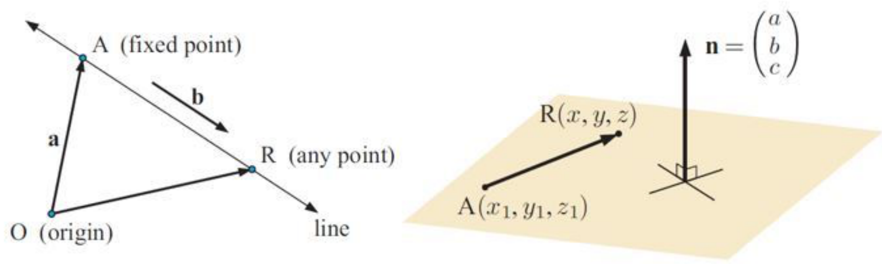


【IB】直线与平面的向量表示

双木止月Tong
上海大学 运筹学与控制论硕士

在初中我们就学过很多种直线的表示

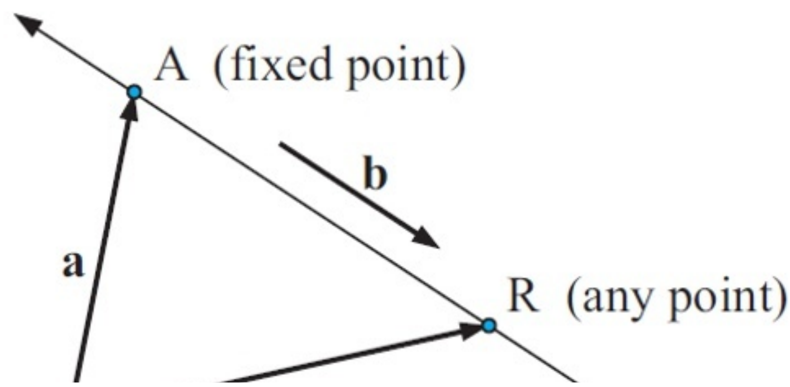
> 一般式： $Ax+By+C=0$ ， 其中 A,B 不能同时为零；
> 斜截式： $y=kx+b$,其中 k 是斜率(slope)，表示直线与x轴正方向夹角的正切值， b 是纵截距(y-intercept,**截距可以是负值**)，表示直线与y轴的交点的纵坐标；
> 点斜率： $y-y_1=k(x-x_1)$,其中 (x_1,y_1) 表示直线上一点， k 表示直线斜率；
> 截距式： $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,其中 a,b 分别表示直线与x轴和y轴的截距，也就是与x轴交点的横坐标和与y轴交点的纵坐标；
> 两点式： $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ ， 其中 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 表示直线上两点坐标；

上述这些，我们学的都是在二维平面中的直线表示，如果到三维空间中直线该如何表示呢？那么进一步一个平面又该如何表示呢？

那么本文就来介绍一下直线与平面的向量表示。

一、直线的向量表示

已知直线上点 A 和直线的的方向向量 $\vec{b}$,根据向量的加法运算就可以把直线上任意一点 R 都可以表示出来。



因为 $\vec{OR}=\vec{OA}+\vec{AR}$ ， $\vec{AR}=\lambda\vec{b}$ ，

所以， $\vec{OR}=\vec{OA}+\lambda\vec{b}$ 。

这可以理解为**直线上任意一点都可以由直线上一已知点按照方向向量平移得到**。根据上述原理我们可以到直线在二维、三维情况下的向量表示。

（1）二维直线向量表示

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

其中 $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ 是直线上点坐标， $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ 是方向向量， λ 是参数。

根据上述式子很容易得到直线的参数方程：

$$\begin{cases}x=x_0+\lambda b_1\\y=y_0+\lambda b_2\end{cases},$$

也把 λ 消去得到直线的笛卡尔坐标形式：

$$\frac{x-x_0}{b_1}\quad b_2$$

（2）三维直线向量表示

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

其中 $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ 是直线上一点， $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ 是方向向量。

同理可以到直线的参数方程：

$$x=x_0+\lambda b_1$$
$$y=y_0+\lambda b_2$$
$$z=z_0+\lambda b_3$$

笛卡尔坐标形式:

$$\frac{x-x_0}{b_1}=\frac{y-y_0}{b_2}=\frac{z-z_0}{b_3}$$

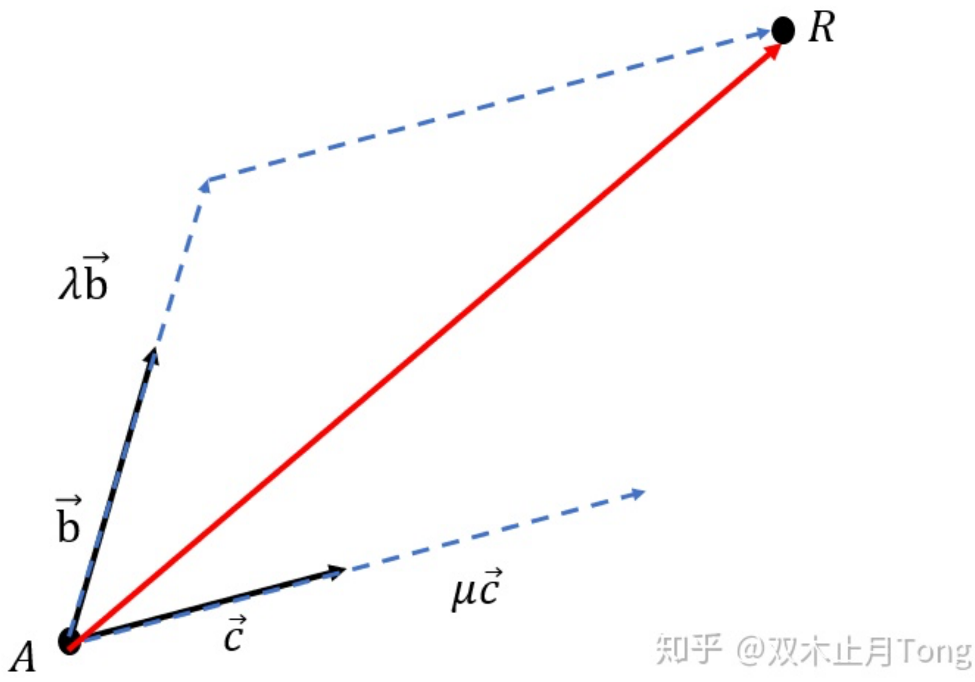
比如给一直线方程 $\frac{x-1}{2}=\frac{3+y}{3}=z$ ，

那么可以知道该直线过 $(1,-3,0)$ ，且方向向量为 $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ 。

二、平面的向量表示

平面的向量表示有两种不同的方法:一种是利用向量的合成，一种是利用法向量。

（1）**向量的合成**



如果已知平面内一点 $\mathrm{A}\left(a_1,a_2,a_3\right)$ 和两个不平行的向量 $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ 和 $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ ，那么平面内任意一点 R 都存在常数 λ,μ 使得下式成立:

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$ ，

又因为 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$ ，

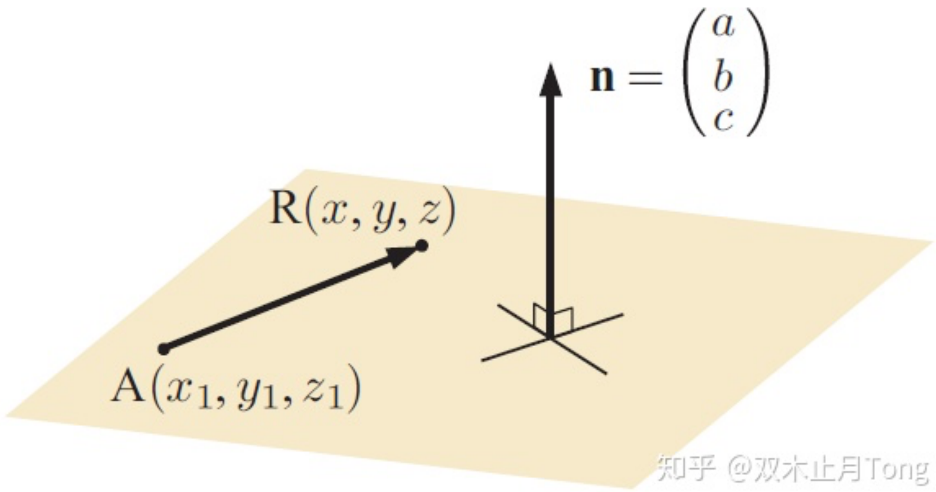
所以， $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$,即:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

我们二维的平面直角坐标系也可以看成是两个相互垂直的基向量加减运算得到：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

（2）**法向量**



把与平面中任意向量都相互垂直的向量称为法向量。如果已知平面上一点 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$ 和平面的法向量 $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ，那么点 A 和平面内任意一点 $R(x, y, z)$ 所构成的向量 $\overrightarrow{AR}$ 与法向量垂直可得：

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AR}} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} = 0$$

所以， $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ ，

得到平面的一般方程：

$ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1$ 。

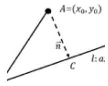
因此，型如 $Ax + By + Cz = D$ 的都是平面方程，且 $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ 是该平面的法向量。

比如给一平面方程 $2x + 4y + z = 1$ ，那么该平面的法向量为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ；那么如果平面方程为 $3x + 5y = 1$ 其法向量为多少呢？

其法向量为 $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

至此，直线和平面的向量表示都已经介绍完毕，在此基础上向量还有两个重要的应用：距离与夹角。距离主要是点到直线距离以及点到面的距离，可以参阅下文：

【“数”你好看】点到直线与面的距离公式



夹角主要是直线与直线的夹角、直线与平面的夹角以及平面与平面的夹角，俗称线线角、线面角以及面面角。这些主要都应用了向量的点乘

【“数”你好看】向量点乘(Scalar product)

$||\vec{b}|cos\theta = x_1$

具体这一部分内容我们接下去再分享吧。

欢迎交流讨论，希望大家点赞支持~

想了解更多关于国际数学课程可参阅下文：

【国际数学课程】目录

国际数学课程

编辑于 2021-12-14 13:24

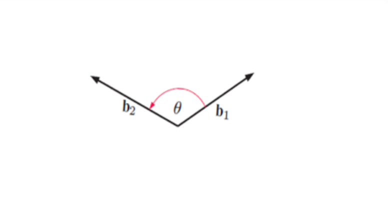
直线 平面 向量

文章被以下专栏收录

国际理科
传播数学知识，接轨国际教育。

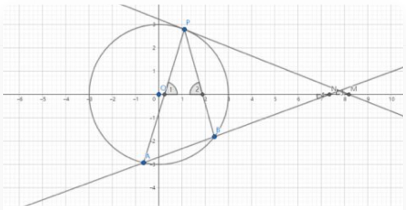
国际数学课程
不限于IB、AP、Alevel等数学课程分享与讨论

推荐阅读



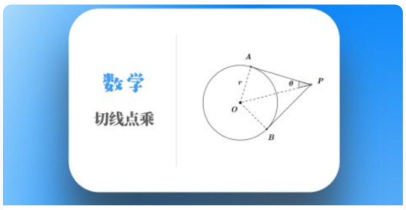
【IB】线线角、线面角、面面角

双木止月T... 发表于国际理科



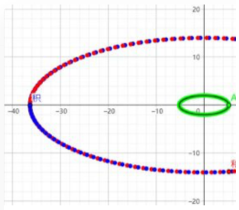
【解析几何】圆锥曲线中倾斜角互补的有关斜率问题

择梦舟



【解析几何】圆的切线点乘最值问题

Alston



潜藏的椭圆：斜率定值时直线所过定

零典韦达定... 发表于

10 条评论　　　　切换为时间排序

写下你的评论...

alec1st　　2021-12-14

"因此，型如Ax+By+Cz=D的都是直线方程",这里应该是“都是平面方程”吧。是不是笔误了

1

双木止月Tong (作者) 回复 alec1st　　2021-12-14

谢谢，已经改正

1

Li627　　2020-03-30

感谢, 倒数几行2x+4y+z=1, 对应法向量应该是[2, 4, 1] ^T吧, 是不是笔误了

1

双木止月Tong (作者) 回复 Li627　　2020-03-30

感谢，确实打错了

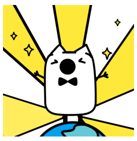
1

知乎用户BjpDPE　　02-19

写的很好，真是帮上大忙了。谢谢!

赞

双木止月Tong (作者) 回复 知乎用户BjpDPE　　02-19



赞

okwh　　2021-06-15

3x+5y=1，其法向量为(3，5，0)，（-3，-5，0）是不是也是？ 怎么才唯一？

赞

双木止月Tong (作者) 回复 okwh　　2021-06-15

法向量不唯一，单位法向量也有两个方向

赞

刘易斯金　　2020-10-01

"直线上任意一点都可以由直线上一已知点按照方向向量平移得到"解释的很好。

赞

双木止月Tong (作者) 回复 刘易斯金　　2020-10-01