Lecture 4: 两点边值问题的有限元方法

2023 年 3 月 23 日

1 本次课程内容

- 复习两点边值问题的一次元方法
- 练习及作业：习题2.1.1

2 两点边值问题的有限元方法

- **有限元方法的简介：** 有限元方法实质上是 Ritz-Galerkin 方法。其和传统的 Ritz-Galerkin 方法的主要区别在于它应用样条函数方法提供了一种选取"局部基函数" 或者 "分片多项式空间"的新技巧，从而很大程度上克服了 Ritz-Galerkin 方法选取基函数的固有困难。
  - 系数矩阵的稀疏性
  - 本质边界条件的满足
  - 对解局部的处理
- **有限元方法的基本框架：**
  (1) 把问题转化为变分形式
  (2) 选定单元形状，对求解区域作剖分
  (3) 构造基函数或单元形状函数，生成有限元空间
  (4) 形成有限元方程（Ritz-Galerkin 方程）
  (5) 提供有限元方程的有效解法
  (6) 收敛性及误差估计
- **基于 Galerkin 方法：$\mathbb{P}_1$ 元**
  (2) 选定单元形状，对求解区域作剖分：对区间 I 做剖分 $I = \cup_{i=1}^{n} I_i$，子区间 I_i 的端点记为 x_{i-1}, x_i。
  (3) 构造基函数或单元形状函数生成有限元空间： $u(x_0) = 0$

* 对每个节点 x_i 构造山形函数

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x - x_i}{h_i}, & x_{i-1} \le x \le x_i \\ 1 - \dfrac{x - x_i}{h_{i+1}}, & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \varphi_n(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x - x_n}{h_n} & x_{n-1} \le x \le x_n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

* 考虑试探函数空间 $U_n = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$. 对任意 $u_h \in U_h$ 可表示为

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i(x), \qquad u_i = u_h(x_i).$$

(4) 形成有限元方程：

* 带入双线性形式 $a(u, v)$ 中可得

$$\sum_{i=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j) u_i =< f, \varphi_j >$$

写成矩阵形式，即为

$$\begin{bmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & a(\varphi_2,\varphi_1) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_1) & a(\varphi_n,\varphi_1) \\ a(\varphi_1,\varphi_2) & a(\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_2) & a(\varphi_n,\varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a(\varphi_1,\varphi_{n-1}) & a(\varphi_2,\varphi_{n-1}) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_{n-1}) & a(\varphi_n,\varphi_{n-1}) \\ a(\varphi_1,\varphi_n) & a(\varphi_2,\varphi_n) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_n) & a(\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < f, \varphi_1 > \\ < f, \varphi_2 > \\ \vdots \\ < f, \varphi_{n-1} > \\ < f, \varphi_n > \end{bmatrix}$$

* 通过仿射变换得到 [0, 1] 上的标准山形函数

$$N_0(\xi) = 1 - \xi, \qquad N_1(\xi) = \xi, \qquad \xi = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$$

通过引入标准山形函数将区间 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 上的积分转化为 $[0, 1]$ 上的积分，方便用统一的数值积分公式。

* 生成有限元方程的方式：逐个节点形成系数矩阵或逐个区间(单元刚度矩阵)组装生成系数矩阵。以如下问题为例

$$a(u, v) = \int_a^b \left[pu'v' + quv\right] \mathrm{d}x$$

A. 逐个节点生成系数矩阵：当 $|i - j| \ge 2$, $a(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, 对于 j行的其他元素有

$$a(\varphi_{j-1}, \varphi_j) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[p\varphi_{j-1}'\varphi_j' + q\varphi_{j-1}\varphi_j\right] \mathrm{d}x$$

以及当 $i = j$ 时

$$a(\varphi_j, \varphi_j) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[p\varphi_j'\varphi_j' + q\varphi_j\varphi_j\right] \mathrm{d}x + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[p\varphi_j'\varphi_j' + q\varphi_j\varphi_j\right] \mathrm{d}x$$

以及当 $i=j+1$时

$$a(\varphi_{j+1},\varphi_j)=\int_{x_j}^{x_{j+1}}\left[p\varphi_{j+1}'\varphi_j'+q\varphi_{j+1}\varphi_j\right]\mathrm{d}x$$

缺点：需要知道每个基函数的支集占用的剖分，在高维情形下会导致存储和程序编写的格式不统一。

B. 由单元刚度矩阵组装生成系数矩阵：对于任意区间 $I_j=[x_{j-1},x_j]$ 其包含固定的端点数目2，涉及固定的基函数 φ_{j-1},φ_j。则在系数矩阵 A 中涉及区间 I_j 为 固定的元素 A_{jj},A_{jj-1},A_{j-1j}, 和 A_{j-1j-1}。由此，可以给出统一的存储和程序编写模式。对区间 I_j 具体的操作为：

Step1: 计算四组积分

$$a_1=\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left[p\varphi_{j-1}'\varphi_j'+q\varphi_{j-1}\varphi_j\right]\mathrm{d}x \qquad a_2=\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left[p\varphi_j'\varphi_{j-1}'+q\varphi_j\varphi_{j-1}\right]\mathrm{d}x$$

$$a_3=\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left[p\varphi_j'\varphi_j'+q\varphi_j\varphi_j\right]\mathrm{d}x \qquad a_4=\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left[p\varphi_{j-1}'\varphi_{j-1}'+q\varphi_{j-1}\varphi_{j-1}\right]\mathrm{d}x$$

Step2: 分发到系数矩阵

$$\begin{aligned} A_{j-1j}&=A_{j-1j}+a_1, & A_{jj-1}&=A_{jj-1}+a_2\\ A_{jj}&=A_{jj}+a_3 & A_{j-1j-1}&=A_{j-1j-1}+a_4\end{aligned}$$

优点：一切都是确定的，一切都是统一的，由网格剖分的几何信息 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})$ 即可确定一切。

* 系数矩阵的存储：系数矩阵 A 是稀疏矩阵，当 A 的规模很大是可由如下形式存储：

$$A=\mathrm{sparse}\left(\mathrm{Rows},\mathrm{Cols},\mathrm{Vals}\right)$$

其中 sparse() 是matlab 的内置函数，用来生成稀疏矩阵。向量Rows(i)为矩阵 A 的第 i 个非零元的行号，向量Cols(i)为矩阵 A 的第 i 个非零元的列号，向量Vals(i)为矩阵 A 的第 i 个非零元的值。向量Rows 和 Cols的最后元素为矩阵 A 的大小。
例如，对于3-by-3 矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&-1.2&0.1\\-1&0&0\\0&123&0\end{bmatrix}$$

其对应的向量 Rows, Cols, Vals 为

$$\mathrm{Rows}=[1,1,2,3,3]; \qquad \mathrm{Cols}=[2,3,1,2,3]; \qquad \mathrm{Rows}=[-1.2,0.1,-1,123,0].$$

Remark 2.1. 本门课程中涉及的矩阵规模都很小，不要求用稀疏存储。

2.1 一维 $\mathbb{P}_1$ 有限元的通用算法

3 作业及练习

P_{47} -练习 2.1.1：用线性元在均匀网格下求解边值问题(3.1)的数值解：

$$\begin{aligned} & -y'' + \frac{\pi^2}{4}y = \frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}x, \quad 0 < x < 1 \\ & y(0) = 0, \qquad y'(1) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

要求：

- 画出数值解的图像
- 对[0, 1]区间均匀剖分 $N = 10, 20, 30, ..., 200$ 份，计算其和真解

  $$u^* = \sin\frac{\pi}{2}x$$

  的 $L^2([0,1])$ 误差和 $H^1([0,1])$ 误差，计算其关于网格长度$h = 1/N$ 的数值收敛阶和系数矩阵条件数，并用 loglog() 函数作图表示。
- 作业截止日期为 2023-03-29 日，将程序代码和实验报告压缩为 .rar 文件，文件名为“姓名-微分方程数值解计算实习作业 3.rar” 发送到邮箱 yuanxk@jlu.edu.cn。

Remark 3.1. 数值求积公式可以用复化 *Simpson* 公式：将$[a,b]$分为$n = 2m$等份，令

$$h = \frac{b-a}{n},\ x_j = a + jh,\ f_j = f(x_j),\ j = 0, 1, ..., n,$$

则复化*Simpson*公式为：

$$I_n(f) = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 4f_{n-3} + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right).$$

Remark 3.2. 收敛阶的数值计算公式：设误差随网格长度 h 的收敛阶为 $C(h^\alpha)$, 其中C 于步长无关。对步长 h_1, h_2 计算数值误差 e_1, e_2, 则有

$$\log e_1 = \log C + \alpha \log h_1, \qquad \log e_2 = \log C + \alpha \log h_2$$

进而可得

$$\alpha = \frac{\log e_1 - \log e_2}{\log h_1 - \log h_2}.$$

表 1: 一维 $\mathbb{P}_1$ 有限元的通用算法

Step 1: 初始化矩阵和向量 $A = zeros(n,n), b = zeros(n,1)$

Step 2: 网格剖分，记录网格信息： $\boldsymbol{p}(i) = x_i, \quad I(:,i) = [i_1, i_2]$

Step 3: 构造基函数 $\{\varphi_i\}$，一维情形下为山形函数

Step 4: 形成有限元方程：

确定数值积分公式 $\int_0^1 f(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \sum\limits_{k=1}^{m} w_k f(\xi_k)$

For $i = 1:1:n$

$x_{i_1} = \boldsymbol{p}(I(1,i)), \quad x_{i_2} = \boldsymbol{p}(I(2,i)), \quad h_i = x_{i_2} - x_{i_1}$

构造仿射变换: $N_0(\xi) = 1-\xi, \quad N_1(\xi) = \xi, \quad \xi = \frac{x - x_{i_1}}{h_i}$

/* 以 $a(u,v) = \int_a^b [pu'v' + quv]\,\mathrm{d}x$ 为例展示 */

$$a_1 \approx \sum_{k=1}^{m} w_k \left[-h_i^{-1} p(x_{i_1} + h_i\xi_k) + h_i q(x_{i_1} + h_i\xi_k)(1-\xi_k)\xi_k\right]$$
$$a_2 \approx \sum_{k=1}^{m} w_k \left[-h_i^{-1} p(x_{i_1} + h_i\xi_k) + h_i q(x_{i_1} + h_i\xi_k)(1-\xi_k)\xi_k\right]$$
$$a_3 \approx \sum_{k=1}^{m} w_k \left[h_i^{-1} p(x_{i_1} + h_i\xi_k) + h_i q(x_{i_1} + h_i\xi_k)\xi_k^2\right]$$
$$a_4 \approx \sum_{k=1}^{m} w_k \left[h_i^{-1} p(x_{i_1} + h_i\xi_k) + h_i q(x_{i_1} + h_i\xi_k)(1-\xi_k)^2\right]$$
$$b_1 \approx \sum_{k=1}^{m} w_k \left[h_i f(x_{i_1} + h_i\xi_k)(1-\xi_k)\right], \qquad b_2 \approx \sum_{k=1}^{m} w_k \left[h_i f(x_{i_1} + h_i\xi_k)\xi_k\right]$$

组装系数矩阵

$$\begin{aligned} A_{i_1 i_2} &= A_{i_1 i_2} + a_1, \qquad A_{i_2 i_1} = A_{i_2 i_1} + a_2, \qquad b_{i_1} = b_{i_1} + b_1 \\ A_{i_2 i_2} &= A_{i_2 i_2} + a_3, \qquad A_{i_1 i_1} = A_{i_1 i_1} + a_4, \qquad b_{i_2} = b_{i_2} + b_2 \end{aligned}$$

End

Step 5: 求解系数矩阵 $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{u} = A \backslash \boldsymbol{b}$

Step 6: 求得有限元解 $u_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \boldsymbol{u}(i)\varphi_i(x)$