Lecture 10：矩形网格上的二阶椭圆型方程的差分格式

2023 年 5 月 4 日

1 本次课程内容

- 两点边值问题差分法的示例程序
- 矩形网格上的二阶椭圆型方程的差分格式
- 练习

2 矩形网格上的二阶椭圆型方程的差分格式

2.1 差分法的基本框架

(1) 对求解区域做网格剖分

(2) 构造差分格式：直接差分化和有限体积法

(3) 形成差分方程

(4) 差分方程组的求解

(5) 数值解的存在、唯一性、稳定性及收敛性

Remark 2.1. *有限体积法基本思路：找网格节点的对偶单元 $\to$ 对偶单元上对方程积分 $\to$ Green 公式化成线积分 $\to$ 数值积分和数值微分离散*

2.2 Step 1: 区域网格剖分

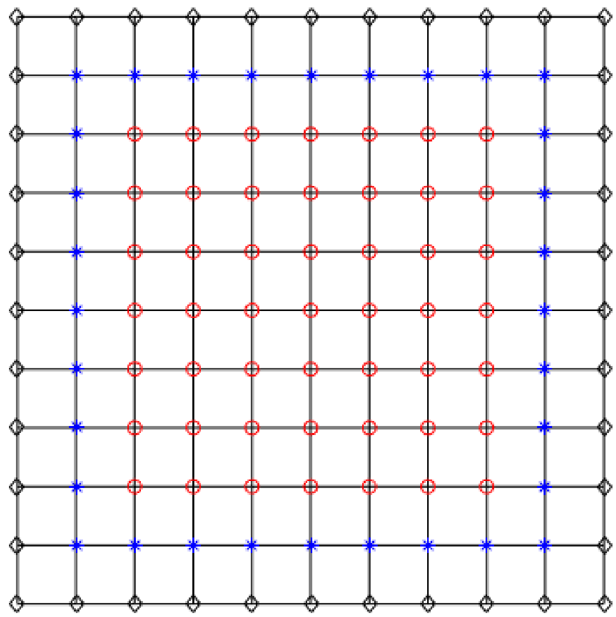
取定沿 x 轴和 y 轴方向的步长 h_1 和 h_2, $h = (h_1^2 + h_2^2)^{1/2}$. 做两族与坐标轴平行的直线：

$$x = ih_1, \qquad i = 0, \pm 1, \cdots ,$$
$$y = jh_2, \qquad j = 0, \pm 1, \cdots ,$$

两族直线的交点 (ih_1, jh_2) 称为 **网点**或 **节点**，记为 (x_i, y_j) 或 (i, j)。若两个节点 $(i, j), (i', j')$ 满足

$$|i - i'| + |j - j'| = 1$$

则称他们相邻。以 $G_h=\{(x_i,y_j)\in G\}$ 表示所有属于 G 内部节点的集合，并称为**内点**。以 Γ_h 表示网线 $x=x_i$ 或 $y=y_j$ 与 Γ 的交点集合，称作**界点**。令 $\overline{G}_h=G_h\cup\Gamma_h$, 则 $\overline{G}_h$ 就是代替域 $\overline{G}=G\cup\Gamma$ 的网点集合。若内点的四个相邻点都属于 G_h, 则称为**正则内点**；否则称为**非正则内点**。



为了由单元刚度矩阵生成整体的系数矩阵，可仿造有限元中对矩形剖分的处理，定义节点信息

- 物理节点的坐标：$\boldsymbol{p}(i)=[x_i,y_i]^\top$
- 矩形单元节点信息：$\boldsymbol{I}(i)=[i_1,i_2,i_3,i_4]^\top$
- 边界信息：$\boldsymbol{E}(i)=[i_1,i_2,k]$， k 代表其所属的边界
- 矩形单元上的广义坐标：$\boldsymbol{G}(i)$

2.3 Step 2: 内点的差分格式

考虑如下问题

$$\Delta u+qu=f \qquad \text{in}\,\Omega \tag{2.1}$$

2.3.1 直接差分法

假设 (x_i,y_j) 为内点，沿 x,y 方向分别用二阶中心差商代替 u_{xx},u_{yy}, 则

$$\Delta u+qu=f \quad \Rightarrow \left[\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h_1^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h_2^2}\right]+q_{ij}u_{ij}=f_{ij} \tag{2.2}$$

利用 Taylor 展式可得截断误差

$$R_{ij}(u) = -\frac{1}{12}\left(h_1^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + h_2^2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{ij} + O(h^4) = O(h^2)$$

差分格式 (2.2) 只出现 u 在 (i,j) 及其四个相邻点上的值，故称作**五点差分格式**。

2.3.2 有限体积法

作两族平行于坐标轴的直线 $x = x_{i-\frac{1}{2}}$ 和 $y = y_{j-\frac{1}{2}}, i,j = 0, \pm 1, \cdots$，其交点属于 G 的内部为对偶剖分的内点，直线与边界 Γ 的交点为对偶剖分的界点。对于内点 (x_i, y_j) 考虑对偶剖分的网点 $A(x_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}), B(x_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}), C(x_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}), D(x_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})$，记以其为顶点的矩形内部为 G_{ij}。对方程 (2.1) 于 G_{ij} 内积分，由 Green 公式可得积分守恒形式

$$\begin{aligned}
&\int_{G_{ij}} (\Delta u + qu)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{G_{ij}} f\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\Rightarrow -\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial y}u(x, y_{j-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x + \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x}u(x_{i+\frac{1}{2}}, y)\mathrm{d}y + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial y}u(x, y_{j+\frac{1}{2}})\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x}u(x_{i-\frac{1}{2}}, y)\mathrm{d}y + \int_{G_{ij}} qu\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{G_{ij}} f\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

利用中矩形公式积分离散，并用中心差商离散上述导数，可得

$$\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x}u(x_{i+\frac{1}{2}}, y)\mathrm{d}y \approx h_2\frac{\partial}{\partial x}u(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) \approx h_2\frac{1}{h_1}\left[u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)\right]$$

以此类推可得

$$\begin{aligned}
&\int_{G_{ij}} (\Delta u + qu)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{G_{ij}} f\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\Rightarrow -\frac{h_1}{h_2}\left[u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1})\right] + \frac{h_2}{h_1}\left[u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)\right] + \frac{h_1}{h_2}\left[u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_j)\right] \\
&\quad -\frac{h_2}{h_1}\left[u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)\right] + q(x_i, y_j)u(x_i, y_j)h_1h_2 = f(x_i, y_j)h_1h_2
\end{aligned}$$

两端同时出去 h_1h_2 可得到五点差分格式

$$\left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2}\right] + q_{ij}u_{ij} = f_{ij}$$

2.4 边界条件的处理

2.4.1 第三类边界条件的处理

对于第三类边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \kappa u\Big|_{\Gamma} = \gamma$$

可采用数值微商或有限体积法处理。

- **数值微商的处理：**
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=\nu_1\frac{\partial u}{\partial x}+\nu_2\frac{\partial u}{\partial y}$$
利用数值微商近似上述偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial x}$.

- **有限体积法的处理：** 以矩形区域为例，设 (x_N,y_j) 为界点，考虑对偶剖分节点为 $A(x_{N-\frac{1}{2}},y_{j-\frac{1}{2}})$, $B(x_N,y_{j-\frac{1}{2}}),C(x_N,y_{j+\frac{1}{2}}),D(x_{N-\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}})$ 的矩形区域 G_{Nj}。对 (2.1) 在 G_{Nj} 上积分，由 Green 公式可得
$$\begin{aligned}&\int_{G_{Nj}}(\Delta u+qu)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{G_{Nj}}f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\Rightarrow-\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N}\frac{\partial}{\partial y}u(x,y_{j-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x+\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial x}u(x_N,y)\mathrm{d}y+\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N}\frac{\partial}{\partial y}u(x,y_{j+\frac{1}{2}})\mathrm{d}x\\&\qquad-\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial x}u(x_{N-\frac{1}{2}},y)\mathrm{d}y+\int_{G_{Nj}}qu\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{G_{Nj}}f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$
对$[x_{N-\frac{1}{2}},x_N]$ 上积分用右矩形公式离散，再用中心差商近似导数可得
$$-\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N}\frac{\partial}{\partial y}u(x,y_{j-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x\approx-\frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial y}u(x_N,y_{j-\frac{1}{2}})\approx-\frac{h_1}{2h_2}\left[u(x_N,y_j)-u(x_N,y_{j-1})\right]$$
对第二项积分带入边界条件,利用中矩形公式可得
$$\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial x}u(x_N,y)\mathrm{d}y=\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\left[\gamma-\kappa u(x_N,y)\right]\mathrm{d}y\approx\gamma(x_N,y_j)h_2-\kappa u(x_N,y_j)h_2$$
由此，可得第三类边界条件的离散格式
$$\begin{aligned}&-\frac{h_1}{2h_2}\left[u(x_N,y_j)-u(x_N,y_{j-1})\right]+\gamma(x_N,y_j)h_2-\kappa u(x_N,y_j)h_2\\&\quad+\frac{h_1}{2h_2}\left[u(x_N,y_{j+1})-u(x_N,y_j)\right]-\frac{h_2}{h_1}\left[u(x_N,y_j)-u(x_{N-1},y_j)\right]\\&\qquad+\frac{1}{2}q(x_N,y_j)u(x_N,y_j)h_1h_2=\frac{1}{2}f(x_N,y_j)h_1h_2\end{aligned}$$
两端除以h_1h_2 即可得到边界点出的差分格式
$$\begin{aligned}&\left[\frac{u(x_N,y_{j+1})-2u(x_N,y_j)+u(x_N,y_{j-1})}{2h_2^2}\right]+\left[\frac{u(x_{N-1},y_j)-u(x_N,y_j)}{h_1^2}\right]\\&\qquad+\left(\frac{1}{2}q(x_N,y_j)-\frac{\kappa}{h_1}\right)u(x_N,y_j)=\frac{1}{2}f(x_N,y_j)-\frac{1}{h_1}\gamma(x_N,y_j)\end{aligned}$$

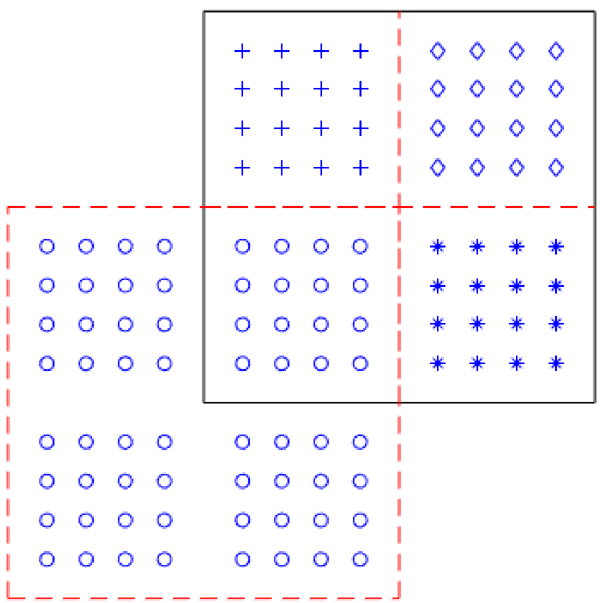
2.4.2 本质边界条件的处理

对于本质边界条件
$$u=\alpha$$
可采用和有限元相同的处理方式，即：

- 对系数矩阵本质边界条件对应的相应行赋值为 0，对角线元素赋值为 1，右端向量相应位置赋值 α
- 消去相应的行 j，右端向量减去 $\alpha A(:,j)$, 去的矩阵第 j 列
- 对系数矩阵本质边界条件对应的相应位置的$A(i,i)$赋大数值，例如令 $A(i,i)=10^{10}$，相应右端向量位置赋值 $b(i)=\alpha 10^{10}$。数值上可得 $u(i)$ 近似为 α。

2.5 由单元刚度矩阵生成系数矩阵

如下图所示，任意矩形单元包含四块对偶区域 由前面讨论可知，对任意顶点其单元刚度矩阵包



含两段线积分及相应的面积法。设左下顶点为 (i,j) 其包含

$$\int_{y_j}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} u(x_{i+\frac{1}{2}},y)\mathrm{d}y + \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial y} u(x,y_{j+\frac{1}{2}})\mathrm{d}x + \int_{G'} qu\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{G'} f\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.3}$$

Remark 2.2. 关系式 (2.3) 并不严格成立，其中

$$-\int_{y_j}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} u(x_i,y)\mathrm{d}y, \quad -\int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial y} u(x,y_j)\mathrm{d}x$$

会在相邻矩形单元中消去，故而形成的系数矩阵依旧与五点差分格式相同。同时也可以将其看做五点差分格式在矩形单元的部分。

Remark 2.3. 以此种方式生成系数矩阵，边界条件的处理比较简单，只需要沿边界做修正即可。令 $A=(x_N,y_j),B=(x_N,y_{j+1}),C=(x_N,y_{j+\frac{1}{2}})$，则边界片段 $\widehat{AB}$ 包含两个对偶片段 $\widehat{AC}$ 和 $\widehat{CB}$。相应的修正为

$$
\begin{aligned}
\int_{y_j}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial x}u(x_N,y)\mathrm{d}y=\int_{y_j}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\left[\gamma-\kappa u(x_N,y)\right]\mathrm{d}y\approx\frac{1}{2}\gamma(x_N,y_j)h_2-\frac{1}{2}\kappa u(x_N,y_j)h_2\\
\int_{y_{j+\frac{1}{2}}}^{y_{j+1}}\frac{\partial}{\partial x}u(x_N,y)\mathrm{d}y=\int_{y_{j+\frac{1}{2}}}^{y_{j+1}}\left[\gamma-\kappa u(x_N,y)\right]\mathrm{d}y\approx\frac{1}{2}\gamma(x_N,y_{j+1})h_2-\frac{1}{2}\kappa u(x_N,y_{j+1})h_2
\end{aligned}
$$

3 作业及练习（基础题目）

令 $\Omega=[0,1]^2$，利用五点差分格式求解如下问题

$$
\begin{cases}
\Delta u+2\pi^2u=2\pi^2xy & \text{in}\,\Omega\\
u(0,y)=0,\qquad u(x,0)=0\\
\partial_x u(1,y)=y-\pi\sin(\pi y)\\
\partial_y u(x,1)=x-\pi\sin(\pi x)
\end{cases}
$$

相应的真解为

$$
u^*=xy+\sin(\pi x)\sin(\pi y)
$$

求数值解的网点 C-范数和 0-范数误差并画出误差图。

Remark 3.1. 作业截止日期为 *2023/05/03-2023/05/17*，将程序代码和实验报告压缩为 *.rar* 文件，文件名为“姓名-微分方程数值解计算实习第十一周作业.*rar*” 发送到邮箱 *yuanxk@jlu.edu.cn*，邮件名称为“姓名-微分方程数值解计算实习第十一周作业”