一维有限元刚度矩阵条件数估计

朱荃凡 10200321

(吉林大学数学系计算专业)

2023 年 3 月 28 日

1 正文

对于区间 $[a,b]$ 上的有限元问题, 首先要做一个网格剖分:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b,$$

并记 $h_i = x_i - x_{i-1}(1 \leq i \leq N)$, $h = \max\limits_{1\leq i\leq N} h_i$. 这个剖分不一定要等距, 但必须一致, 也就是存在 $\beta > 0$, 使得任意剖分中

$$\beta h_i \geq h,\ \forall 1 \leq i \leq N.$$

设 $\varphi_i(x)$ 为节点 x_i 处的基函数, 即:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & others. \end{cases}$$

注意区间端点处的基函数只有半支. 用 $(\cdot,\cdot)$ 表示函数内积, 那么可以计算出

$$(\varphi_i, \varphi_i) = \begin{cases} \dfrac{h_1}{3}, & i = 0, \\ \dfrac{h_N}{3}, & i = N, \\ \dfrac{h_i + h_{i+1}}{3}, & others. \end{cases}$$

并且当 $i \neq j$ 时, 有

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} \dfrac{h_{i+1}}{6}, & j = i+1, 0 \leq i \leq i-1, \\ 0, & others. \end{cases}$$

设有限元问题中双线性函数为 $a(u,v)$. 那么刚度矩阵 A 可以被表示为

$$A = \begin{pmatrix} a(\varphi_0,\varphi_0) & a(\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & a(\varphi_0,\varphi_N) \\ a(\varphi_1,\varphi_1) & a(\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & a(\varphi_1,\varphi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_N,\varphi_1) & a(\varphi_N,\varphi_1) & \cdots & a(\varphi_N,\varphi_N) \end{pmatrix}.$$

为了估计该矩阵的条件数 $\kappa(A)$, 我们需要如下两个引理:

引理 1.1 (Inverse estimation)**.** *设 U_h 表示有限元空间, 存在与 h 无关的常数 $C > 0$, 使得任意的 $v \in U_h$, 有如下的不等式成立:*

$$||u||_{H^1(\Omega)} \leq C||u||_{L^2(\Omega)}.$$

引理 1.2. *对于任意的 $u = \sum_{i=0}^{N} \eta_i \varphi_i \in U_h$, 存在与 h 无关的正常数 C 和 c, 使得:*

$$ch|\eta|^2 \leq ||u||^2_{L^2(\Omega)} \leq Ch|\eta|^2.$$

证明 由先前的计算可知

$$\begin{aligned} ||u||^2_{L^2(\omega)} &= (\sum_{i=0}^{N} \eta_i \varphi_i, \sum_{i=0}^{N} \eta_i \varphi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{3} h_i(\eta^2_{i-1} + \eta^2_i) + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{6} h_i(\eta_{i-1}\eta_i) \end{aligned}$$

一方面

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{3} h_i(\eta^2_{i-1} + \eta^2_i) + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{6} h_i(\eta_{i-1}\eta_i) &\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{5}{12} h_i(\eta^2_{i-1} + \eta^2_i) \\ &< \frac{5}{12} h(2\sum_{i=1}^{N} \eta^2_i) \\ &= \frac{5}{6}|\eta|^2. \end{aligned}$$

另一方面, 由剖分的一致性可知

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{3} h_i(\eta^2_{i-1} + \eta^2_i) + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{6} h_i(\eta_{i-1}\eta_i) &\geq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4} h_i(\eta^2_{i-1} + \eta^2_i) \\ &> \frac{1}{4}\beta h(\sum_{i=1}^{N} \eta^2_i) \\ &= \frac{1}{4}\beta|\eta|^2. \end{aligned}$$

故可取 $C = \frac{5}{6},\ c = \frac{1}{4}\beta$. □

接下来我们就可以估计条件数 $\kappa(A)$ 的发散速度.

定理 1.3. *一维有限元一致剖分下的刚度矩阵条件数 $\kappa(A) \leq Ch^{-2}$.*

证明 首先不难证明 A 是对称正定矩阵. 其次, 对于 $u = \sum_{i=0}^{N} \eta_i \varphi_i \in U_h$, 有

$$a(u, u) = \eta^T A \eta,$$

于是根据上述两个引理以及 $a(\cdot,\cdot)$ 的连续性

$$\eta^T A\eta = a(u,u) \leq C||u||_{H^1(\Omega)}^2 \leq Ch^{-2}||u||_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ch^{-1}|\eta|^2, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

另一方面, 根据引理 1.1 和 $a(\cdot,\cdot)$ 的正定性

$$\eta^T A\eta = a(u,u) \geq c||v||_{L^2(\Omega)}^2 \geq ch|\eta|^2, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

两式结合在一起说明存在 C 和 c 使得

$$\lambda_{\max} \leq Ch^{-1}, \qquad \lambda_{\min} \geq ch.$$

这就得到了我们想要的结果

$$\kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \leq Ch^{-2}.$$

□