ c+a & ca & a^2+c^2\end{vmatrix}$ c) $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2\end{vmatrix}$

=========***==========

Bài 9. a) Chứng minh nếu A là ma trận phản xứng cấp n lẻ thì det(A)=0.

b) Cho A là ma trận vuông cấp 2019. Chứng minh $\det(A-A^T)=0$.

Bài 10. Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-1&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}4&3&-5&2&3\\8&6&-7&4&2\\4&3&-8&2&7\\4&3&1&2&-5\\8&6&-1&4&-6\end{bmatrix}$

Bài 11 (GK20141). Tìm m để hạng của ma trận $A=\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\-1&2&2&1\\1&0&4&m\end{bmatrix}$ bằng 2.

Bài 12. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix}3&4\\5&7\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&1\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}1&-a&0&0\\0&1&-a&0\\0&0&1&-a\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

Bài 13(GK 20151). Tìm a để ma trận $A=\begin{bmatrix}a+1&-1&a\\3&a+1&3\\a-1&0&a-1\end{bmatrix}$ khả nghịch.

Bài 14. Chứng minh rằng ma trận A vuông cấp n thoả mãn $a_kA^k+a_{k-1}A^{k-1}+\dots+a_1A+a_0E=0, (a_0\neq 0)$ thì A là ma trận khả nghịch.

Bài 15. Cho $A=\begin{bmatrix}-1&2&1\\2&3&4\\3&1&-1\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}-1&2\\3&4\\0&3\end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix}2&12&10\\6&16&7\end{bmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa mãn $AX+B=C^T$.

Bài 16. Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2\\7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5\\5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3\end{cases}$. b) $\begin{cases}3x_1-x_2+3x_3=1\\-4x_1+2x_2+x_3=3\\-2x_1+x_2+4x_3=4\\10x_1-5x_2-6x_3=-10\end{cases}$. c) $\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=1\\3x_1-x_2+x_3=2\\5x_1+2x_2+5x_3=3\\x_1-4x_2-3x_3=1\end{cases}$.

Bài 17. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

a) $\begin{cases}x+2y-z+3t=12\\2x+5y-z+11t=49\\3x+6y-4z+13t=49\\x+2y-2z+9t=33\end{cases}$ **(GK 20171)** b) $\begin{cases}x+2y+3z+4t=-4\\3x+7y+10z+11t=-11\\x+2y+4z+2t=-3\\x+2y+2z+7t=-6\end{cases}$ **(GK20151)**

==========***==========

Bài 18(GK 20171). Tìm a để hệ $\begin{cases}(a+5)x+3y+(2a+1)z=0\\ ax+(a-1)y+4z=0\\ (a+5)x+(a+2)y+5z=0\end{cases}$ có nghiệm không tầm thường.

Bài 19(CK 20172). Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases}mx_1+2x_2-x_3=3\\ x_1+mx_2+2x_3=4\\ 2x_1+3x_2+x_3=-m\end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Bài 20. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+mx_4=4\\ -x_1-x_2+3x_3+2x_4=k\\ 2x_1-x_2-3x_3+(m-1)x_4=3\\ x_1+x_2+x_3+2mx_4=5\end{cases}$.

a) Giải hệ phương trình khi m = 2, k = 5.

b) Tìm điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất.

c) Tìm điều kiện để hệ phương trình có vô số nghiệm.

=========***=========

CHƯƠNG III.
KHÔNG GIAN VÉC TƠ

Một vài ký hiệu sử dụng trong Chương III:

Không gian $\mathbb{R}^n = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1,n}\right\}$

Không gian đa thức có bậc không vượt quá n ***:*** $P_n[x] = \left\{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{0,n}\right\}$

$M_{m\times n}$ ***là tập các ma trận kích thước*** $m \times n$***. Đặc biệt*** M_n ***là tập các ma trận vuông cấp*** n***.***

Cơ sở chính tắc của không gian $\mathbb{R}^n$ ***là:*** $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ***, ở đó***

$e_1=(1;0;\ldots;0), e_2=(0;1;0;\ldots;0), \ldots, e_i=(0;\ldots;1;\ldots;0), e_n=(0;\ldots;0;1),\ \forall i=\overline{1,n}$

Cơ sở chính tắc của không gian $P_n[x]$ ***là:*** $E = \{e_1; e_2; \ldots; e_{n+1}\}$ ***với*** $e_1=1; e_2=x; \ldots; e_{n+1}=x^n$

Bài 1. Tập V với các phép toán có phải là không gian véc tơ không?

a) $V=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$ với các phép toán xác định như sau:

$$(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$$
$$k(x,y,z)=(|k|x,|k|y,|k|z)$$

b) $V=\{x=(x_1,x_2) \mid x_1>0, x_2>0\}\subset\mathbb{R}^2$ với các phép toán xác định như sau:

$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_2)$ và $k(x_1,x_2)=(x_1^k,x_2^k)$ trong đó k là số thực bất kỳ

Bài 2. Chứng minh các tập hợp con của các không gian véc tơ quen thuộc sau là các không gian véc tơ con của chúng:

a) Tập $E=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x_1-5x_2+3x_3=0\}$.

b) Tập các đa thức có hệ số bậc nhất bằng 0 (hệ số của x) của KGVT $P_n[x]$.

c) Tập các ma trận tam giác trên của tập các ma trận vuông cấp n.

d) Tập các ma trận đối xứng của tập các ma trận vuông cấp n.

e) Tập các ma trận phản xứng của tập các ma trận vuông cấp n ($a_{ij}=-a_{ji}$).

Bài 3. Cho V_1, V_2 là hai không gian véc tơ con của KGVT V. Chứng minh:

a) $V_1 \cap V_2$ là KGVT con của V.

b) $V_1 + V_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$ là KGVT con của V.

Bài 4. Cho V_1, V_2 là hai không gian véc tơ con của KGVT V. Ta nói V_1, V_2 là bù nhau nếu $V_1 + V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$. Chứng minh rằng V_1, V_2 bù nhau khi và chỉ khi mọi véc tơ u của V có biểu diễn duy nhất dưới dạng $u = u_1 + u_2, (u_1 \in V_1, u_2 \in V_2)$.

Bài 5. Trong KGVT V, cho hệ véctơ $\{u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}\}$ là phụ thuộc tuyến tính và $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính. Chứng minh u_{n+1} là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1, u_2, \cdots, u_n$.

Bài 6. Cho $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ là hệ sinh của W_1, $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của W_2 với W_1, W_2 và là các không gian con của V. Chứng minh $\{v_1, \cdots, v_m, u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của $W_1 + W_2$.

Bài 7. Trong $\mathbb{R}^3$ xét xem các hệ véc tơ sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

a) $v_1 = (4;-2;6), v_2 = (-6;3;-9)$.

b) $v_1 = (2;3;-1), v_2 = (3;-1;5), v_3 = (-1;3;-4)$.

c) $v_1 = (1;2;3), v_2 = (3;6;7), v_3 = (-3;1;3), v_4 = (0;4;2)$.

Bài 8. Trong không gian $P_2[x]$, xét xem hệ véc tơ $B = \{u_1 = 1 + 2x, u_2 = 3x - x^2, u_3 = 2 - x + x^2\}$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

Bài 9. Trong $\mathbb{R}^3$, chứng minh $v_1 = (1;1;1), v_2 = (1;1;2), v_3 = (1;2;3)$ lập thành một cơ sở. Xác định ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở trên và tìm toạ độ của $x = (6;9;14)$ đối với cơ sở trên theo hai cách trực tiếp và dùng công thức đổi tọa độ.

Bài 10. Trong các trường hợp sau, chứng minh $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và tìm $[v]_B$ biết rằng:

a) $v_1 = (2;1;1), v_2 = (6;2;0), v_3 = (7;0;7), v = (15;3;1)$.

b) $v_1 = (0;1;1), v_2 = (2;3;0), v_3 = (1;0;1), v = (2;3;0)$.

Bài 11. Trong $P_3[x]$ cho các véc tơ $v_1 = 1, v_2 = 1 + x, v_3 = x + x^2, v_4 = x^2 + x^3$.

a) Chứng minh $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ là một cơ sở của $P_3[x]$.

b) Tìm toạ độ của véc tơ $v = 2 + 3x - x^2 + 2x^3$ đối với cơ sở trên.

c) Tìm toạ độ của véc tơ $v = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ đối với cơ sở trên.

Bài 12(CK 20151). Trong $\mathbb{R}^4$, cho các véc tơ sau:

$u_1 = (1; 3; -2; 1), u_2 = (-2; 3; 1; 1), u_3 = (2; 1; 0; 1), u = (1; -1; -3; m)$.

Tìm m để $u \in Span\{u_1, u_2, u_3\}$.

Bài 13. Cho KGVT $P_3[x]$ và hệ véc tơ sau:

$v_1 = 1 + x^2 + x^3$, $v_2 = x - x^2 + 2x^3$, $v_3 = 2 + x + 3x^3$, $v_4 = -1 + x - x^2 + 2x^3$.

a) Tìm hạng của hệ véc tơ.

b) Tìm một cơ sở của không gian $span\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Bài 14. Tìm cơ sở và số chiều của không gian con sinh bởi hệ véc tơ sau:

a) $v_1 = (2;1;3;4), v_2 = (1;2;0;1), v_3 = (-1;1;-3;0)$ trong $\mathbb{R}^4$.

b) $v_1 = (2;0;1;3;-1), v_2 = (1;1;0;-1;1), v_3 = (0;-2;1;5;-3), v_4 = (1;-3;2;9;-5)$ trong $\mathbb{R}^5$.

Bài 15. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các véc tơ : $u_1 = (1;0;1;0), u_2 = (0;1;-1;1), u_3 = (1;1;1;2), u_4 = (0;0;1;1)$. Đặt $V_1 = \text{span}\{u_1, u_2\}, V_2 = \text{span}\{u_3, u_4\}$. Tìm cơ sở và số chiều của các KGVT $V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$.

Bài 16 (CK 20151). Cho không gian $P_{2015}[x]$- các đa thức bậc không quá 2015 và tập $W_1 = \{p \in P_{2015}[x] | p(-x) = p(x), \forall x \in R\}$. Chứng minh rằng W_1 là không gian con của $P_{2015}[x]$. Chỉ ra số chiều và một cơ sở của W_1 (không cần chứng minh).

Bài 17. Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất sau:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

Bài 18. Cho U,V là các không gian con hữu hạn chiều của không gian véc tơ W..

Chứng minh $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$

==========***==========

CHƯƠNG IV.

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài 1. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức $f(x_1,x_2,x_3)=(3x_1+x_2-x_3,2x_1+x_3)$.

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc.

c) Tìm một cơ sở của kerf.

Bài 2. Cho ánh xạ $f:P_2[x]\to P_4[x]$ xác định như sau: $f(p)=p+x^2p, \forall p\in P_2[x]$

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc $E_1=\{1,x,x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ của $P_4[x]$.

c) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở $E_1'=\{1+x,2x,1+x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ của $P_4[x]$.

Bài 3 (CK 20151). Cho ánh xạ tuyến tính $f:P_2[x]\to P_2[x]$ thỏa mãn:

$f(1-x^2)=-3+3x-6x^2, f(3x+2x^2)=17+x+16x^2,\ f(2+6x+3x^2)=32+7x+25x^2.$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$. Tính $f(1+x^2)$.

b) Xác định m để véc tơ $v=1+x+mx^2$ thuộc Imf.

Bài 4. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-x_3,x_1-x_2+x_3,-x_1+x_2+x_3)$. Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B=\{v_1=(1;0;0),v_2=(1;1;0),v_3=(1;1;1)\}$.

Bài 5 (CK 20151). Cho ánh xạ tuyến tính $f:P_2[x]\to P_2[x]$ thỏa mãn:

$f(1-x^2)=-3+3x-6x^2, f(3x+2x^2)=17+x+16x^2,\ f(2+6x+3x^2)=32+7x+25x^2.$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$. Tính $f(1+x^2)$.

b) Xác định m để véc tơ $v=1+x+mx^2$ thuộc Imf.

Bài 6. Cho $A=\begin{bmatrix}1&3&-1\\2&0&5\\6&-2&4\end{bmatrix}$ là ma trận của axtt $f:P_2[x]\to P_2[x]$ đối với cơ sở $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ trong đó: $v_1=3x+3x^2, v_2=-1+3x+2x^2, v_3=3+7x+2x^2$.

a) Tìm $f(v_1),f(v_2),f(v_3)$. b) Tìm $f(1+x^2)$.

Bài 7. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 6 & 2 & 1\\ -3 & 0 & 7 & 1\end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ đối với cặp cơ sở

$B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ của $\mathbb{R}^4$ và $B'=\{u_1,u_2,u_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ trong đó:

$v_1=(0;1;1;1), v_2=(2;1;-1;-1), v_3=(1;4;-1;2), v_4=(6;9;4;2)$ và $u_1=(0;8;8), u_2=(-7;8;1), u_3=(-6;9;1)$.

a) Tìm $[f(v_1)]_{B'},[f(v_2)]_{B'},[f(v_3)]_{B'},[f(v_4)]_{B'}$.

b) Tìm $f(v_1),f(v_2),f(v_3),f(v_4)$.

c) Tìm $f(2;2;0;0)$.

Bài 8. Cho toán tử tuyến tính trên $P_2[x]$ xác định bởi:

$$f(1+2x)=-19+12x+2x^2; f(2+x)=-14+9x+x^2; f(x^2)=4-2x-2x^2$$

Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$ và tìm $rank(f)$.

Bài 9. Cho V,V' là 2 KGVT n chiều và $f:V\to V'$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh các khẳng định sau tương đương:

a) f là đơn ánh. b) f là toàn ánh. c) f là song ánh.

Bài 10 (CK 20141). Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$f(x_1;x_2;x_3)=(x_1-2x_2+x_3; x_1+x_2-x_3; mx_1-x_2+x_3)$, với m là tham số. Xác định ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và tìm m để f là một toàn ánh.

Bài 11. Tìm các giá trị riêng và cơ sở không gian riêng của các ma trận:

a) $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}10 & -9\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$

d) $D=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ e) $E=\begin{bmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{bmatrix}$

Bài 12. Cho biến đổi tuyến tính $f:P_2[x]\to P_2[x]$ xác định như sau:

$f(a_0+a_1x+a_2x^2)=(5a_0+6a_1+2a_2)-(a_1+8a_2)x+(a_0-2a_2)x^2$.

a) Tìm các trị riêng của f.

b) Tìm các véc tơ riêng ứng với các trị riêng tìm được.

Bài 13. Tìm ma trận P làm chéo hóa A và xác định $P^{-1}AP$ khi đó với:

a) $A=\begin{bmatrix}-14 & 12\\ -20 & 17\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & -1\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ d) $D=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

Vận dụng tính A^n

Bài 14. Ma trận A có đồng dạng với ma trận chéo không? Nếu có, tìm ma trận chéo đó:

a) $A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 5\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Bài 15. Tìm cở sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có dạng chéo trong đó

a) $f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2+x_3, x_1+2x_2+x_3, x_1+x_2+2x_3)$.

b) $f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2-x_3, x_1-x_2, -x_1+x_2+2x_3)$

Bài 16 (CK 20172). Cho toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi :

$f(1;2;-1)=(4;-2;-6), f(1;1;2)=(5;5;0), f(1;0;0)=(1;2;1)$

a) Tìm m để $u=(6;-3;m)\in \mathrm{Im}(f)$.

b) Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của f.

Bài 17. Cho $f:V\to V$ là toán tử tuyến tính. Giả sử $f^2=f\circ f:V\to V$ có giá trị riêng λ^2.

Chứng minh rằng một trong 2 giá trị λ hoặc $-\lambda$ là giá trị riêng của f.

Bài 18 (CK 20161). Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x]\to P_2[x]$ có ma trận $A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\ 6 & 0 & -3\\ -10 & 2 & 6\end{bmatrix}$ đối với cơ sở chính tắc $\{1,x,x^2\}$ của $P_2[x]$.

a) Tính $f(1+x+x^2)$. Tìm m để $v=1-x+mx^2$ thuộc Ker$f$.

b) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở đó có dạng chéo.

Bài 19. Cho A là ma trận kích thước $m\times n$, B là ma trận kích thước $n\times p$. Chứng minh rằng $\mathrm{rank}(AB)\le \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$, với rank(A) = hạng của ma trận A.

==========***==========

CHƯƠNG V.

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH, DẠNG TOÀN PHƯƠNG, KHÔNG GIAN EUCLIDE, ĐƯỜNG MẶT BẬC HAI

Bài 1. Cho f là dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ 3 chiều V có ma trận đối với cơ sở $\boldsymbol{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Cho $h: V \to V$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận đối với cơ sở $\boldsymbol{B}$ là $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

a) Xác định $f(u_1; u_3); f(u_1 - u_2 + u_3, 2u_1 + 3u_2 - u_3)$

b) Chứng minh ánh xạ $g(u,v) = f\left(u, h(v)\right)$ là dạng song tuyến tính trên V. Tìm ma trận của nó đối với cơ sở $\boldsymbol{B}$.

Bài 2. Cho dạng song tuyến tính trên $P_2[x]$ xác định bởi $f\big(p(x), q(x)\big) = p(1)q(2)$. Tìm ma trận và biểu thức của f đối với cơ sở chính tắc.

Bài 3. Trên $\mathbb{R}^3$ cho các dạng toàn phương ω có biểu thức tọa độ:

$\omega_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$. $\omega_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3$.

a) Bằng phương pháp Lagrange, đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

b) Xét xem các dạng toàn phương xác định dương, xác định âm không?

Bài 4. Xác định a để các dạng toàn phương xác định dương:

a) $5x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$.

c) c) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Bài 5. Cho dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) > \; = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + ax_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 3x_3y_3$$

(a là tham số). Tìm ma trận của dạng song tuyến tính trên đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và tìm điều kiện của a để dạng song tuyến tính là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$.

Bài 6. Trong $\mathbb{R}^3$ trang bị một dạng song tuyến tính như sau:

$f(x,y) = (x_1, x_2, x_3)A(y_1, y_2, y_3)^t$ với: $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & a^2 & 2a \end{bmatrix}$ và $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$. Xác định a để f(x,y) là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$.

Bài 7. Giả sử V là KGVT n chiều với cơ sở $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$. Với u, v là các véc tơ của V ta có

$u=a_1e_1+a_2e_2+\dots+a_ne_n; v=b_1e_1+b_2e_2+\dots+b_ne_n$. Đặt $<u,v>=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$

a) Chứng minh $<u,v>$ là một tích vô hướng trên V.

b) Áp dụng cho trường hợp $V=\mathbb{R}^3$, với $e_1=(1;0;1), e_2=(1;1;-1), e_3=(0;1;1), u=(2;-1;-2), v=(2;0;5)$.

Tính $<u,v>$.

c) Áp dụng cho trường hợp $V=P_2[x]$, với $B=\{1;x;x^2\}, u=2+3x^2, v=6-3x-3x^2$.

Tính $<u,v>$.

d) Áp dụng cho trường hợp $V=P_2[x]$, với $B=\{1+x;2x;x-x^2\}, u=2+3x^2, v=6-3x-3x^2$. Tính

$<u,v>$.

Bài 8. Xét không gian $P_3[x]$. Kiểm tra các dạng $<p,q>$ sau có phải là tích vô hướng hay không?

a) $<p,q>=p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(2)q(2)$

b) $<p,q>=p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(2)q(2)+p(3)q(3)$

c) $<p,q>=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)dx$

Trong trường hợp là tích vô hướng tính $<p,q>$ với $p=2-3x+5x^2-x^3.q=4+x-3x^2+2x^3$

Bài 9. Cho V là không gían Euclide. Chứng minh:

a) $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$.

b) $u\perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2, \forall u,v\in V$.

Bài 10. Cho cơ sở $B=\{(1;1;-2),(2;0;1),(1;2;3)\}$ trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc. Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt cơ sở B để thu được cơ sở trực chuẩn B' và tìm tọa độ của véc tơ $u=(5;8;6)$ đối với cơ sở B'.

Bài 11. Cho $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc. Cho $u_1=(6;3;-3;6), u_2=(5;1;-3;1)$. Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian sinh bởi $\{u_1,u_2\}$.

Bài 12. Trong $P_2[x]$ định nghĩa tích vô hướng $<p,q>=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)dx$ với $p,q\in P_2[x]$.

a) Trực chuẩn hoá Gram – Schmidt cơ sở $B=\{1;x;x^2\}$ để nhận được cơ sở trực chuẩn A.

b) Tìm $[r]_A$ biết $r=2-3x+3x^2$

Bài 13. Tìm hình chiếu trực giao của véc tơ u lên không gian sinh bởi véc tơ v:

a) $u=(1;3;-2;4), v=(2;-2;4;5)$

b) $u=(4;1;2;3;-3), v=(-1;-2;5;1;4)$

Bài 14. Cho không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc và các véc tơ $u=(3;-2;1), v_1=(2;2;1), v_2=(2;5;4)$. Đặt $W=span\{v_1,v_2\}$. Xác định hình chiếu trực giao của véc tơ u lên không gian W.

Bài 15 (CK20161). Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho các véc tơ $u=(1;2;-1)$, $v=(3;6;3)$ và đặt $H=\{w\in\mathbb{R}^3 | w\perp u\}$

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian H.

b) Tìm hình chiếu trực giao của v lên không gian H

Bài 16. Trong $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc cho các véc tơ

$v_1=(1;1;0;0;0), v_2=(0;1;-1;2;1), v_3=(2;3;-1;2;1)$. Gọi $V=\{x\in\mathbb{R}^5 | x\perp v_i, i=1;2;3\}$

a) Chứng minh V là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^5$.

b) Tìm dimV.

Bài 17. Cho V là không gian Euclide n chiều, V_1 là không gian con m chiều của V. Gọi $V_2=\{x\in V | x\perp v, \quad \forall v\in V_1\}$.

a) Chứng minh V_2 là không gian véc tơ con của V.

b) Chứng minh V_1 và V_2 bù nhau.

c) Tìm $\dim V_2$.

Bài 18. Chéo hoá trực giao các ma trận sau

a) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}-7&24\\24&7\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ d) $D=\begin{bmatrix}7&-2&0\\-2&6&2\\0&2&5\end{bmatrix}$

Bài 19. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao

a) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$

b) $7x_1^2+6x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3$

Bài 20. Nhận dạng đường cong phẳng sau:

a) $2x^2-4xy-y^2+8=0$. b) $x^2+2xy+y^2+8x+y=0$. c) $11x^2+24xy+4y^2-15=0$.

d) $2x^2+4xy+5y^2=24$.

==========***==========

Bài 21. Nhận dạng các mặt bậc 2 sau:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 4$.

b) $5x^2 + y^2 + z^2 - 6xy + 2xz - 2xy = 1$.

c) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = 16$.

Bài 22. Cho $Q(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$. Tìm

$\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=16}{\text{Max}} Q(x_1, x_2, x_3)$, $\underset{x_1^2+x_2^2+x_3^2=16}{\text{Min}} Q(x_1, x_2, x_3)$. Với giá trị nào thì $Q(x_1, x_2, x_3)$ đạt max, min.

Bài 23. Cho A, B là các ma trận vuông đối xứng cấp n có tất cả các giá trị riêng đều dương. Chứng minh A+B cũng có tất cả các giá trị riêng đều dương.

==**HẾT**==

Viện Toán ứng dụng và Tin học

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy