有限元一维编程

August 30, 2022

目录

问题描述

- 原方程

$$\begin{cases} -u'' = sinx, x \in [0, 2\pi]; \\ u'(0) = 1, u(2\pi) = 0. \end{cases}$$

- 弱形式

Find $u \in H^1_{E0}(0, 2\pi) = \{v \in H^1(0, 2\pi), v(2\pi) = 0\}$ such that

$$\int_0^{2\pi} u'v'dx = \int_0^{2\pi} vsinxdx - u'(0)v(0), \quad \forall v \in H^1_{E0}(0, 2\pi).$$

网格剖分

- $x_1, \ldots, x_5$ 剖分节点
- $\phi_1, \ldots, \phi_5$ 分片线性基函数，它们张成的空间为V^h
- $V_{E0}^h := \{v \in V^h, v(2\pi) = 0\}$

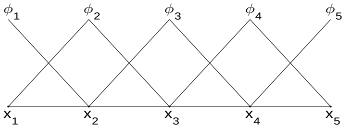

Figure: 一维网格剖分和基函数

离散弱形式

Find $u_h \in V_{E0}^h$ such that

$$\int_0^{2\pi} u_h' v_h' dx = \int_0^{2\pi} v_h sinx dx - u_h'(0) v_h(0), \quad \forall v_h \in V_{E0}^h.$$

生成刚度矩阵

仍然以刚才的网格剖分为

例$u_h = u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + \cdots + u_5\phi_5$，$A = \{a_{ij}\}$，其中

$$a_{ij} = (\phi_j', \phi_i')_\Omega = \sum_{k=1}^{4} (\phi_j', \phi_i')_{T_k} =: \sum_{k=1}^{4} a_{ij}^k.$$

T_k表示第k个剖分单元。具体的例子如下

$$\begin{aligned}
a_{11} &= a_{11}^1 \\
a_{12} &= a_{12}^1 \\
a_{21} &= a_{21}^1 \\
a_{22} &= a_{22}^1 \quad + a_{22}^2 \\
&\vdots \\
a_{54} &= \qquad\qquad\qquad a_{54}^4 \\
a_{55} &= \qquad\qquad\qquad a_{55}^4
\end{aligned}$$

我们按剖分单元的循环求刚度矩阵, 例如循环到第1个剖分单元时

$$a_{11}+=a_{11}^{1},\quad a_{12}+=a_{12}^{1},\quad a_{21}+=a_{21}^{1},\quad a_{22}+=a_{22}^{1}$$

即将局部刚度矩阵加入到整体刚度矩阵A的相应的位置

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{1} & a_{12}^{1} \\ a_{21}^{1} & a_{22}^{1} \end{pmatrix} \rightarrow A$$

当把剖分单元循环完毕，可以得到刚度矩阵A.

生成右端

仍然以刚才的网格剖分为例, $F=\{F_i\}$, 其中

$$
\begin{aligned}
F_i &= (\phi_i, sinx)_\Omega - u_h'(0)\phi_i(0) \\
&= \sum_{k=1}^{4} (\phi_i, sinx)_{T_k} - u_h'(0)\phi_i(0) \\
&= \sum_{k=1}^{4} F_i^k - u_h'(0)\phi_i(0)
\end{aligned}
$$

这里, T_k 表示第k个剖分单元.

具体表示如下:

$$\begin{array}{rclllll}
F_1 & = & F_1^1 & +0 & +0 & +0 & -u_h'(0) \\
F_2 & = & F_2^1 & +F_2^2 & +0 & +0 & +0 \\
F_3 & = & 0 & +F_3^2 & +F_3^3 & +0 & +0 \\
F_4 & = & 0 & +0 & +F_4^3 & +F_4^4 & +0 \\
F_5 & = & 0 & +0 & +0 & +F_5^4 & +0
\end{array}$$

按剖分单元循环来组装右端，先不要考虑边值条件项$u_h'(0)$. 以第一个单元为例，

- $T_1 : F_1 += F_1^1, \ F_2 += F_2^1$
- $T_2 : F_2 += F_2^2, \ F_3 += F_3^2$

- $T_3 : F_3+ = F_3^3,\ F_4+ = F_4^3$
- $T_4 : F_4+ = F_4^4,\ F_5+ = F_5^4$

最后再把$u_h'(0)$ 加入F_1 中

$$F_1- = u_h'(0)$$

这样右端生成完毕.

应用边值条件

在上一节中得到了刚度矩阵A和右端向量F，但是方程组$AU=F$，即

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{15}u_5 = f_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{25}u_5 = f_2 \\ \vdots \\ a_{51}u_1 + a_{52}u_2 + \cdots + a_{55}u_5 = f_5 \end{cases}$$

的解不唯一，因此加入边值条件使解唯一。以Dirichlet边值为例，提供三种思路:

- 思路一
  原方程做变换

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{15}u_5 = f_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{25}u_5 = f_2 \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + \cdots + a_{35}u_5 = f_3 \\ a_{41}u_1 + a_{42}u_2 + \cdots + a_{45}u_5 = f_4 \\ 1 \cdot u_5 = 0 \end{cases}$$

然后求解一个5维方程组得到未知量u_1, u_2, u_3, u_4, u_5。

- 思路二
  在上面的方程组中，u_i中，u_1, u_2, u_3, u_4是未知的，我们选取第1,2,3,4个方程，把已知项放到右端

$$
\begin{cases}
a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + a_{14}u_4 = f_2 - a_{15}u_5 \\
a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 + a_{24}u_4 = f_2 - a_{25}u_5 \\
a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 + a_{34}u_4 = f_3 - a_{35}u_5 \\
a_{41}u_1 + a_{42}u_2 + a_{43}u_3 + a_{44}u_4 = f_4 - a_{45}u_5
\end{cases}
$$

然后求解一个三维维方程组得到u_1, u_2, u_3, u_4。

- 思路三
  用$Inf = 10^{15}$表示一个比较大的数,,原方程做变换

$$
\begin{cases}
a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{15}u_5 = f_1 \\
a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{25}u_5 = f_2 \\
a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + \cdots + a_{35}u_5 = f_3 \\
a_{41}u_1 + a_{42}u_2 + \cdots + a_{45}u_5 = f_4 \\
a_{51}u_1 + a_{52}u_2 + \cdots + (Inf + a_{55})u_5 = f_5 + Inf \cdot 0
\end{cases}
$$

然后求解一个5维方程组得到未知量u_1, u_2, u_3, u_4, u_5。

求解，计算误差和画图

- 求解
  这里用A和F表示应用边值条件以后的刚度矩阵和右端向量，则

$$U = A \setminus F$$

- 计算误差
  u表示真解，u_h表示数值解，误差$e_h = u - u_h$的范数

$$\|e_h\|_0^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (e_h, e_h)_K,$$

$$\|e_h\|_1^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [(e_h, e_h)_K + (e_h', e_h')_K].$$

- 画图

$$plot(x, u_h);$$

收敛阶

假设$\|e_h\|_0 = Ch^r$，h表示网格剖分的最大边。当最大边取h时，误差的L^2范数为$\|e_1\|_0 = Ch^r$，当最大边去$h/2$时，误差的L^2范数为$\|e_2\|_0 = C(h/2)^r$，则

$$\frac{\|e_1\|_0}{\|e_2\|_0} = \frac{Ch^r}{C(h/2)^r} = 2^r,$$

那么，L^2范数的收敛阶r可表示为

$$r = log_2(\frac{\|e_1\|_0}{\|e_2\|_0}).$$

同理，H_1范数的收敛阶r可表示为

$$r = log_2(\frac{\|e_1\|_1}{\|e_2\|_1}).$$