CHƯƠNG 2. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1.

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÍ THUYẾT

I. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Vectơ trong không gian

Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là đoạn thẳng mà một trong hai đầu mút của nó đã được chỉ rõ là điểm đầu, còn đầu mút kia là điểm cuối. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ được dùng để chỉ vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B.

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện.

....

....

Luyện tập 1. Cho một hình chóp tứ giác. Hãy chỉ ra tất cả những vectơ có điểm đầu và điểm cuối là hai đỉnh khác nhau của hình chóp.

....

....

2. Độ dài của vectơ. Vectơ cùng phương, cùng hướng. Vectơ bằng nhau

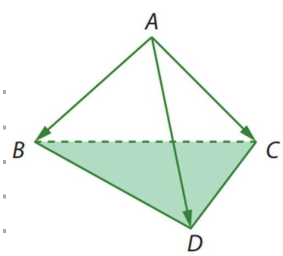
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ gọi là giá của vectơ.
- Hai vectơ có giá song song hoặc trùng nhau gọi là hai vectơ cùng phương.
- Hai vectơ cùng phương thì hoặc cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.
- Hai vectơ đối nhau nếu chúng ngược hướng và cùng độ dài.

Lưu ý.

- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của một vectơ, ta kí hiệu vectơ đó là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$
- Từ một điểm bất kì, luôn dựng được một và chỉ một vectơ bằng vectơ $\vec{a}$ cho trước.
- Với mỗi điểm A, ta quy ước có một vectơ đặc biệt, kí hiệu là $\overrightarrow{AA}$ và gọi là vectơ–không. Ta còn quy ước là $\overrightarrow{AA}$ có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD có độ dài mỗi cạnh bằng 2.

a) Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?
b) Trong các vectơ tìm được ở câu a, những vectơ nào có giá nằm trong mặt phẳng (ACD) ?
c) Trong các vectơ tìm được ở câu a, có cặp vectơ nào bằng nhau không?
d) Tính độ dài của các vectơ tìm được ở câu a.
e) Có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ diện ABCD?



....

....

....

....

....

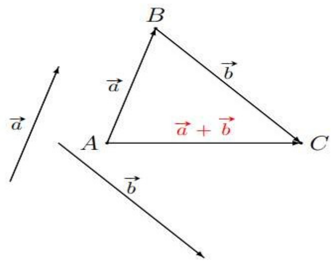
....

II. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ, TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

1. Tổng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$. Vậy $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Phép lấy tổng hai vectơ còn được gọi là phép cộng vectơ.

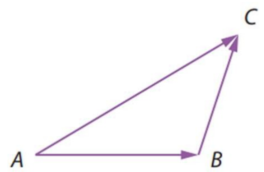


Lưu ý.

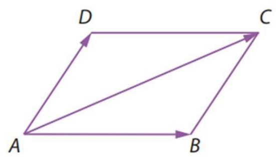
- Các tính chất:

- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.
- Tính chất của vectơ-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

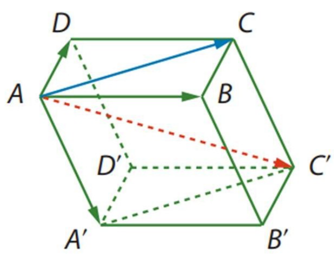
- Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C ta luôn có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



- Quy tắc hình bình hành: Nếu ABCD là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



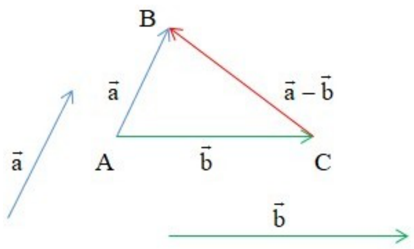
- Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$



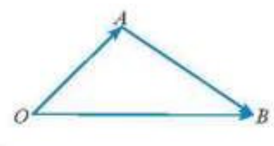
2. Hiệu hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ a và b. Hiệu của vectơ a và vectơ b là tổng vectơ a và vectơ đối của vectơ b, kí hiệu $\vec{a} - b$.

Phép lấy hiệu hai vectơ còn được gọi là phép trừ vectơ.



Lưu ý. Trong không gian, với ba điểm O, A, B tùy ý, ta luôn có: $OB - OA = AB$.



3. Tích của một số với một vectơ

Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vectơ $a \neq 0$ là một vectơ, kí hiệu là ka, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vectơ a nếu $k > 0$; ngược hướng với vectơ a nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |a|$.

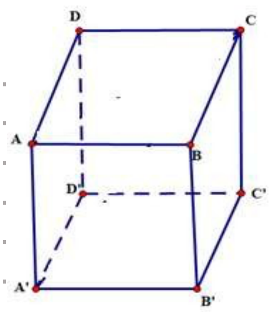
Lưu ý.

- Quy ước $\overrightarrow{ka} = 0$ nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = 0$.
- Nếu $K\vec{A} = \vec{0}$ *thì* $k = 0$ *hoặc* $\vec{a} = \vec{0}$
- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ a và b $(b \neq 0)$ cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a} = K\vec{b}$

Ví dụ 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = 2,\ AD = 3,\ AA' = 4.$. Tính độ dài các vectơ sau:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA}$

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{A'B'}$

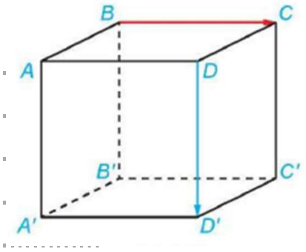


Luyện tập 3.1. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng a.

a) Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'}$.

b) Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{C'D'}$.

c) Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.



Luyện tập 3.2. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}$.

Luyện tập 3.3. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}.$$

Luyện tập 3.4. Cho tứ diện $ABCD$. gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm của tam giác BCD chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

c) Gọi I là trung điểm của MN, chứng minh $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.