Lecture 11：三角网格上的二阶椭圆型方程的差分格式

2023 年 5 月 11 日

1 本次课程内容

- 三角网格上的二阶椭圆型方程的差分格式
- 练习

2 三角网格上的二阶椭圆型方程的差分格式

2.1 差分法的基本框架

(1) 对求解区域做网格剖分

(2) 构造逼近微分方程定解问题的差分格式

(3) 形成差分方程

(4) 差分方程的求解

(5) 差分解的存在唯一性，收敛性及稳定性的研究

Remark 2.1. *有限体积法基本思路：找网格节点的对偶单元 $\rightarrow$ 对偶单元上对方程积分 $\rightarrow$ Green 公式化成线积分 $\rightarrow$ 数值积分和数值微分离散*

2.2 Step 1: 区域网格剖分

对于曲边区域 G，一般采用三角网近似。不妨设 G 是多边形区域，将 G 分割成有限个三角形之和，使不同三角形重叠的内部，且任一三角形的顶点不属于其他三角形的内部，这样就把 G 分割成三角网格，称为 G 的三角剖分。每个三角形称为**单元**，它的顶点称为 **节点**。属于同一单元的二顶点称为**相邻节点**，有公共边的两个三角形称为 **相邻单元**。

- 物理节点的坐标：$\boldsymbol{p}(i) = [x_i, y_i]^\top$
- 三角形单元节点信息：$\boldsymbol{t}(i) = [i_1, i_2, i_3, k]^\top$，$k$ 代表其所属的区域，i_1, i_2, i_3 逆时针分布

- 边界信息：$\boldsymbol{e}(i)=[i_1,i_2,\cdots,i_7]$
- 三角形单元上的广义坐标：$\boldsymbol{G}(i)$

Remark 2.2. $\boldsymbol{e}(1,i)$ 和 $\boldsymbol{e}(2,i)$ 并不以逆时针分布。关于由 *matlab* 生成的三角剖分信息 $[\boldsymbol{p},\boldsymbol{e},\boldsymbol{t}]$，具体可参见 *matlab* 文档 *"pdetriples.pdf"*。

Remark 2.3. 三角剖分要求三角形任一内角不大于 *90* 度以保证外心在三角形内部。

2.3 Step 3.1: 内点的差分格式

考虑如下问题

$$\Delta u+qu=f \qquad \text{in}\,\Omega \tag{2.1}$$

采用由单元刚度矩阵形成系数矩阵的方式。取任一三角单元 Δ_{ijk}，记其任一节点 i 的外心对偶剖分为 K_i，其在 Δ_{ijk} 内的部分为 T_i，面积为 S_i。记三边中点为 i_1,j_1,k_1，外心为 O。

2.3.1 方式一：

对方程在 K_i 处积分并由 Green 公式可得

$$\int_{K_i}(\Delta u+qu)\,\mathrm{d}\Omega=\int_{K_i}f\mathrm{d}\Omega \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\partial K_i}\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}s+\int_{K_i}qu\mathrm{d}\Omega=\int_{K_i}f\mathrm{d}\Omega$$

上式在三角单元 Δ_{ijk} 中的部分为

$$\int_{\overline{Oj_1}}\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{ds},\quad \int_{\overline{Ok_1}}\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{ds},\quad \int_{T_i}qu\mathrm{d}\Omega,\quad \int_{T_i}f\mathrm{d}\Omega$$

当选取外心对偶剖分时，上述线积分可由中矩形公式和中心差商进行近似

$$\begin{aligned}&\int_{\overline{Oj_1}}\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{ds}\approx\frac{\overline{Ok_1}}{\overline{ij}}\left(u_j-u_i\right), \qquad \int_{\overline{Ok_1}}\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{ds}\approx\frac{\overline{Oj_1}}{\overline{ik}}\left(u_k-u_i\right)\\&\int_{T_i}qu\mathrm{d}\Omega\approx q_iu_iS_i, \qquad \int_{T_i}f\mathrm{d}\Omega\approx f_iS_i\end{aligned}$$

则其对系数矩阵的贡献为

$$\begin{aligned}&A(i,i)=A(i,i)-\frac{\overline{Ok_1}}{\overline{ij}}-\frac{\overline{Oj_1}}{\overline{ik}}+q_iS_i\\&A(i,j)=A(i,j)+\frac{\overline{Ok_1}}{\overline{ij}}\\&A(i,k)=A(i,k)+\frac{\overline{Oj_1}}{\overline{ik}}\\&b(i)=b(i)+f_iS_i\end{aligned}$$

2.3.2 方式二：

对方程在 T_i 处积分并由 Green 公式可得

$$\int_{T_i} (\Delta u + qu)\, \mathrm{d}\Omega = \int_{T_i} f \mathrm{d}\Omega \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\partial T_i} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}s + \int_{T_i} qu \mathrm{d}\Omega = \int_{T_i} f \mathrm{d}\Omega$$

其中

$$\int_{\partial T_i} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}s = \int_{\overline{Oj_1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{ds} + \int_{\overline{Ok_1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{ds} + \int_{\overline{ik_1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{ds} + \int_{\overline{ij_1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{ds}$$

后两个在 $\overline{ij_1}, \overline{ik_1}$ 上的积分将和相邻单元上的积分消去，因此只需计算

$$\int_{\overline{Oj_1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{ds}, \quad \int_{\overline{Ok_1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{ds}, \quad \int_{T_i} qu \mathrm{d}\Omega, \quad \int_{T_i} f \mathrm{d}\Omega$$

以减少计算量。

2.4 Step 3.2: 界点的处理

2.4.1 第三类边界条件的处理

对于第三类边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \kappa u\big|_{\Gamma} = \gamma$$

设三角单元 Δ_{ijk} 的边 $\widehat{ij}$在边界 Γ 上，记节点 i 的外心对偶剖分为 K_i，其在 Δ_{ijk} 内的部分为 T_i，面积为 S_i。记三边中点为 i_1, j_1, k_1，外心为 O。

对方程在 T_i 处积分并由 Green 公式可得

$$\int_{T_i} (\Delta u + qu)\, \mathrm{d}\Omega = \int_{T_i} f \mathrm{d}\Omega \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\partial T_i} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}s + \int_{T_i} qu \mathrm{d}\Omega = \int_{T_i} f \mathrm{d}\Omega$$

其中

$$\int_{\partial T_i} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}s = \int_{\overline{Oj_1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{ds} + \int_{\overline{Ok_1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{ds} + \int_{\overline{ik_1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{ds} + \int_{\overline{ij_1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{ds}$$

其中 $\overline{ij_1}$ 上的积分将和相邻单元上的积分消去，而

$$\int_{\overline{Oj_1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{ds}, \quad \int_{\overline{Ok_1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{ds}, \quad \int_{T_i} qu \mathrm{d}\Omega, \quad \int_{T_i} f \mathrm{d}\Omega$$

在处理内点时计算过，只需要额外计算 $\overline{ik_1}$ 上的积分，利用边界条件可得

$$\int_{\overline{ik_1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{ds} = \int_{\overline{ik_1}} (\gamma - \kappa u)\, \mathrm{ds} \approx \gamma \overline{ik_1} - \kappa u_i \overline{ik_1}$$

则边界条件对系数矩阵的贡献为

$$A(i,i) = A(i,i) - \kappa \overline{ik_1}, \qquad b(i) = b(i) - \gamma \overline{ik_1}$$

2.4.2 本质边界条件的处理

对于本质边界条件

$$u = \alpha$$

可采用和有限元相同的处理方式，即：

- 对系数矩阵本质边界条件对应的相应行赋值为 0，对角线元素赋值为 1，右端向量相应位置赋值 α
- 消去相应的行 j，右端向量减去 $\alpha A(:,j)$, 去的矩阵第 j 列
- 对系数矩阵本质边界条件对应的相应位置的$A(i,i)$赋大数值，例如令 $A(i,i) = 10^{10}$，相应右端向量位置赋值 $b(i) = \alpha 10^{10}$。数值上可得 $u(i)$ 近似为 α。

Remark 2.4. 外心的计算：

- 对于 *Matlab R2013a* 之后的版本可以调用 $C = circumcenter(TR)$ 其中 C 为三角剖分的外心坐标，TR 为三角剖分。
- 对于 *Matlab R2013a* 之前的版本可以按如下公式自行编写

$$x_p = \frac{\begin{vmatrix} \frac{x_1^2+y_1^2}{2} & y_1 & 1 \\ \frac{x_2^2+y_2^2}{2} & y_2 & 1 \\ \frac{x_3^2+y_3^2}{2} & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}, \qquad y_p = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & \frac{x_1^2+y_1^2}{2} & 1 \\ x_2 & \frac{x_2^2+y_2^2}{2} & 1 \\ x_3 & \frac{x_3^2+y_3^2}{2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}.$$

3 作业及练习（强化题目）

令 $\Omega = [0,1]^2$，对Ω 做三角剖分，并用有限体积法求解

$$\begin{cases} \Delta u + 2\pi^2 u = 2\pi^2 xy & \text{in}\,\Omega \\ u(0,y) = 0, \qquad u(x,0) = 0 \\ \partial_x u(1,y) = y - \pi\sin(\pi y) \\ \partial_y u(x,1) = x - \pi\sin(\pi x) \end{cases}$$

相应的真解为

$$u^* = xy + \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

求数值解的网点C-范数和网点 0-范数误差并画出误差图。

Remark 3.1. *作业截止日期为 2023/05/18-2023/05/25 日，将程序代码和实验报告压缩为 .rar 文件，文件名为“姓名-微分方程数值解计算实习第12周作业.rar” 发送到邮箱 yuanxk@jlu.edu.cn, 邮件名称为“姓名-微分方程数值解计算实习第12周作业”*