微分方程数值解计算实习 Lecture 7

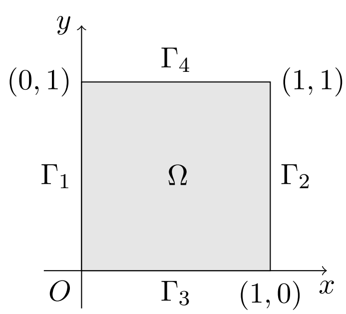
朱荃凡

(吉林大学数学系计算唐班)

2023 年 5 月 3 日

1 问题重述

如图所示, Ω 表示 $[0,1]^2$ 的区域, $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ 是它的四条边:



利用三角剖分线性元元求解区域 Ω 区域上的偏微分问题:

$$\begin{cases} -\Delta u - 2\pi^2 u = -2\pi^2 xy, & \text{in } \Omega, \\ u(x,y) = 0, & \text{in } \Gamma_1, \Gamma_3, \\ \partial_x u(x,y) = y - \pi\sin(\pi y), & \text{in } \Gamma_2, \\ \partial_y u(x,y) = x - \pi\sin(\pi x), & \text{in } \Gamma_4. \end{cases} \tag{1.1}$$

其相应的的真解为

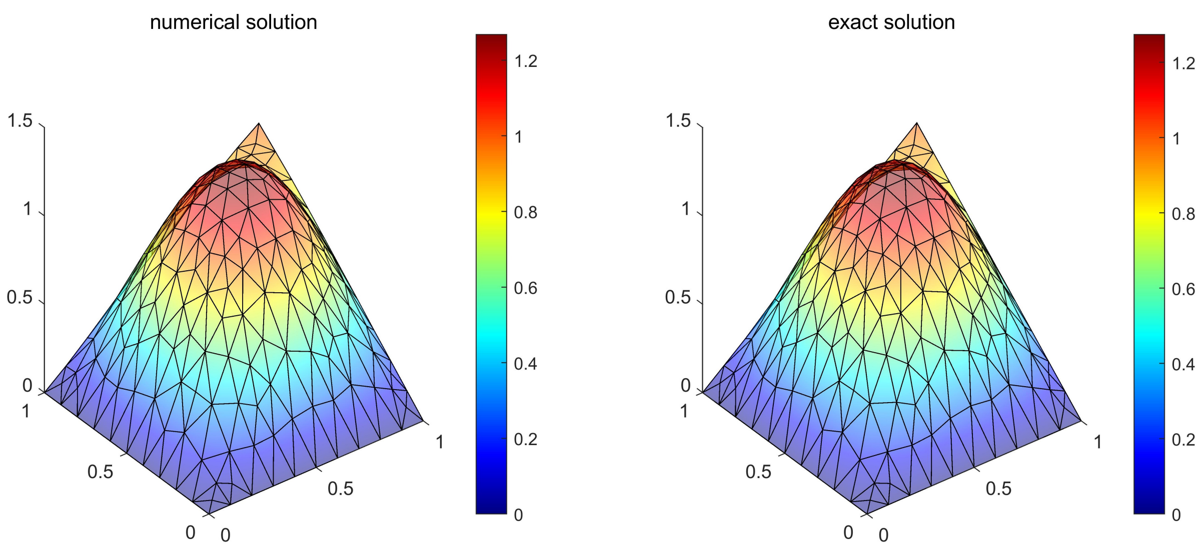
$$u^* = xy + \sin(\pi x)\sin(\pi y). \tag{1.2}$$

2 程序结果

相较于上次 Lagrange 双线元的程序, 这次仅在生成刚度矩阵和右端项上有所区别, 但原理类似, 因此不再赘述.

2.1 数值解图像

这里展示了剖分数 $N = 10$ 时的数值解和真解图像 (画真解图像也是要剖分的).



2.2 误差和收敛阶

取剖分数 $N = 5n(1 \leq n \leq 10)$, 分别计算 L^2 误差和 H^1 误差. 需要注意的是横轴代表的含义是” 自由度”, 可以近似的认为是节点数量. 所以有些图像看起来并不均匀. 很奇怪的一点是这次误差的收敛阶并没有像之前一样渐进收敛到 1 和 2, 而是在上下震荡, 目前不清楚原因.