Lecture 5：两点边值问题的有限元方法 $\mathbb{P}_2$ 和 $\mathbb{P}_3$ 元

2023 年 3 月 25 日

1 本次课程内容

- 作业中的问题
- 复习两点边值问题的二次元和三次元方法
- 练习及作业：习题2.1.1

2 作业中的问题

- 本质边界条件的处理：设 $u_0 = \alpha$
  - 思考如果不区分φ_0，直接求解下述方程会得到什么结果？

$$\begin{bmatrix} a(\varphi_0,\varphi_0) & a(\varphi_1,\varphi_0) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_0) & a(\varphi_n,\varphi_0) \\ a(\varphi_0,\varphi_1) & a(\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_1) & a(\varphi_n,\varphi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a(\varphi_0,\varphi_{n-1}) & a(\varphi_1,\varphi_{n-1}) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_{n-1}) & a(\varphi_n,\varphi_{n-1}) \\ a(\varphi_0,\varphi_n) & a(\varphi_1,\varphi_n) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_n) & a(\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < f,\varphi_0 > \\ < f,\varphi_1 > \\ \vdots \\ < f,\varphi_{n-1} > \\ < f,\varphi_n > \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

  - 方法一：将第一列减到右端。考虑近似解 $u = u_0\varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i\varphi_i$ 并将其带入双线性形式可得

$$a(\varphi_0,\varphi_i)u_0 + \sum_{j=1}^{n} a(\varphi_j,\varphi_i)u_j =< f,\varphi_i >, \qquad i = 1,...,n. \tag{2.2}$$

其等价于将矩阵 (2.1) 的第一列减到右端向量

$$\begin{bmatrix} a(\varphi_1,\varphi_0) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_0) & a(\varphi_n,\varphi_0) \\ a(\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_1) & a(\varphi_n,\varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a(\varphi_1,\varphi_{n-1}) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_{n-1}) & a(\varphi_n,\varphi_{n-1}) \\ a(\varphi_1,\varphi_n) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_n) & a(\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < f,\varphi_0 > \\ < f,\varphi_1 > \\ \vdots \\ < f,\varphi_{n-1} > \\ < f,\varphi_n > \end{bmatrix} - u_0 \begin{bmatrix} a(\varphi_0,\varphi_0) \\ a(\varphi_0,\varphi_1) \\ \vdots \\ a(\varphi_0,\varphi_{n-1}) \\ a(\varphi_0,\varphi_n) \end{bmatrix}$$

进而求解

$$\begin{bmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_1) & a(\varphi_n,\varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a(\varphi_1,\varphi_{n-1}) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_{n-1}) & a(\varphi_n,\varphi_{n-1}) \\ a(\varphi_1,\varphi_n) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_n) & a(\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < f,\varphi_1 > \\ \vdots \\ < f,\varphi_{n-1} > \\ < f,\varphi_n > \end{bmatrix} - u_0 \begin{bmatrix} a(\varphi_0,\varphi_1) \\ \vdots \\ a(\varphi_0,\varphi_{n-1}) \\ a(\varphi_0,\varphi_n) \end{bmatrix}$$

- 方法二：带入 u_0 取值。依旧从(2.2) 出发，建立 $n+1$ 个方程。其中第一个方程显示的给出 u_0 的取值，第 2 到 $n+1$ 个方程满足 (2.2)。即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a(\varphi_0,\varphi_1) & a(\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_1) & a(\varphi_n,\varphi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a(\varphi_0,\varphi_{n-1}) & a(\varphi_1,\varphi_{n-1}) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_{n-1}) & a(\varphi_n,\varphi_{n-1}) \\ a(\varphi_0,\varphi_n) & a(\varphi_1,\varphi_n) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_n) & a(\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ < f,\varphi_1 > \\ \vdots \\ < f,\varphi_{n-1} > \\ < f,\varphi_n > \end{bmatrix}$$

- 方法三：将 $a(\varphi_0,\varphi_0)$ 设为较大数值，如

$$\begin{bmatrix} 10^{10} & a(\varphi_1,\varphi_0) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_0) & a(\varphi_n,\varphi_0) \\ a(\varphi_0,\varphi_1) & a(\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_1) & a(\varphi_n,\varphi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a(\varphi_0,\varphi_{n-1}) & a(\varphi_1,\varphi_{n-1}) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_{n-1}) & a(\varphi_n,\varphi_{n-1}) \\ a(\varphi_0,\varphi_n) & a(\varphi_1,\varphi_n) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_n) & a(\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha 10^{10} \\ < f,\varphi_1 > \\ \vdots \\ < f,\varphi_{n-1} > \\ < f,\varphi_n > \end{bmatrix}$$

  则第一行方程近似为

$$u_0 + 10^{-10}\sum_{i=1}^{n} a(\varphi_i,\varphi_0)u_i = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad u_0 \approx \alpha$$

- 系数矩阵条件数的估计：假设双线性形式满足连续性和强制性

$$|a(u,v)| \le C\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \qquad |a(u,u)| \ge \alpha\|u\|_{H^1}^2.$$

  由连续性可得

$$\begin{aligned} |a(u,u)| &\le C\|u\|_{H^1}^2 = C\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(u_i-u_{i-1})^2}{h_i} + \frac{1}{3}\left(u_i^2+u_{i-1}^2+u_iu_{i-1}\right)h_i\right] \\ &\le C\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2u_{i-1}^2+2u_i^2}{h_i} + \frac{u_{i-1}^2+u_i^2}{2}h_i\right] \\ &\le 2C\left(h_{max}+\frac{1}{h_{min}}\right)\sum_{i=0}^{n}u_i^2 = 2C\left(h_{max}+\frac{1}{h_{min}}\right)UU^\top \end{aligned}$$

其中 $U=[u_0,u_1,...,u_n]$。由强制性可得

$$
\begin{aligned}
|a(u,u)| &\geq \alpha\|u\|_{H^1}^2=\alpha\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(u_i-u_{i-1})^2}{h_i}+\frac{1}{3}\left(u_i^2+u_{i-1}^2+u_iu_{i-1}\right)h_i\right] \\
&\geq \alpha\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_{i-1}^2+u_i^2}{6}h_i\right]\geq\frac{\alpha}{6}h_{min}\sum_{i=0}^{n}u_i^2=\frac{\alpha}{6}h_{min}UU^\top
\end{aligned}
$$

由于 $|a(u,u)|=UAU^\top$, 设 A 按模最大和最小特征值对应特征向量为 U_{max} 和 U_{min}，则有

$$|\lambda_{max}|U_{max}U_{max}^\top=U_{max}AU_{max}^\top=|a(u_{max},u_{max})|\leq 2C\left(h_{max}+\frac{1}{h_{min}}\right)U_{max}U_{max}^\top$$

以及

$$|\lambda_{min}|U_{min}U_{min}^\top=U_{min}AU_{min}^\top=|a(u_{min},u_{min})|\geq\frac{\alpha}{3}h_{min}U_{min}U_{min}^\top$$

故有

$$\mathrm{cond}(A,2)=\frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}\leq O(h^{-2})$$

3 两点边值问题的高次元方法

- 有限元方法的基本框架：
  (1) 把问题转化为变分形式
  (2) 选定单元形状，对求解区域作剖分
  (3) 构造基函数或单元形状函数，生成有限元空间
  (4) 形成有限元方程（Ritz-Galerkin 方程）
  (5) 提供有限元方程的有效解法
  (6) 收敛性及误差估计
- 高次元的优点
  - 在物理和工程问题中 u 和 u' 有时都是需要的，利用高次元如 $\mathbb{P}_3$ 元可以直接求出 u' 值
  - 若要求数值计算的 L^2 误差精度为 ϵ，对于一次元需要的网格密度为

    $$\epsilon=C_1h^2=C_1(b-a)^2/N^2\Rightarrow N=(b-a)\sqrt{\frac{C_1}{\epsilon}}$$

    而对于二次元有

    $$\epsilon=C_2h^3=C_2(b-a)^3/N^3\Rightarrow N=(b-a)\left(\frac{C_2}{\epsilon}\right)^{1/3}$$

对于三次元

$$\epsilon = C_3 h^4 = C_3(b-a)^4/N^4 \Rightarrow N = (b-a)\left(\frac{C_3}{\epsilon}\right)^{1/4}$$

因此，对于一次元需要一万个剖分才能达到的精度，对于三次元100个剖分就可以达到，进而极大的减少了计算量。

- **误差计算** 有限元解是分片连续的函数，其可能不存在经典意义下的导数。
  - 求其误差时应采用分区间段的方式。比如求其一阶导数的积分

    $$\int_a^b |u_h' - u'|^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{I_i} |u_h' - u'|^2 \mathrm{d}x\right]$$

    由此，在每个区间 I_i 内有限元解都是光滑的。
  - 利用数值积分公式求误差时，应在每个区间段上使用，由此可保证数值积分的误差和网格剖分步长 h 相关。
  - 数值积分的精度应该高于有限元误差的精度，否则最后结果的数值精度会降为数值积分的精度。

- **高斯型求积公式：** [-1, 1] 上的高斯型求积节点和权重

两点公式： $x_k = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad w_k = 1$

三点公式： $x_k = \left(0, \pm\sqrt{\frac{3}{5}}\right), \qquad w_k = \left(\frac{8}{9}, \frac{5}{9}\right)$

四点公式： $x_k = \left(\pm\sqrt{\left(3-2\sqrt{6/5}\right)/7}, \pm\sqrt{\left(3+2\sqrt{6/5}\right)/7}\right), \qquad w_k = \left(\frac{18+\sqrt{30}}{36}, \frac{18-\sqrt{30}}{36}\right)$

- **二次元基函数**
  - 物理区间上的基函数

    $$\varphi_i(x) = \begin{cases} \left(2h_i^{-1}|x-x_i| - 1\right)\left(h_i^{-1}|x-x_i| - 1\right) & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \left(2h_{i+1}^{-1}|x-x_i| - 1\right)\left(h_{i+1}^{-1}|x-x_i| - 1\right) & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

    以及半点上的基函数

    $$\varphi_{i+1/2}(x) = \begin{cases} 4h_{i+1}^{-1}\left(x-x_i\right)\left(1-h_{i+1}^{-1}(x-x_i)\right) & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

    则有限元解可以表示为

    $$u_h = \sum_i \left[u_i\varphi_i(x) + u_{i+\frac{1}{2}}\varphi_{i+\frac{1}{2}}(x)\right]$$

- 标准区间 [0, 1] 上的基函数

$$N_0(\xi)=(2\xi-1)(\xi-1),\quad N_1(\xi)=(2\xi-1)\xi,\quad N_{1/2}(\xi)=4\xi(1-\xi)$$
$$N_0'(\xi)=4\xi-3,\qquad N_1'(\xi)=4\xi-1,\qquad N_{1/2}'(\xi)=4-8\xi$$

- 形成刚度矩阵：对于 $\mathbb{P}_2$ 元，有两种生成刚度矩阵的方式。一种是生成单元刚度矩阵后组装成包含半节点的刚度矩阵，矩阵规模为 $(2N+1)*(2N+1)$。另一种是在计算单元刚度矩阵阶段消去半点部分，组装成仅含整数节点的刚度矩阵，矩阵规模为 $(N+1)*(N+1)$

  * 方式一：由于是二次多项式，在区间段 I_i 内涉及 3 个未知量，涉及到总刚度矩阵中的 9 个元素和右端向量中的 3 个元素。依旧以下双线性形式为例

  $$a(u,v)=\int_a^b\left[pu'v'+quv\right]\mathrm{d}x=\int_a^b fv\mathrm{d}x$$

  记区间段 I_i 的左端点为 x_{i_1}，则在仿射变换 $x(\xi)=x_{i_1}+h_i\xi$ 下

  $$\begin{aligned}&\int_{x_{i1}}^{x_{i_2}}\left[p\varphi_k'\varphi_m'+q\varphi_k\varphi_m\right]\mathrm{d}x \qquad (3.1)\\ =&\int_0^1\left[h_i^{-1}p(x_{i_1}+h_i\xi)N_k'(\xi)N_m'(\xi)+q(x_{i_1}+h_i\xi)N_k(\xi)N_m(\xi)h_i\right]\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

  其中 k,m 对用区间 I_i 中的左右和中点节点。同理，

  $$\int_{x_{i_1}}^{x_{i_2}}f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x_{i_1}+h_i\xi)N_k(\xi)h_i\mathrm{d}\xi \qquad (3.2)$$

  对以上在单位区间上的积分用数值积分公式求解

  $$I_m(f)=\sum_{k=1}^m w_kf(\xi_k)$$

  方程(3.1) 和 (3.2) 中仅涉及到参数数向量和右端函数向量

  $$\begin{aligned}\boldsymbol{p}&=[p(x_{i_1}+h_i\xi_1),p(x_{i_1}+h_i\xi_2),\cdots,p(x_{i_1}+h_i\xi_m)]\\ \boldsymbol{q}&=[q(x_{i_1}+h_i\xi_1),q(x_{i_1}+h_i\xi_2),\cdots,q(x_{i_1}+h_i\xi_m)]\\ \boldsymbol{f}&=[f(x_{i_1}+h_i\xi_1),f(x_{i_1}+h_i\xi_2),\cdots,f(x_{i_1}+h_i\xi_m)]\end{aligned}$$

  以及基底向量 $\{N_j(\xi_k)\}_{k=1}^m$ 和 $\left\{N_j'(\xi_k)\right\}_{k=1}^m$。由此，单元刚度矩阵可以以统一的方式相对简单的生成。令K为单元刚度矩阵和单元向量 $\boldsymbol{b}$，则有

  $$K(j_1,j_2)=\sum_{k=1}^m\left[h_i^{-1}\boldsymbol{p}(k)N_{j_1}'(k)N_{j_2}'(k)+\boldsymbol{q}(k)N_{j_1}(k)N_{j_2}(k)h_i\right]$$

  和

  $$b(j_1)=\sum_{k=1}^m f(k)N_{j_1}(k)h_i$$

  具体参见算法示例。

* 方式二：由于半点 $u_{i+1/2}$ 在系数矩阵中仅和其相邻端点 u_i 和 u_{i+1} 相关联。由此，可以通过将 $u_{i+1/2}$ 用 u_i 和 u_{i+1} 表示，进而消去半点以到达减小矩阵规模的目的。此技巧在数值线性代数中经常用到。具体来说

$$\begin{aligned}(f,\varphi_{i+1/2}) &= a(u,\varphi_{i+1/2})\\ &= u_i a(\varphi_i,\varphi_{i+1/2}) + u_{i+1/2}a(\varphi_{i+1/2},\varphi_{i+1/2}) + u_{i+1}a(\varphi_{i+1},\varphi_{i+1/2})\end{aligned}$$

则可得到

$$u_{i+1/2} = \frac{1}{a(\varphi_{i+1/2},\varphi_{i+1/2})}\left[(f,\varphi_{i+1/2}) - u_i a(\varphi_i,\varphi_{i+1/2}) - u_{i+1}a(\varphi_{i+1},\varphi_{i+1/2})\right] \tag{3.3}$$

当考虑测试函数为 φ_i 时

$$\begin{aligned}(f,\varphi_i) &= a(u,\varphi_i) \qquad (3.4)\\ &= u_{i-1}a(\varphi_{i-1},\varphi_i) + u_{i-1/2}a(\varphi_{i-1/2},\varphi_i) + u_i a(\varphi_i,\varphi_i)\\ &\quad + u_{i+1/2}a(\varphi_{i+1/2},\varphi_i) + u_{i+1}a(\varphi_{i+1},\varphi_i)\end{aligned}$$

将 (3.3) 带入到 (3.4) 的 I_i 区间部分，可得

$$\begin{aligned}(f,\varphi_i)\Big|_{I_i} &= u_i a(\varphi_i,\varphi_i) + u_{i+1}a(\varphi_{i+1},\varphi_i)\\ &\quad + \frac{a(\varphi_{i+1/2},\varphi_i)}{a(\varphi_{i+1/2},\varphi_{i+1/2})}\left[(f,\varphi_{i+1/2}) - u_i a(\varphi_i,\varphi_{i+1/2}) - u_{i+1}a(\varphi_{i+1},\varphi_{i+1/2})\right]\\ &= u_i\left[a(\varphi_i,\varphi_i) - \frac{a(\varphi_{i+1/2},\varphi_i)}{a(\varphi_{i+1/2},\varphi_{i+1/2})}a(\varphi_i,\varphi_{i+1/2})\right]\\ &\quad + u_{i+1}\left[a(\varphi_{i+1},\varphi_i) - \frac{a(\varphi_{i+1/2},\varphi_i)}{a(\varphi_{i+1/2},\varphi_{i+1/2})}a(\varphi_{i+1},\varphi_{i+1/2})\right] + \frac{a(\varphi_{i+1/2},\varphi_i)}{a(\varphi_{i+1/2},\varphi_{i+1/2})}(f,\varphi_{i+1/2})\end{aligned}$$

其等价于直接对单元刚度矩阵和单元向量做如下操作

$$K(j_1,j_2) = K(j_1,j_2) - \frac{K(3,j_2)}{K(3,3)}K(j_1,3), \quad b(j_1) = b(j_1) - \frac{K(j_1,3)}{K(3,3)}b(3)$$

具体参见算法示例。

- 三次元基函数

  – 物理区间上的基函数

$$\varphi_i^{(0)}(x) = \begin{cases}\left(1-h_i^{-1}|x-x_i|\right)^2\left(2h_i^{-1}|x-x_i|+1\right) & x\in[x_{i-1},x_i]\\ \left(1-h_{i+1}^{-1}|x-x_i|\right)^2\left(2h_{i+1}^{-1}|x-x_i|+1\right) & x\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

  以及导数项基底

$$\varphi_i^{(1)}(x) = \begin{cases}(x-x_i)(h_i^{-1}|x-x_i|-1)^2 & x\in[x_{i-1},x_i]\\ (x-x_i)(h_{i+1}^{-1}|x-x_i|-1)^2 & x\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

– 标准区间[0,1]上的基函数

$$N_0(\xi) = (1-\xi)^2(2\xi+1), \quad N_1(\xi) = \xi(1-\xi)^2, \quad N_2(\xi) = \xi^2(3-2\xi), \quad N_3(\xi) = (\xi-1)\xi^2$$
$$N_0'(\xi) = -6\xi(1-\xi), \quad N_1'(\xi) = (1-\xi)(1-3\xi), \quad N_2'(\xi) = 6\xi(1-\xi), \quad N_3'(\xi) = \xi(3\xi-2)$$

其中 N_0, N_1 对应左端点自身和导数项的基底，N_2, N_3 对应右端点自身和导数项的基底。

– 形成刚度矩阵：对于 $\mathbb{P}_3$ 元，其单元刚度矩阵涉及总刚度矩阵中的 16 个元素，以及右端项的 4 个元素。其生成方式和 $\mathbb{P}_2$ 元的第一种方式完全相同。

4 作业及练习

P_{47} -练习 2.1.1：用二次元和三次元在均匀网格下求解边值问题(4.1)的数值解：

$$\begin{aligned} & -y'' + \frac{\pi^2}{4}y = \frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}x, \quad 0 < x < 1 \\ & y(0) = 0, \qquad y'(1) = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

要求：

- 画出数值解的图像
- 对[0, 1]区间均匀剖分 $N = 10, 20, 30, ..., 200$ 份，计算其和真解

$$u^* = \sin\frac{\pi}{2}x$$

的 $L^2([0,1])$ 误差和 $H^1([0,1])$ 误差，计算其关于网格长度$h = 1/N$ 的数值收敛阶，并用 loglog() 函数作图表示。

- 作业截止日期为 2022-04-05 日，将程序代码和实验报告压缩为 .rar 文件，文件名为“姓名-微分方程数值解计算实习作业 4.rar” 发送到邮箱 yuanxk@jlu.edu.cn。

5 算法

表 1: 一维 $\mathbb{P}_2$ 有限元的通用算法 A：不排除半点

Step 1: 初始化矩阵和向量 $A = zeros(2n+1, 2n+1), b = zeros(2n+1, 1)$

Step 2: 网格剖分信息： $\boldsymbol{p}(i) = x_i$, $\quad I(:, i) = [i_1, i_2]$ 。生成几何矩阵 G：

$$G(1,i) = 2i-1, \quad G(2,i) = 2i+1, \quad G(3,i) = 2i,$$
$$G(4,i) = \boldsymbol{p}(I(1,i)), \quad G(5,i) = \boldsymbol{p}(I(2,i)) - \boldsymbol{p}(I(1,i))$$

Step 3: 构造基函数 $\{\varphi_i\}$

Step 4: 形成有限元方程：

确定数值积分公式 $\int_0^1 f(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \sum\limits_{k=1}^{m} w_k f(\xi_k)$ 注意数值积分的精度要高于有限元方法的精度

$\mathrm{VecN}(i,:) = [N_i(\xi_1), N_i(\xi_2), \cdots, N_i(\xi_m)], \quad \mathrm{VecM}(i,:) = [N_i'(\xi_1), N_i'(\xi_2), \cdots, N_i'(\xi_m)]$

For $i = 1:1:n$

/* 以 $a(u,v) = \int_a^b [pu'v' + quv]\,\mathrm{d}x$ 为例展示 */

$K = zeros(3,3), \quad L = zeros(3,1), \quad x_0 = G(4,i), \quad h_i = G(5,i)$

定义参数向量，基底向量和右端向量

$$\mathrm{VecP} = [p(x_{i_1} + h_i\xi_1), p(x_{i_1} + h_i\xi_2), \cdots, p(x_{i_1} + h_i\xi_m)]$$
$$\mathrm{VecQ} = [q(x_{i_1} + h_i\xi_1), q(x_{i_1} + h_i\xi_2), \cdots, q(x_{i_1} + h_i\xi_m)]$$
$$\mathrm{VecF} = [f(x_{i_1} + h_i\xi_1), f(x_{i_1} + h_i\xi_2), \cdots, f(x_{i_1} + h_i\xi_m)]$$

生成单元刚度矩阵

For $j_1 = 1:1:3$

For $j_2 = 1:1:3$

$\mathrm{temp} = \mathrm{VecP}. * M(j_1,:). * M(j_2,:)h_i^{-1} + \mathrm{VecQ}. * N(j_1,:). * N(j_2,:)h_i$

$K(j_1, j_2) = \sum\limits_{k=1}^{m} w_k\,\mathrm{temp}(k)$

End

$\mathrm{temp} = \mathrm{VecF}. * N(j_1,:)h_i$

$L(j_1) = \sum\limits_{k=1}^{m} w_k\,\mathrm{temp}(k)$

End

组装系数矩阵

For $j_1 = 1:1:3$

For $j_2 = 1:1:3$

$A(G(j_1, i), G(j_2, i)) = A(G(j_1, i), G(j_2, i)) + K(j_1, j_2)$

End

$b(G(j_1, i)) = b(G(j_1, i)) + L(j_1)$

End

End

本质边界条件的处理

Step 5: 求解系数矩阵 $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{u} = A\backslash\boldsymbol{b}$

Step 6: 求得有限元解

表 2: 一维 $\mathbb{P}_2$ 有限元的通用算法 B：排除半点

Step 1: 初始化矩阵和向量 $A = zeros(n+1, n+1), b = zeros(n+1, 1)$

Step 2: 网格剖分信息： $\boldsymbol{p}(i) = x_i, \quad I(:, i) = [i_1, i_2]$ 。生成几何矩阵 G：

$$G(1,i) = I(1,i), \quad G(2,i) = I(2,i), \quad G(3,i) = \boldsymbol{p}(I(1,i)), \quad G(4,i) = \boldsymbol{p}(I(2,i)) - \boldsymbol{p}(I(1,i))$$

生成半点权重矩阵 HalfP=$zeros(3, n)$

Step 3: 构造基函数 $\{\varphi_i\}$

Step 4: 形成有限元方程：

确定数值积分公式 $\int_0^1 f(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \sum\limits_{k=1}^{m} w_k f(\xi_k)$ 注意数值积分的精度要高于有限元方法的精度

$$\mathrm{VecN}(i,:) = [N_i(\xi_1), N_i(\xi_2), \cdots, N_i(\xi_m)], \quad \mathrm{VecM}(i,:) = [N_i'(\xi_1), N_i'(\xi_2), \cdots, N_i'(\xi_m)]$$

For $i = 1:1:n$

/* 以 $a(u,v) = \int_a^b [pu'v' + quv]\,\mathrm{d}x$ 为例展示 */

$K = zeros(3,3), \quad L = zeros(3,1), \quad x_0 = G(3,i), \quad h_i = G(4,i)$

定义参数向量，基底向量和右端向量

$$\mathrm{VecP} = [p(x_{i_1} + h_i\xi_1), p(x_{i_1} + h_i\xi_2), \cdots, p(x_{i_1} + h_i\xi_m)]$$
$$\mathrm{VecQ} = [q(x_{i_1} + h_i\xi_1), q(x_{i_1} + h_i\xi_2), \cdots, q(x_{i_1} + h_i\xi_m)]$$
$$\mathrm{VecF} = [f(x_{i_1} + h_i\xi_1), f(x_{i_1} + h_i\xi_2), \cdots, f(x_{i_1} + h_i\xi_m)]$$

生成单元刚度矩阵

For $j_1 = 1:1:3$

For $j_2 = 1:1:3$

$\mathrm{temp} = \mathrm{VecP}.*M(j_1,:).*M(j_2,:)h_i^{-1} + \mathrm{VecQ}.*N(j_1,:).*N(j_2,:)h_i$

$K(j_1, j_2) = \sum\limits_{k=1}^{m} w_k\,\mathrm{temp}(k)$

End

$\mathrm{temp} = \mathrm{VecF}.*N(j_1,:)h_i$

$L(j_1) = \sum\limits_{k=1}^{m} w_k\,\mathrm{temp}(k)$

End

记录半点权重

$$\text{HalfP}(1,i) = -K(1,3)/K(3,3), \quad \text{HalfP}(2,i) = -K(2,3)/K(3,3)$$

$$\text{HalfP}(3,i) = L(3)/K(3,3)$$

消掉半点

For $j_1 = 1:1:2$

For $j_2 = 1:1:2$

$$K(j_1,j_2) = K(j_1,j_2) - K(3,j_2)/K(3,3)\,K(j_1,3)$$

End

$$L(j_1) = L(j_1) - K(j_1,3)/K(3,3)\,L(3)$$

End

组装系数矩阵

For $j_1 = 1:1:2$

For $j_2 = 1:1:2$

$$A(G(j_1,i),G(j_2,i)) = A(G(j_1,i),G(j_2,i)) + K(j_1,j_2)$$

End

$$b(G(j_1,i)) = b(G(j_1,i)) + L(j_1)$$

End

End

本质边界条件的处理

Step 5: 求解系数矩阵 $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{u} = A\backslash\boldsymbol{b}$

Step 5: 获得中间点系数

$$halfu = \text{HalfP}(1,:).*\boldsymbol{u}(1:N) + \text{HalfP}(2,:).*\boldsymbol{u}(2:N+1) + \text{HalfP}(3,:);$$

Step 6: 求得有限元解

表 3: 一维 $\mathbb{P}_3$ 有限元的通用算法

Step 1: 初始化矩阵和向量 $A = zeros(2n+2, 2n+2), b = zeros(2n+2, 1)$

Step 2: 网格剖分信息： $\boldsymbol{p}(i) = x_i, \quad I(:, i) = [i_1, i_2]$ 。生成几何矩阵 G：

$$G(1,i) = 2i-1, \quad G(2,i) = 2i, \quad G(3,i) = 2i+1, \quad G(4,i) = 2i+2,$$
$$G(5,i) = \boldsymbol{p}(I(1,i)), \quad G(6,i) = \boldsymbol{p}(I(2,i)) - \boldsymbol{p}(I(1,i))$$

Step 3: 构造基函数 $\{\varphi_i\}$

Step 4: 形成有限元方程：

确定数值积分公式 $\int_0^1 f(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \sum\limits_{k=1}^{m} w_k f(\xi_k)$ 注意数值积分的精度要高于有限元方法的精度

$$\mathrm{VecN}(i,:) = [N_i(\xi_1), N_i(\xi_2), \cdots, N_i(\xi_m)], \quad \mathrm{VecM}(i,:) = [N_i'(\xi_1), N_i'(\xi_2), \cdots, N_i'(\xi_m)]$$

For $i = 1:1:n$

/* 以 $a(u,v) = \int_a^b [pu'v' + quv]\,\mathrm{d}x$ 为例展示 */

$K = zeros(4,4), \quad L = zeros(4,1), \quad x_0 = G(5,i), \quad h_i = G(6,i)$

定义参数向量，基底向量和右端向量

$$\mathrm{VecP} = [p(x_{i_1} + h_i\xi_1), p(x_{i_1} + h_i\xi_2), \cdots, p(x_{i_1} + h_i\xi_m)]$$
$$\mathrm{VecQ} = [q(x_{i_1} + h_i\xi_1), q(x_{i_1} + h_i\xi_2), \cdots, q(x_{i_1} + h_i\xi_m)]$$
$$\mathrm{VecF} = [f(x_{i_1} + h_i\xi_1), f(x_{i_1} + h_i\xi_2), \cdots, f(x_{i_1} + h_i\xi_m)]$$

生成单元刚度矩阵

For $j_1 = 1:1:4$

For $j_2 = 1:1:4$

$\mathrm{temp} = \mathrm{VecP}.*M(j_1,:).*M(j_2,:)h_i^{-1} + \mathrm{VecQ}.*N(j_1,:).*N(j_2,:)h_i$

$K(j_1, j_2) = \sum\limits_{k=1}^{m} w_k\,\mathrm{temp}(k)$

End

$\mathrm{temp} = \mathrm{VecF}.*N(j_1,:)h_i$

$L(j_1) = \sum\limits_{k=1}^{m} w_k\,\mathrm{temp}(k)$

End

组装系数矩阵

For $j_1 = 1:1:4$

For $j_2 = 1:1:4$

$A(G(j_1, i), G(j_2, i)) = A(G(j_1, i), G(j_2, i)) + K(j_1, j_2)$

End

$b(G(j_1, i)) = b(G(j_1, i)) + L(j_1)$

End

End

本质边界条件的处理

Step 5: 求解系数矩阵 $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{u} = A\backslash\boldsymbol{b}$

Step 6: 求得有限元解
