Lecture 13：抛物型方程的差分法2

2023 年 5 月 24 日

1 本次课程内容

- 交替方向隐式法 (ADI)
- 预估-校正法
- 局部一维法 (LOD)
- 练习

2 后续课程安排

- 2023/06/08 最后一次课程
- 因病假或其他原因，在 2023/06/15 日前补齐作业

3 问题模型

考虑二维热传导方程的初-边值问题

$$
\begin{cases}
u_t = a\Delta u & 0 < x, y < l, t > 0 \\
u(x,y,0) = \varphi(x,y) & 0 < x, y < l \\
u(0,y,t) = u(l,y,t) = 0 & 0 < y < l, t > 0 \\
u_y(x,0,t) = u_y(x,l,t) = 0 & 0 < x < l, t > 0
\end{cases}
$$

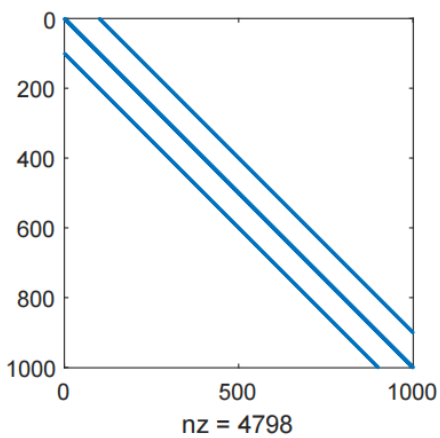
取空间步长 $h = l/N$，时间步长 $\tau > 0$，作两族平行于坐标轴的网线 $x = x_j = jh, y = y_k = kh, j, k = 0, 1, \cdots, N$，将区域 $0 \le x, y \le l$ 分割成 N^2 个小矩形。记 $r = \tau/N^2$。若采用向后差分格式或六点对称格式，则有如下结构

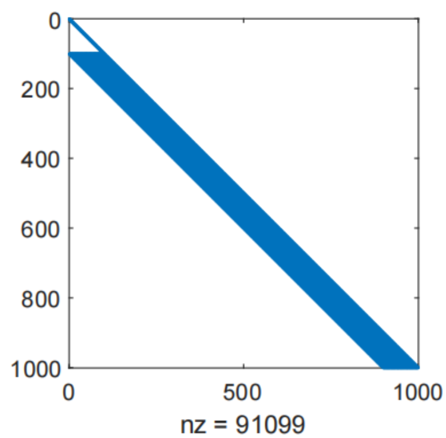
$$
\frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} = a\frac{u_{j+1,k}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j-1,k}^{n+1}}{h^2} + a\frac{u_{j,k+1}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k-1}^{n+1}}{h^2}
$$

以及

$$\frac{u_{jk}^{n+1}-u_{jk}^{n}}{\tau}=\frac{a}{2}\left[\frac{u_{j+1,k}^{n+1}-2u_{j,k}^{n+1}+u_{j-1,k}^{n+1}}{h^2}+\frac{u_{j,k+1}^{n+1}-2u_{j,k}^{n+1}+u_{j,k-1}^{n+1}}{h^2}\right]$$
$$+\frac{a}{2}\left[\frac{u_{j+1,k}^{n}-2u_{j,k}^{n}+u_{j-1,k}^{n}}{h^2}+\frac{u_{j,k+1}^{n}-2u_{j,k}^{n}+u_{j,k-1}^{n}}{h^2}\right]$$

即在每次迭代步求解半带宽为 N 的五对角矩阵，如采用 LU 分解进行计算，将破坏矩阵的稀疏性 $O(N^3)$，增加计算量$O(N_TN^3)$。因此尝试对迭代进行分解，转化为三对角方程$O(N^2)$，利用追赶法进行求解 $O(N_TN^2)$。





4 交替方向隐式法 (ADI)

记

$$i_1=k(N+1)+(j+1),\quad i_2=i_1+1,\quad i_3=i_1-1,\quad i_4=i_1+N+1,\quad i_5=i_1-N-1$$

- 初始条件：$u_{jk}^0=\varphi(x_j,y_k)$
- 内点处理：$1\le j<N, 1\le k<N$

$$\begin{cases}\left(1-\frac{ar}{2}\delta_x^2\right)u_{jk}^{n+1/2}=\left(I+\frac{ar}{2}\delta_y^2\right)u_{jk}^{n}\\ \left(1-\frac{ar}{2}\delta_y^2\right)u_{jk}^{n+1}=\left(I+\frac{ar}{2}\delta_x^2\right)u_{jk}^{n+1/2}\end{cases}$$

对应系数矩阵

$$A_1(i_1,i_1)=1+ar,\quad A_1(i_1,i_2)=-ar/2,\quad A_1(i_1,i_3)=-ar/2$$
$$A_2(i_1,i_1)=1+ar,\quad A_2(i_1,i_4)=-ar/2,\quad A_2(i_1,i_5)=-ar/2$$
$$b_1(i_1)=(1-ar)u_{jk}^{n}+\frac{ar}{2}u_{j,k+1}^{n}+\frac{ar}{2}u_{j,k-1}^{n}$$
$$b_2(i_1)=(1-ar)u_{jk}^{n+1/2}+\frac{ar}{2}u_{j+1,k}^{n+1/2}+\frac{ar}{2}u_{j-1,k}^{n+1/2}$$

- 界点处理：
  - Dirichlet 边界条件：三种处理方式
  - Neumann 边界条件：

$$u_{j,-1}^n = u_{j,1}^n, \qquad u_{j,N+1}^n = u_{j,N-1}^n$$

Remark 4.1. 利用中心差分，精度会比 *P201* 中采用的格式精度高

$$u_{j0}^n = u_{j1}^n, \qquad u_{j,N-1}^n = u_{j,N}^n$$

Theorem 4.2. 对任何网比 $r > 0$, *ADI* 格式的解有收敛阶 $O(\tau^2 + h^2)$。

5 预估-校正法

记

$$i_1 = k(N+1) + (j+1), \quad i_2 = i_1 + 1, \quad i_3 = i_1 - 1, \quad i_4 = i_1 + N + 1, \quad i_5 = i_1 - N - 1$$

- 初始条件：$u_{jk}^0 = \varphi(x_j, y_k)$
- 内点处理：$1 \leq j < N, 1 \leq k < N$
  - 预估：

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{ar}{2}\delta_x^2\right) u_{jk}^{n+1/4} = u_{jk}^n \\ \left(1 - \dfrac{ar}{2}\delta_y^2\right) u_{jk}^{n+1/2} = u_{jk}^{n+1/4} \end{cases}$$

  - 校正：

$$u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^n + ar\left(\delta_x^2 + \delta_y^2\right) u_{jk}^{n+1/2}$$

  对应系数矩阵

$$\begin{aligned} &A_1(i_1, i_1) = 1 + ar, \quad A_1(i_1, i_2) = -ar/2, \quad A_1(i_1, i_3) = -ar/2 \\ &A_2(i_1, i_1) = 1 + ar, \quad A_2(i_1, i_4) = -ar/2, \quad A_2(i_1, i_5) = -ar/2 \\ &b_1(i_1) = u_{jk}^n, \qquad b_2(i_1) = u_{jk}^{n+1/4} \end{aligned}$$

- 界点处理：
  - Dirichlet 边界条件：三种处理方式
  - Neumann 边界条件：

$$u_{j,-1}^n = u_{j,1}^n, \qquad u_{j,N+1}^n = u_{j,N-1}^n$$

Theorem 5.1. 对任何网比 $r > 0$, 预估校正格式的解有收敛阶 $O(\tau^2 + h^2)$。

6 LOD 法

记

$$i_1 = k(N+1) + (j+1), \quad i_2 = i_1 + 1, \quad i_3 = i_1 - 1, \quad i_4 = i_1 + N + 1, \quad i_5 = i_1 - N - 1$$

- 初始条件：$u_{jk}^0 = \varphi(x_j, y_k)$
- 内点处理：$1 \le j < N, 1 \le k < N$

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{ar}{2}\delta_x^2\right) u_{jk}^{n+1/2} = \left(I + \frac{ar}{2}\delta_x^2\right) u_{jk}^n \\ \left(1 - \frac{ar}{2}\delta_y^2\right) u_{jk}^{n+1} = \left(I + \frac{ar}{2}\delta_y^2\right) u_{jk}^{n+1/2} \end{cases}$$

  对应系数矩阵

$$\begin{aligned} &A_1(i_1, i_1) = 1 + ar, \quad A_1(i_1, i_2) = -ar/2, \quad A_1(i_1, i_3) = -ar/2 \\ &A_2(i_1, i_1) = 1 + ar, \quad A_2(i_1, i_4) = -ar/2, \quad A_2(i_1, i_5) = -ar/2 \\ &b_1(i_1) = (1 - ar)u_{jk}^n + \frac{ar}{2}u_{j+1,k}^n + \frac{ar}{2}u_{j-1,k}^n \\ &b_2(i_1) = (1 - ar)u_{jk}^{n+1/2} + \frac{ar}{2}u_{j,k+1}^{n+1/2} + \frac{ar}{2}u_{j,k-1}^{n+1/2} \end{aligned}$$

- 界点处理：
  - Dirichlet 边界条件：三种处理方式
  - Neumann 边界条件：

$$u_{j,-1}^n = u_{j,1}^n, \qquad u_{j,N+1}^n = u_{j,N-1}^n$$

Theorem 6.1. 对任何网比 $r > 0$, *LOD* 格式的解有收敛阶 $O(\tau^2 + h^2)$。

7 作业及练习

对如下题目编写 ADI 格式，预估校正法以及 LOD 格式进行求解，

$$\begin{cases} u_t = 4^{-2}\Delta u & 0 < x, y < 1, t > 0 \\ u(x, y, 0) = \sin(\pi x)\cos(\pi y) & 0 < x, y < 1 \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0 & 0 < y < 1, t > 0 \\ u_y(x, 0, t) = u_y(x, 1, t) = 0 & 0 < x < 1, t > 0 \end{cases}$$

真解 $u = \sin(\pi x)\cos(\pi y)e^{-\frac{\pi^2}{8}t}$。计算离散解在网格剖分 $h = 1/40, \tau = 1/1600$ 下于

$$(x_j, y_k) = (\frac{j}{4}, \frac{k}{4}), \quad j, k = 1, 2, 3, \quad t = 1$$

处的取值

Remark 7.1. 作业截止日期为 *2023/05/31-2023/06/07* 日，将程序代码和实验报告压缩为 *.rar* 文件，文件名为“姓名-微分方程数值解计算实习第*14*周作业*.rar*” 发送到邮箱 *yuanxk@jlu.edu.cn*, 邮件名称为“姓名-微分方程数值解计算实习第*14*周作业”