微分方程数值解计算实习

朱荃凡

(吉林大学数学系计算唐班)

2023 年 6 月 4 日

1 问题重述

以下列两点边值问题为例

$$\begin{cases} u'' + u = -x, \ 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

取基函数为

$$\phi_i(x) = \sin(i\pi x), \quad \psi_i(x) = (1-x)x^i, \ i = 1, 2, \cdots, N.$$

1 对比两组基函数对应的系数矩阵的条件数随 N 增加产生的变化.

2 画图对比两组基函数对应的数值解与精确解

$$u_*(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x \tag{1.2}$$

之间的 $L^2([0,1])$ 误差随着 N 增加产生的变化.

2 系数矩阵与条件数

我们分别取两组基函数的个数 k 为 1 到 8, 计算出系数矩阵的条件数并列出如下表格:

表 1: 稀疏矩阵的条件数

k	1	2	3	4	5	6	7	8
Cond1	1	4.34	9.90	17.69	27.71	39.95	54.41	71.10
Cond2	1	10.17	1.61×10^2	3.11×10^3	6.69×10^4	1.55×10^6	3.80×10^7	9.66×10^8

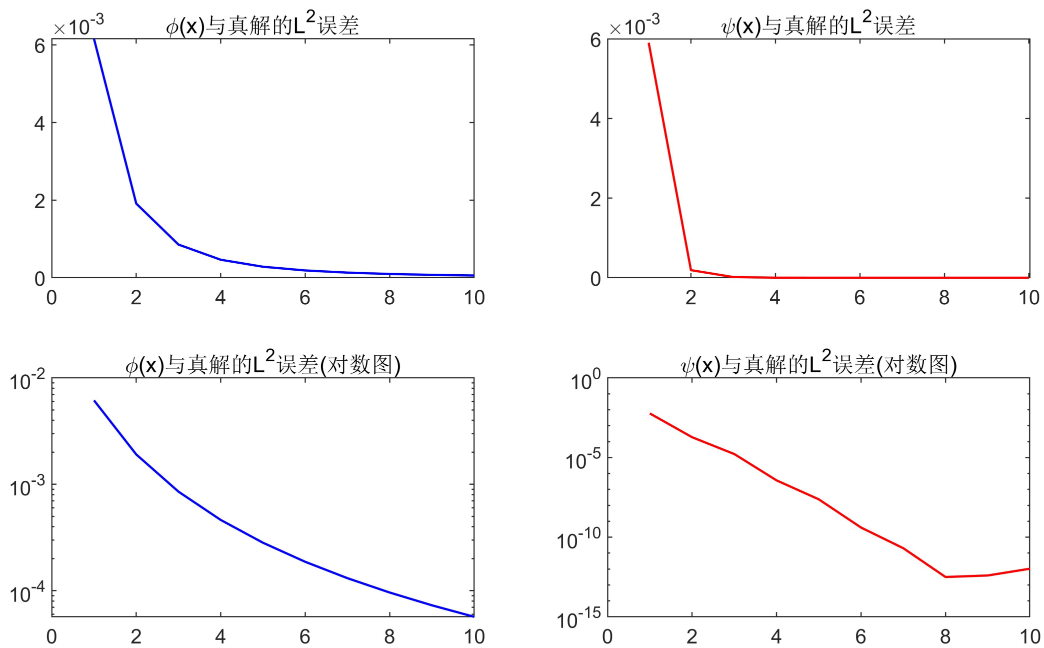
从表中可以看出, 第一组基函数对应系数矩阵的条件数增长速度相当缓慢, 介于线性和二次函数之间; 而多项式基函数对应系数矩阵的条件数呈现出指数级增长速度. 这种现象可以从系数矩阵的结构解释, 第一类系数矩阵是对角阵, 而第二类系数矩阵是一个无规律可循的满矩阵.

3 误差收敛速度

为计算数值解和真解之间的误差收敛速度, 我们计算它们之间的 L^2 范数, 即:

$$err_n = \left[\int_0^1 (u_*(x) - u_n(x))^2 \, \mathrm{d}x\right]^{1/2}. \tag{3.1}$$

并且积分也是通过数值方法去实现的. 具体来说, 在 $[0,1]$ 区间上等分取 101 个节点, 计算这些节点处的真解和数值解的数值, 然后使用复化 Simpson 公式. 最后我们绘制出如下的误差收敛图:



从图中可以看出, 三角基函数和多项式基函数得到的数值解与真解之间的 L^2 误差均有指数级的收敛速度, 并且多项式类收敛更快, 在对数图中, 当 $k \geq 9$ 时甚至出现了运算精度造成的结果错误. 综上, 基函数的选取对 Ritz-Galerkin 方法的收敛速度十分重要.