Lecture 2: 变分形式 Ritz-Galerkin 方法

2023 年 3 月 8 日

1 本次课程内容

- 作业1：复化 Simpson 公式
- 复习 Ritz-Galerkin 方法
- 练习及作业：算例1.4.1并比较两种基函数

2 作业回顾

- 示例程序
- 作业中共性问题
  - 收敛阶的计算（方法一）：若 $e(h) := |I_h(f) - I(f)| = Ch^\alpha$，取 h_1, h_2, 有

$$\begin{aligned} &\log e(h_1) - \log e(h_2) = [\log C + \alpha \log h_1] - [\log C + \alpha \log h_2] \\ \Rightarrow \quad &\alpha = \frac{\log e(h_1) - \log e(h_2)}{\log h_1 - \log h_2}. \end{aligned}$$

  - 收敛阶的计算（方法二）：若$e(h) = Ch^\alpha$，但是真解未知，可取 h_1, h_2 以及充分小 h_0，令

$$t(h) := |I_h(f) - I_{h_0}(f)| \quad \Rightarrow \quad 0 < e(h) - e(h_0) < t(h) < e(h) + e(h_0).$$

可得上界估计：

$$\begin{aligned} \frac{\log t(h_1) - \log t(h_2)}{\log h_1 - \log h_2} \quad &\leq \quad \frac{\log\left(e(h_1) + e(h_0)\right) - \left(\log e(h_2) - e(h_0)\right)}{\log h_1 - \log h_2} \\ &\leq \quad \frac{\log \frac{e(h_1)}{e(h_2)} + \log\left(1 + \frac{e(h_0)}{e(h_1)}\right) - \log\left(1 - \frac{e(h_0)}{e(h_2)}\right)}{\log \frac{h_1}{h_2}} \\ &\leq \quad \alpha + \frac{\frac{e(h_0)}{e(h_1)} + \frac{e(h_0)}{e(h_2)} + O\left(\left(\frac{e(h_0)}{e(h_1)}\right)^2 + \left(\frac{e(h_0)}{e(h_2)}\right)^2\right)}{\log \frac{h_1}{h_2}} \leq \alpha + O\left(\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^\alpha + \left(\frac{h_0}{h_2}\right)^\alpha\right) \end{aligned}$$

– 实验报告内容：实验设计介绍（如，实验参数的选择方式），实验结果展示（如，图像的意义），实验结果讨论（如，是否与理论结果相匹配）

– format long

- 问题2 收敛阶

证明. 令 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-3.5}, x\neq 0$. 对给定的 $n=2m, h=\frac{1}{n}$, 有

$$\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x=\int_0^{2h}\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_{2h}^1\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

由复化 Simpson 公式可得

$$I_n(f)=\frac{h}{3}\left(f_0+4f_1+f_2\right)+\sum_{j=2}^{m}\frac{h}{3}\left(f_{2j-2}+4f_{2j-1}+f_{2j}\right).$$

由于 $f\in C^4([2h,1])$，利用（P145, 《数值分析(下册)》），可得

$$\begin{aligned}&\int_{2h}^1\sqrt{x}\mathrm{d}x-\sum_{j=2}^{m}\frac{h}{3}\left(f_{2j-2}+4f_{2j-1}+f_{2j}\right)\\ =\ &-\sum_{j=2}^{m}\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta_j)=\sum_{j=2}^{m}\frac{h^5}{96}\eta_j^{-3.5}\leq\sum_{j=2}^{m}\frac{h^{1.5}}{96}\left(\frac{1}{2j}\right)^{3.5}\leq C_1h^{1.5},\end{aligned}$$

其中 $\eta_j\in(x_{2j-2},x_{2j})$. 同理可得残差下界

$$\begin{aligned}&\int_{2h}^1\sqrt{x}\mathrm{d}x-\sum_{j=2}^{m}\frac{h}{3}\left(f_{2j-2}+4f_{2j-1}+f_{2j}\right)\\ =\ &-\sum_{j=2}^{m}\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta_j)=\sum_{j=2}^{m}\frac{h^5}{96}\eta_j^{-3.5}\geq\sum_{j=2}^{m}\frac{h^{1.5}}{96}\left(\frac{1}{2j+2}\right)^{3.5}\geq C_2h^{1.5}.\end{aligned}$$

对于剩余项

$$\begin{aligned}&\int_0^{2h}\sqrt{x}\mathrm{d}x-\frac{h}{3}\left(f_0+4f_1+f_2\right)\\ =\ &\frac{2}{3}(2h)^{1.5}-\frac{h}{3}\left(0+4\sqrt{h}+\sqrt{2h}\right)=\frac{h^{1.5}}{3}\left(2^{2.5}-4-\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

整理可得

$$\left|\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x-I_n(f)\right|=O(h^{1.5}).$$

□

3 Ritz-Galerkin 方法复习

- 核心思想是用有限维空间去逼近无穷维的解空间
- Ritz 方法：假设 U_n 是 U 的 n-维子空间，$\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ 为 U_n 的一组基底。U_n 中的任意元素可表示为
$$u_n = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i$$
带入二次泛函
$$J(u_n) = \frac{1}{2}a(u_n, u_n) - (f, u_n),$$
令
$$\frac{\partial J(u_n)}{\partial c_i} = 0$$
可得线性方程组
$$\sum_{i=1}^n a(\varphi_i, \varphi_j)c_i = (f, \varphi_j), \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$
- Galerkin 方法：求系数 c_i 使得 u_n 关于 $v \in U_n$ 满足
$$a(u_n, v) = (f, v), \qquad \forall v \in U_n.$$
或者
$$\sum_{i=1}^n a(\varphi_i, \varphi_j)c_i = (f, \varphi_j), \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$
- 系数矩阵为 $A(i,j) = a(\varphi_j, \varphi_i)$.
- Ritz 和 Galerkin 方法对比：
  - Ritz 方法基于极小位能原理，其力学意义明显，但是要求双线性形式 $a(u,v)$ 对称正定
  - Galerkin 方法更为灵活，不要求 $a(u,v)$ 对称正定，甚至试探函数空间和检验函数空间可以不相同，为问题求解提供了更多的自由度
- 关于 Ritz-Galerkin 方法中子空间选择的讨论：
  - U_n 的基底 $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ 应易于构造和计算
  - 系数矩阵 A 应易于生成，最好是稀疏的、条件数稳定的
  - 由定理 1.4.1
  $$\|u - u_n\|_1 \le \beta \inf_{v\in U_n} \|u - v\|_1$$
  U_n 空间中应包含对 u 的良好近似
  - 试探函数空间 U_n 应尽量具有通用性

4 练习及作业内容：

测试不同基函数对求解的影响：例1.4.1

$$\begin{cases} u'' + u = -x, 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

取基函数为

$$\varphi_i(x) = \sin(\mathrm{i}\,\pi x) \quad 以及 \quad \varphi_i = (1-x)x^i, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

1 对比两组基函数对应的系数矩阵的条件数随着 N 增加产生的变化 (Cond(A, 2))。

2 画图对比两组基函数对应的数值解和精确解

$$u_*(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$$

之间的$L^2([0,1])$误差:

$$err = \left[\int_0^1 (u_*(x) - u_n(x))^2 \,\mathrm{d}x\right]^{1/2}.$$

随着 N 增加产生的变化。

- 将程序代码和数值实验报告压缩为 "姓名+学号.rar" 发送到邮箱 yuanxk@jlu.edu.cn，邮件主题为 "微分方程数值解计算实习课后作业2+姓名"。截止时间 2023-3-15。

Remark 4.1. *系数矩阵和右端项为*

$$A(i,j) = \int_0^1 \left[\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) - \varphi_i(x)\varphi_j(x)\right] \mathrm{d}x, \qquad b(i) = -\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x.$$

当取第一种基底时：

$$A(i,j) = \frac{1}{2}\left[(i\pi)^2 - 1\right]\delta(i,j), \qquad b(i) = -\frac{1}{i\pi}\cos i\pi$$

当取第二种基底时：

$$\begin{cases} A(i,j) = \dfrac{ij}{i+j-1} - \dfrac{2ij+i+j}{i+j} + \dfrac{ij+i+j}{i+j+1} + \dfrac{2}{i+j+2} - \dfrac{1}{i+j+3} \\ b(i) = \dfrac{1}{i+2} - \dfrac{1}{i+3}. \end{cases}$$

Remark 4.2. L^2 *误差可在充分小的步长下利用复化Simpson公式求解。*

微分方程数值解计...

群号：691643259

扫一扫二维码，加入群聊。