Lecture 8：二维三角形元空间中的 Lagrange 型元

2023 年 4 月 20 日

1　本次课程内容

- 三角形元空间中的 Lagrange 元
- 三角网格剖分

2　Lagrange 型元

2.1　有限元方法的基本框架：

(1) 把问题转化为变分形式

(2) 选定单元形状，对求解区域作剖分

(3) 构造基函数或单元形状函数，生成有限元空间

(4) 形成有限元方程（Ritz-Galerkin 方程）

(5) 提供有限元方程的有效解法

(6) 收敛性及误差估计

2.2　Step 2: 区域网格剖分

对于曲边区域 G，一般采用三角网近似。不妨设 G 是多边形区域，将 G 分割成有限个三角形之和，使不同三角形重叠的内部，且任一三角形的顶点不属于其他三角形的内部，这样就把 G 分割成三角网格，称为 G 的三角剖分。每个三角形称为**单元**，它的顶点称为 **节点**。属于同一单元的二顶点称为**相邻节点**，有公共边的两个三角形称为 **相邻单元**。

- 物理节点的坐标：$\boldsymbol{p}(i) = [x_i, y_i]^\top$
- 三角形单元节点信息：$\boldsymbol{t}(i) = [i_1, i_2, i_3, k]^\top$，$k$ 代表其所属的区域，i_1, i_2, i_3 逆时针分布
- 边界信息：$\boldsymbol{e}(i) = [i_1, i_2, \cdots, i_7]$

- 三角形单元上的广义坐标：$\boldsymbol{G}(i)$

Remark 2.1. *$\boldsymbol{e}(1,i)$ 和 $\boldsymbol{e}(2,i)$ 并不以逆时针分布。关于由 matlab 生成的三角剖分信息 $[\boldsymbol{p},\boldsymbol{e},\boldsymbol{t}]$，具体可参见 matlab 文档 "pdetriples.pdf"。*

2.3 Step 3: Lagrange 型有限元

由单元刚度矩阵生成系数矩阵的过程中，只需要标准形状上的基函数，其可借由面积坐标 (L_1, L_2, L_3) 表示。

- 面积坐标

$$2S = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}\right), \qquad \begin{cases} x = x_i L_i + x_j L_j + x_k L_k \\ y = y_i L_i + y_j L_j + x_k L_k \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} L_i = \dfrac{1}{2S}\left[(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y\right] \\ L_j = \dfrac{1}{2S}\left[(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y\right] \\ L_k = \dfrac{1}{2S}\left[(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y\right] \end{cases}$$

由连锁规则可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{1}{2S}\left[(y_j - y_k)\dfrac{\partial}{\partial L_i} + (y_k - y_i)\dfrac{\partial}{\partial L_j} + (y_i - y_j)\dfrac{\partial}{\partial L_k}\right] \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{1}{2S}\left[(x_k - x_j)\dfrac{\partial}{\partial L_i} + (x_i - x_k)\dfrac{\partial}{\partial L_j} + (x_j - x_i)\dfrac{\partial}{\partial L_k}\right] \end{cases}$$

- 三角形上的一次 Lagrange 元

$$p(x,y) = L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3$$

其广义坐标的维数和物理网格节点的个数相同。

- 三角形上的二次 Lagrange 元

$$p_2(x,y) = \sum_{i=1}^{3}\left[L_i(2L_i - 1)u_i + 4L_j L_k u_{3+i}\right]$$

其中u 的下脚标 4,5,6 依次是边 23,31,12 的中点，并且 $L_j = L_{i+1}, L_k = L_{i+2}, L_4 = L_1, L_5 = L_2, L_6 = L_3$. 广义坐标包含三角形三个顶点以及三边中点。

2.4 Step 4: 形成线性方程组

2.4.1 Step 4.1:数值积分公式

书 P_{75} 中给出了三角形上的 Gauss 型求积公式

$$\int_{\Delta} f\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx S\sum_i W_i f(L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, L_3^{(i)}) \tag{2.1}$$

具体的 Gauss 求积节点参看P_{76} 表 2.7.1

2.4.2 Step 4.2: 形成单元刚度矩阵

以如下变分问题为例

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \left[p(x,y)uv + q_1(x,y)\partial_x u\partial_x v + q_2(x,y)\partial_y u\partial_y v\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\Omega} f(x,y)v\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

通过 Gauss 型求积公式 (2.1) 数值计算三角单元 Δ_i 上的积分

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta_i} \left[p(x,y)\varphi_i\varphi_j + q_1(x,y)\partial_x\varphi_i\partial_x\varphi_j + q_2(x,y)\partial_y\varphi_i\partial_y\varphi_j\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\approx S\sum_k W_k\Bigg\{p(x^{(k)},y^{(k)})N_i(\boldsymbol{L}^{(k)})N_j(\boldsymbol{L}^{(k)}) \\
&\qquad + \left(\frac{1}{2S}\right)^2 q_1(x^{(k)},y^{(k)})\left[\sum_{m=1}^{3} c_m\frac{\partial N_i}{\partial L_m}(\boldsymbol{L}^{(k)})\right]\left[\sum_{m=1}^{3} c_m\frac{\partial N_j}{\partial L_m}(\boldsymbol{L}^{(k)})\right] \\
&\qquad + \left(\frac{1}{2S}\right)^2 q_2(x^{(k)},y^{(k)})\left[\sum_{m=1}^{3} s_m\frac{\partial N_i}{\partial L_m}(\boldsymbol{L}^{(k)})\right]\left[\sum_{m=1}^{3} s_m\frac{\partial N_j}{\partial L_m}(\boldsymbol{L}^{(k)})\right]\Bigg\}
\end{aligned}$$

其中积分参数 $\left\{W_k, \boldsymbol{L}^{(k)} := \left(L_1^{(k)}, L_2^{(k)}, L_3^{(k)}\right)\right\}$ 可由表 2.7.1 给出。 $\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right)$ 可由如下变换给出

$$\begin{cases} x^{(k)} = x_i L_i^{(k)} + x_j L_j^{(k)} + x_k L_k^{(k)} \\ y^{(k)} = y_i L_i^{(k)} + y_j L_j^{(k)} + x_k L_k^{(k)} \end{cases}$$

参数 c_m, s_m 为

$$\begin{cases} \boldsymbol{c} := [c_1, c_2, c_3] = [y_2 - y_3, y_3 - y_1, y_1 - y_2] \\ \boldsymbol{s} := [s_1, s_2, s_3] = [x_3 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_1] \end{cases}$$

利用数值积分(2.1) 对上式进行计算，所需要的数据仅为

$$\begin{aligned}
&x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ S \\
&p(x^{(k)},y^{(k)}),\ q_1(x^{(k)},y^{(k)}),\ q_2(x^{(k)},y^{(k)}),\ f(x^{(k)},y^{(k)}) \\
&\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{s},\ N_i(\boldsymbol{L}^{(k)}),\ \frac{\partial N_i}{\partial L_m}(\boldsymbol{L}^{(k)})
\end{aligned}$$

2.4.3 Step 4.3: 形成系数矩阵

通过广义坐标 G 将单元刚度矩阵分发到系数矩阵和右端向量的相应位置

2.4.4 Step 4.4: 自然边界条件和本质边界条件的处理

假设所考虑问题满足边界条件

$$\Delta u=0,\qquad \begin{cases} u=0 & \text{on}\,\Gamma_1\cup\Gamma_4 \\ \partial_x u=g_1 & \text{on}\,\Gamma_2 \\ \partial_y u=g_2 & \text{on}\,\Gamma_3 \end{cases}$$

- 自然边界条件的处理：对右端向量更新

  $$-\int_{\Gamma_2} g_1(x,y)v\mathrm{d}s-\int_{\Gamma_3} g_2(x,y)v\mathrm{d}s$$

  通过对边界曲线的参数化

  $$\Gamma(x,y)=\{x_1+t(x_2-x_1),\quad y_1+t(y_2-y_1)\}$$

  转化为 $[0,1]$ 区间进行积分

  $$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_i} f(x,y)\varphi_i(x,y)\mathrm{ds} \\ =&\int_0^1 f(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))\tilde{N}_i(t)\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

  再由边界信息矩阵 $\boldsymbol{e}$ 生成单位边界向量，通过 $\boldsymbol{e}$ 的第 5 个分量确定边界编号。

- 本质边界条件的处理：

  - 对系数矩阵和右端向量本质边界条件对应的相应行赋值为 0，对角线元素赋值为 1
  - 消去相应的行列
  - 对系数矩阵本质边界条件对应的相应位置的$A(i,i)$赋大数值，例如令 $A(i,i)=10^{30}$，数值上可得 $u(i)$ 近似为 0。

2.5 Step 5: 有限元方程的求解

2.6 Step 6: 数值误差计算

数值误差的计算依旧在每个单元上进行，通过仿射变换在单位正方形上进行求解。以 $L^2(\Omega)$ 范数为例

$$\int_\Omega |u_h-u^*|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{\mathrm{i}}\int_{\Delta_{\mathrm{i}}}|\mathrm{u_h(x,y)-u^*(x,y)}|^2\mathrm{dxdy}$$

$$\approx\sum_i\left\{\sum_k SW_k\left[\sum_j u(G(j,i))N_j(\boldsymbol{L}^{(k)})-u^*(x^{(k)},y^{(k)})\right]^2\right\}$$

3 三角网格剖分

方式一：输入 pdetool →进入图形界面 → 画图 → 网格剖分 → 输出网格信息 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{t})$

方式二：编写 Constructive Solid Geometry (CSG)→ 利用 decsg() 生成 decomposed geometry → 利用 initmesh() 和 refinemesh()或者 generateMesh() 生成网格信息 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{t})$

详细信息可以查看 Matlab 辅助文档 "refinemesh.pdf", "initmesh.pdf", "GeometryFromEdge.pdf", "generatemesh.pdf", "descg.pdf", "2DGeometryCreation.pdf"

4 作业及练习（强化题目）

令 $\Omega = [0,1]^2$，对Ω 做三角剖分，并用 Lagrange 一次元求解如下问题

$$\begin{cases} \Delta u + 2\pi^2 u = 2\pi^2 xy & \text{in}\, \Omega \\ u(0,y) = 0, \qquad u(x,0) = 0 \\ \partial_x u(1,y) = y - \pi \sin(\pi y) \\ \partial_y u(x,1) = x - \pi \sin(\pi x) \end{cases}$$

相应的真解为

$$u^* = xy + \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

求数值解的 L^2 和 H^1 误差并画出误差图。

Remark 4.1. 作业截止日期为 *2023-04-26/ 2023-05-03* 日，将程序代码和实验报告压缩为 *.rar* 文件，文件名为"姓名-微分方程数值解计算实习第八周作业*.rar*" 发送到邮箱 *yuanxk@jlu.edu.cn*, 邮件名称为"姓名-微分方程数值解计算实习第八周作业"