微分方程数值解计算实习 Lecture 4

朱荃凡

(吉林大学数学系计算唐班)

2023 年 4 月 2 日

1 问题重述

用二次元在均匀网格下求解边值问题(??)的数值解:

$$
\begin{aligned}
&-y'' + \frac{\pi^2}{4}y = \frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}x,\ 0 < x < 1,\\
&y(0) = 0, \qquad y'(1) = 0.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

要求:

- 画出数值解的图像
- 对 $[0, 1]$ 区间均匀剖分成 $N = 10, 20, 30, \cdots, 200$ 份, 计算数值解和真解

  $$u* = \sin\frac{\pi}{2}x$$

  的 L^2 误差和 H^1 误差, 计算其关于网格长度 $h = 1/N$ 的数值收敛阶.
- 计算系数矩阵的条件数, 并用 loglog() 函数作图表示.

2 算法设计

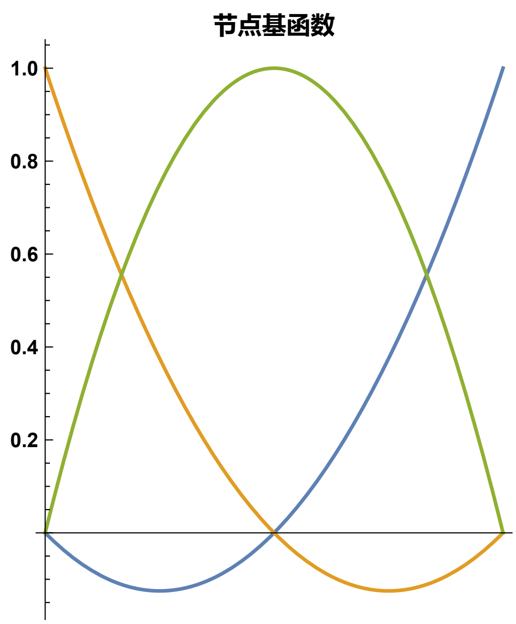
二次有限元和线性有限元除了基函数选区的不同以外, 其余部分基本没有变化. 所以我们主要来看基函数带来的变化.

2.1 生成刚度矩阵 stiffnessMatrix()

因为有限元次数的增加, 刚度矩阵的大小变成了 $2N+1\times 2N+1$, 但是是剖分数仍然是不变的. 我们仍然逐区间的考虑问题, 在区间 $[0,h]$ 上, 基函数可以被表达为

$$\begin{cases} \varphi_r(x) = 2(\frac{x}{h}-\frac{1}{2})(\frac{x}{h}-1), & 0\le x\le h, \\ \varphi_m(x) = 4(\frac{x}{h})(1-\frac{x}{h}), & 0\le x\le h, \\ \varphi_l(x) = 2(\frac{x}{n})(\frac{x}{h}-\frac{1}{2}), & 0\le x\le h. \end{cases} \tag{2.1}$$

想要得到其他区间上的基函数平移即可. 而事实上我们连平移都不需要, 因为我们使用基函数是为了得到高斯积分结点处的函数值. 而基函数在每个小区间上的形状相同, 高斯积分节点也对应相同. 于是我们可以直接保存基函数和其导数在 $[0,h]$ 上高斯积分结点处的函数值, 在使用到的时候调用即可. 不过需要注意, 这种方法仅适用于等距剖分.



有了节点基函数的表达公式, 单元刚度矩阵可以被求解出来. 由于使用了二次元, 单元刚度矩阵的大小是 3×3 的. 这里既可以手动求解, 也可以使用高斯积分公式. 最终就得到了整体的刚度矩阵.

2.2 其余求解部分

算法的其他部分效仿线性元的求解过程, 并无较大改动. 但是有一点值得注意, 画真解和数值解误差图像时, 其横坐标是”自由度”而不是剖分数或者节点数量, 换句话说在二次元中对应的横坐标为 $2N-1$ (总共有 $N+1$ 个节点和 N 个半节点, 减去两个边值条件).

3 程序结果

3.1 数值解图像

这里展示了剖分数 $N = 10$ 和 $N = 50$ 时的图像, 其中橙色圆点表示数值解, 黑色实线表示真解.

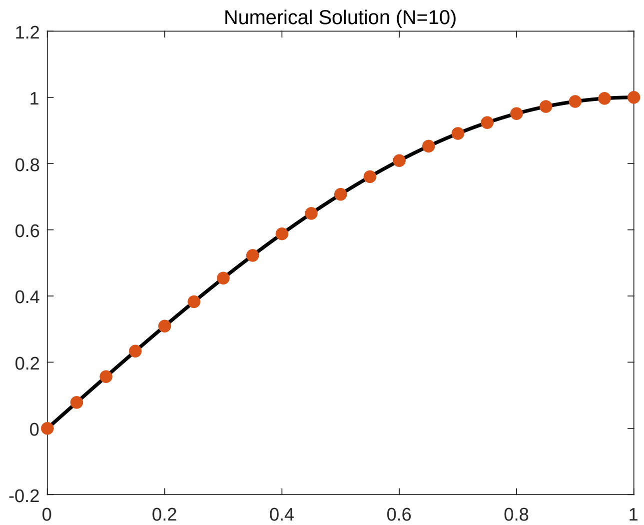


图 1: 真解和数值解

3.2 误差和收敛阶

接下来计算画出和收敛阶, 从图二图三中可以看出 $H1$ 误差的收敛速度是 $o(h^2)$, $L2$ 误差的收敛速度是 $o(h^3)$, 这比线性远快了一阶. 因此对于一次元需要一千个剖分才能达到的精度，对于二次元 100 个剖分就可以达到，这进而极大的减少了计算量。

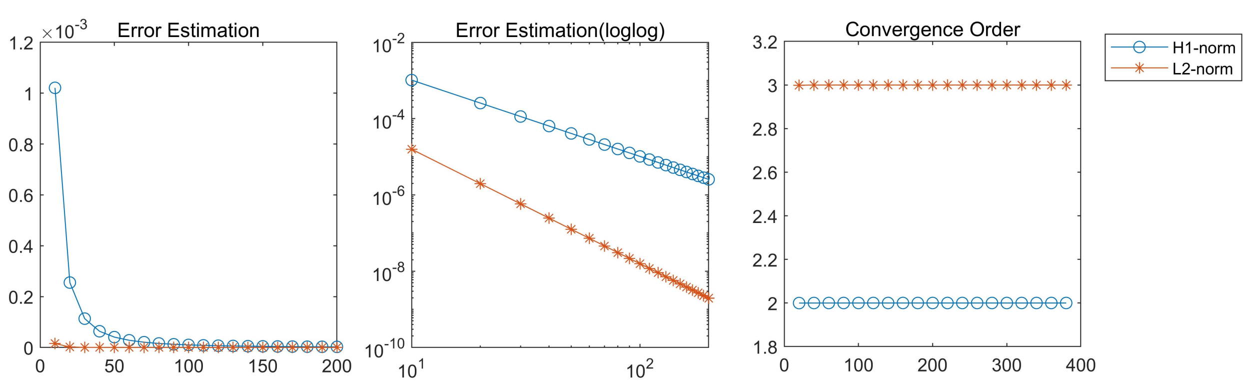


图 2: 误差和收敛阶

3.3 矩阵条件数

最后是刚度矩阵的条件数. 我们画出如下的图像, 其中图一是矩阵条件数与矩阵维数的双对数图, 图二是发散阶. 其发散阶仍然是二阶的, 但是平方项的系数对比线性元会稍大一些.

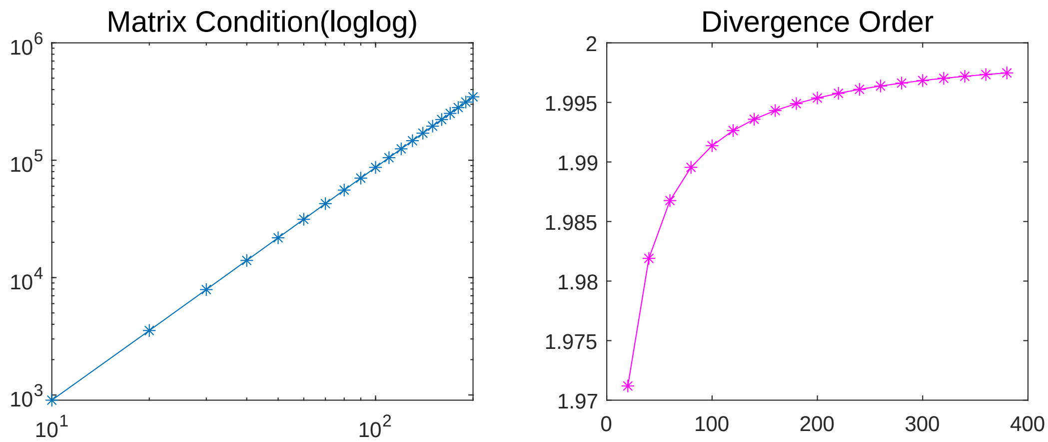


图 3: 系数矩阵条件数