有限元二维编程

August 30, 2022

目录

问题描述

- 几何形状$\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$

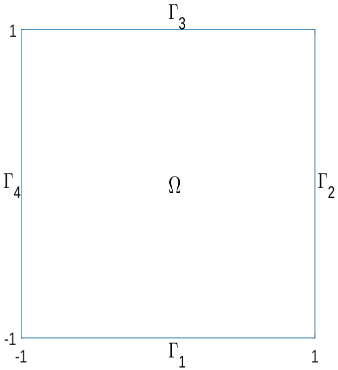

Figure: 几何形状

- 原方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y), \text{ in } \Omega; \\ u = g_d(x,y), \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_3, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = g_n(x,y) \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2\pi^2 cos(\pi x) cos(\pi y), \\ g_d(x,y) &= -cos(\pi x) cos(\pi y), \\ g_n(x,y) &= -\pi sin(\pi x) cos(\pi y). \end{aligned}$$

- 弱形式

  Find $u \in H^1_{bE}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = g_d\}$ such that

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} g_n v ds, \quad \forall v \in H^1_{0E}(\Omega).$$

网格剖分

- Decomposed Geometry matrix

$$g=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{1行中2表示边的类型是线段} \\ \rightarrow \text{2,3行表示起点和终点的}x\text{轴坐标} \\ \rightarrow \text{4,5行表示起点和终点的}y\text{轴坐标} \\ \rightarrow \text{6,7行表示起点到终点方向左右包含的区域数} \end{array}$$

注：矩阵的每一列表示一个边

- initmesh
  [p,e,t]=initmesh(g,'Hmax',hmax);

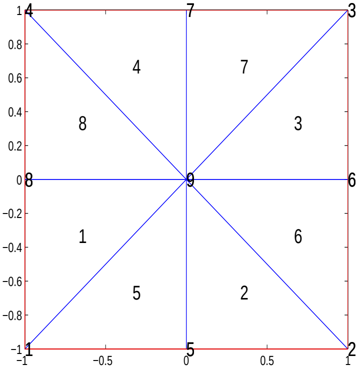

Figure: 三角形网格剖分

$$p = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第1行：x坐标；第2行：y坐标

$$t = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

前3行表示三个顶点在p中的指标，
第4行表示包含的子区域数

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 8 \\ 5 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 1 & 0.5 & 1 & 0.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1,2行表示起点和终点在p中的指标
3,4行表示起点和终点的在边上的参数
5行表示小边属于哪个大边
6,7行表示这个边左右包含子区域数
注：详细信息请参看matlab help中的initmesh和decsg

离散弱形式

- $x_1, \dots, x_9$ 剖分节点
- $\phi_1, \dots, \phi_9$ 分片线性基函数，它们张成的空间为V_h
- $V_{bE}^h := \{v \in V_h, v|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = g_d\}$

Find $u_h \in V_{bE}^h$ such that

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx = \int_\Omega f v_h dx + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} g_n v_h ds, \quad \forall v_h \in V_{0E}^h.$$

生成刚度矩阵

仍然以刚才的网格剖分为

例$u_h = u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + \cdots + u_9\phi_9$，$A = \{a_{ij}\}$，其中

$$a_{ij} = (\nabla\phi_j, \nabla\phi_i)_\Omega = \sum_{k=1}^{8}(\nabla\phi_j, \nabla\phi_i)_{T_k} =: \sum_{k=1}^{8} a_{ij}^k.$$

T_k表示第k个三角形。具体的例子如下

$$\begin{aligned}
a_{11} &= a_{11}^1 && && && && +a_{11}^5 && && && \\
a_{15} &= && && && && a_{15}^5 && && && \\
a_{18} &= a_{18}^1 && && && && && && && \\
&\vdots \\
a_{98} &= a_{98}^1 && && && && && && && +a_{98}^8 \\
a_{99} &= a_{99}^1 && +a_{99}^2 && +a_{99}^3 && +a_{99}^4 && +a_{91}^5 && +a_{99}^6 && +a_{99}^7 && +a_{99}^8
\end{aligned}$$

我们按剖分单元的循环求刚度矩阵, 例如循环到第1个剖分单元时

$$\begin{array}{lll} a^1_{11} \longrightarrow a_{11}, & a^1_{18} \longrightarrow a_{18}, & a^1_{19} \longrightarrow a_{19} \\ a^1_{81} \longrightarrow a_{81}, & a^1_{88} \longrightarrow a_{88}, & a^1_{89} \longrightarrow a_{89} \\ a^1_{91} \longrightarrow a_{91}, & a^1_{98} \longrightarrow a_{98}, & a^1_{99} \longrightarrow a_{99} \end{array}$$

即将局部刚度矩阵加入到整体刚度矩阵A的相应的位置

$$\begin{pmatrix} a^1_{11} & a^1_{18} & a^1_{19} \\ a^1_{81} & a^1_{88} & a^1_{89} \\ a^1_{91} & a^1_{98} & a^1_{99} \end{pmatrix} \longrightarrow A$$

当把三角形循环完毕，可以得到刚度矩阵A。同样的方法也可以得到右端向量F.

生成右端

仍然以刚才的网格剖分为例, $F = \{F_i\}$, 其中

$$
\begin{aligned}
F_i &= (\phi_i, f)_\Omega + (\phi_i, g_n)_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} \\
&= \sum_{k=1}^{8} (\phi_i, f)_{T_k} + (\phi_i, g_n)_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} \\
&= \sum_{k=1}^{8} F_i^k + (\phi_i, g_n)_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4}
\end{aligned}
$$

这里, T_k 表示第k个剖分单元.

按剖分单元循环来组装右端，先不要考虑边值条件项$(\phi_i, g_n)_{\Gamma_2\cup\Gamma_4}$. 以具体如下，

- $T_1 : F_1 += F_1^1,\ F_9 += F_9^1,\ F_8 += F_8^1$

  $\vdots$

- $T_8 : F_4 += F_4^8,\ F_8 += F_8^8,\ F_9 += F_9^8$

最后再把$(\phi_i, g_n)_{\Gamma_2\cup\Gamma_4}$ 加入F 的相应位置，右端生成完毕.

应用边值条件

在上一节中得到了刚度矩阵A和右端向量F，但是方程组$AU=F$，即

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{19}u_9 = f_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{29}u_9 = f_2 \\ \vdots \\ a_{91}u_1 + a_{92}u_2 + \cdots + a_{99}u_9 = f_9 \end{cases}$$

的解不唯一，因此加入边值条件使解唯一。

- 思路一
  用$g_d(x)$表示边值函数，则原方程做变换

$$
\begin{cases}
u_1 = g_d(p(1)) \\
\vdots \\
u_5 = g_d(p(5)) \\
a_{61}u_1 + a_{62}u_2 + \cdots + a_{69}u_9 = f_6 \\
u_7 = g_d(p(7)) \\
a_{81}u_1 + a_{82}u_2 + \cdots + a_{89}u_9 = f_8 \\
a_{91}u_1 + a_{92}u_2 + \cdots + a_{99}u_9 = f_9
\end{cases}
$$

然后求解一个9维方程组得到未知量$u_i, i = 1, \cdots, 9$。

- 思路二
  在上面的方程组中，u_i中只有u_6，u_8，u_9是未知的，我们选取第6,8,9个方程，把已知项放到右端

$$a_{66}u_6 + a_{68}u_8 + a_{69}u_9 = f_6 - (a_{61}u_1 + \cdots + a_{65}u_5 + a_{67}u_7)$$
$$a_{86}u_6 + a_{88}u_8 + a_{89}u_9 = f_8 - (a_{81}u_1 + \cdots + a_{85}u_5 + a_{87}u_7)$$
$$a_{96}u_6 + a_{98}u_8 + a_{99}u_9 = f_9 - (a_{91}u_1 + \cdots + a_{95}u_5 + a_{97}u_7)$$

  然后求解一个3维方程组得到u_6，u_8，u_9。

- 思路三
  用$Inf = 10^{15}$表示一个比较大的数,,原方程做变换

$$
\begin{cases}
(Inf + a_{11})u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{19}u_9 = f_1 + Inf * g_d(p(1)) \\
\vdots \\
a_{51}u_1 + \cdots + (Inf + a_{55})u_5 + \cdots + a_{19}u_9 = f_5 + Inf * g_d(p(5)) \\
a_{61}u_1 + \cdots + a_{66}u_6 + \cdots + a_{69}u_9 = f_6 \\
a_{71}u_1 + \cdots + (Inf + a_{77})u_7 + \cdots + a_{79}u_9 = f_7 + Inf * g_d(p(7)) \\
a_{81}u_1 + \cdots + a_{88}u_8 + a_{89}u_9 = f_8 \\
a_{91}u_1 + \cdots + a_{98}u_8 + a_{99}u_9 = f_9
\end{cases}
$$

然后求解一个9维方程组得到未知量$u_i, i = 1, \cdots, 9$。

求解，计算误差和画图

- 求解
  这里用A和F表示应用边值条件以后的刚度矩阵和右端向量，则
$$U = A \setminus F$$
- 计算误差
  u表示真解，u_h表示数值解，误差$e_h = u - u_h$的范数
$$\|e_h\|_0^2 = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} (e_h, e_h)_K,$$
$$\|e_h\|_1^2 = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} [(e_h, e_h)_K + (\nabla e_h, \nabla e_h)_K].$$
- 画图
$$pdemesh(p, e, t, u_h);$$

收敛阶

假设$\|e_h\|_0 = Ch^r$，h表示网格剖分的最大边。当最大边取h时，误差的L^2范数为$\|e_1\|_0 = Ch^r$，当最大边去$h/2$时，误差的L^2范数为$\|e_2\|_0 = C(h/2)^r$，则

$$\frac{\|e_1\|_0}{\|e_2\|_0} = \frac{Ch^r}{C(h/2)^r} = 2^r,$$

那么，L^2范数的收敛阶r可表示为

$$r = log_2(\frac{\|e_1\|_0}{\|e_2\|_0}).$$

同理，H_1范数的收敛阶r可表示为

$$r = log_2(\frac{\|e_1\|_1}{\|e_2\|_1}).$$