Lecture 14：抛物型方程的差分法3

2023 年 5 月 31 日

1 本次课程内容

- 2023/06/15 日前补齐作业
- 有限元方法
- 总结复习

2 有限元方法

利用差分法求解有如下局限：

- 不易构造高阶格式
- 不易处理复杂边界

2.1 有限元方法的基本框架：

(1) 把问题转化为变分形式

(2) 选定单元形状，对求解区域作剖分

(3) 构造基函数或单元形状函数，生成有限元空间

(4) 形成有限元方程（Ritz-Galerkin 方程）$\rightarrow$ 半离散格式

(5) 对时间进行离散 $\rightarrow$ 全离散格式

(6) 提供有限元方程的有效解法

(7) 稳定性，收敛性及误差估计

2.2 问题模型

考虑二维热传导方程的初-边值问题

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f & (x,y) \in G, t > 0 \\ u(x,y,0) = \psi(x,y) & (x,y) \in G \\ u(x,y,t) = g_1 & (x,y) \in \Gamma_1, t > 0 \\ \partial_\nu u(x,y,t) = g_2 & (x,y) \in \Gamma_2, t > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

2.3 Step1: 变分问题

以任意 $v \in H^1_{\Gamma_1}(G)$ 乘以方程两端，利用 Green 公式和边界条件可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G \left[u_t(x,y;t)v(x,y) - \Delta u(x,y;t)v(x,y) - f(x,y;t)v(x,y)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_G \left[u_t(x,y;t)v(x,y) + \nabla u(x,y;t)\cdot\nabla v(x,y) - f(x,y;t)v(x,y)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\partial G} \partial_\nu u(x,y;t)v(x,y;t)\mathrm{d}s \\ &= \int_G \left[u_t(x,y;t)v(x,y) + \nabla u(x,y;t)\cdot\nabla v(x,y) - f(x,y;t)v(x,y)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\Gamma_2} g_2(x,y;t)v(x,y;t)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

引入双线性形式

$$a(u,v) = \int_G \left(\frac{\partial u(x,y;t)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y;t)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

则初边值问题 (2.1) 的变分形式为：求 $u(x,y;t) \in H^1(G)$ 且在 Γ_1 上 $u(x,y;t) = g_1$，对任意 $v \in H^1_{\Gamma_1}(G)$, 满足

$$\int_G u_t(x,y;t)v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + a(u,v) = \int_G f(x,y;t)v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_2} g_2(x,y;t)v(x,y;t)\mathrm{d}s \tag{2.2}$$

$$u(x,y;0) = \psi(x,y) \tag{2.3}$$

并称此解 u 为 (2.1) 的广义解.

2.4 Step 2: 选定单元形状函数，对求解区域剖分

2.5 Step 3: 构造基函数，生成有限元空间 U_h

2.6 Step 4: 形成有限元方程得到半离散格式

设 U_h 中一组基底为 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$，近似 $u(x,y;t)$ 为

$$u_h(x,y;t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(t)\varphi_i(x,y)$$

则有限元方程为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_G \varphi_i\varphi_j \frac{d\mu_i}{dt}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \sum_{i=1}^n a(\varphi_i,\varphi_j)\mu_i(t) = \sum_{i=1}^n \int_G f(x,y;t)\varphi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ + \int_{\Gamma_2} g_2(x,y;t)\varphi_j\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{2.4}$$

初始条件可近似为

$$u_h(x,y;0)=\sum_{i=0}^{n}\mu_i(0)\varphi_i \tag{2.5}$$

满足

$$\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i,\varphi_j)\mu_i(0)=(\psi,\varphi_j),\qquad j=1,2,\cdots,n$$

称(2.4)–(2.5) 为变分问题 (2.2)–(2.3) 的半离散格式。记

$$A(j,i)=\int_G\varphi_i\,\varphi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad B(j,i)=a(\varphi_i,\varphi_j)$$

则 (2.4)–(2.5) 等价为

$$A\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt}+B\boldsymbol{\mu}(t)=F(t) \tag{2.6}$$

2.7 Step 5: 全离散格式

经过对空间变量的有限元离散，原变分问题 (2.2)–(2.3) 转化为仅包含时间项的半离散格式 (2.6)。对其可以采用包括向前，向后，六点对称格式或其他数值格式进行离散。

- 向前差分格式：
  - 初始条件：

    $$\boldsymbol{\mu}^0=A^{-1}\boldsymbol{\psi},\qquad \boldsymbol{\psi}_i=\int_G\psi\,\varphi_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

  - 迭代格式：

    $$\frac{\boldsymbol{\mu}^{k+1}-\boldsymbol{\mu}^k}{\tau}+A^{-1}B\boldsymbol{\mu}^k=A^{-1}F(t_k),\quad k=1,2,\cdots$$
    $$\Rightarrow \boldsymbol{\mu}^{k+1}+A^{-1}\left(\tau B-A\right)\boldsymbol{\mu}^k=\tau A^{-1}F$$

- 向后差分格式：
  - 初始条件：

    $$\boldsymbol{\mu}^0=A^{-1}\boldsymbol{\psi},\qquad \boldsymbol{\psi}_i=\int_G\psi\,\varphi_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

  - 迭代格式：

    $$\frac{\boldsymbol{\mu}^{k+1}-\boldsymbol{\mu}^k}{\tau}+A^{-1}B\boldsymbol{\mu}^{k+1}=A^{-1}F(t_{k+1}),\quad k=1,2,\cdots$$
    $$\Rightarrow \boldsymbol{\mu}^{k+1}=\left(A+\tau B\right)^{-1}A\boldsymbol{\mu}^k+\tau\left(A+\tau B\right)^{-1}F(t_{k+1})$$

- 六点对称格式 (Crank-Nicolson 格式或改进 Euler 折线法)：
  - 初始条件：

    $$\boldsymbol{\mu}^0=A^{-1}\boldsymbol{\psi},\qquad \boldsymbol{\psi}_i=\int_G\psi\,\varphi_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

– 迭代格式：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\boldsymbol{\mu}^{k+1}-\boldsymbol{\mu}^{k}}{\tau}+\frac{1}{2}A^{-1}B\left(\boldsymbol{\mu}^{k+1}+\boldsymbol{\mu}^{k}\right)=\frac{1}{2}A^{-1}\left(F(t_{k+1})+F(t_k)\right), \quad k=1,2,\cdots \\
&\Rightarrow \left(A+\frac{\tau}{2}B\right)\boldsymbol{\mu}^{k+1}=\left(A-\frac{\tau}{2}B\right)\boldsymbol{\mu}^{k}+\frac{\tau}{2}\left(F(t_{k+1})+F(t_k)\right)
\end{aligned}
$$