微分方程数值解计算实习 Lecture 8

朱荃凡

(吉林大学数学系计算唐班)

2023 年 5 月 5 日

1 问题重述

用线性元在均匀网格下求解边值问题(1.1)的数值解:

$$\begin{aligned} & -y'' + \frac{\pi^2}{4}y = \frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}x,\ 0 < x < 1, \\ & y(0) = 0, \qquad y'(1) = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

要求:

- 用直接差分法的差分格式生成内点矩阵
- 对边界条件分别采用向后差商，中心差商和基于有限体积法的中矩形公式
- 对 $[0,1]$ 区间均匀剖分成 $N = 10, 20, 30, \cdots, 200$ 份, 计算数值解和真解

  $$u* = \sin\frac{\pi}{2}x$$

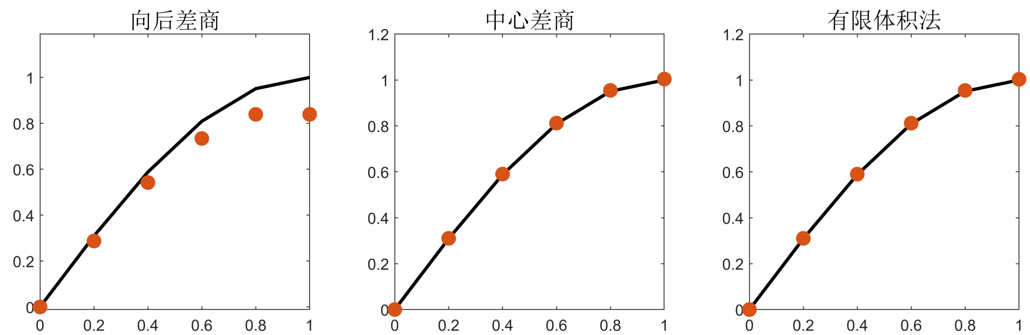
  的 $||\cdot||_C, ||\cdot||_0, ||\cdot||_1$ 误差, 计算其关于网格长度 $h = 1/N$ 的数值收敛阶, 并用 loglog() 函数作图表示.

2 程序结果

相较于有限元方法, 差分方法在原理和编程上都会简单不少. 下面展示了这次数值程序的结果.

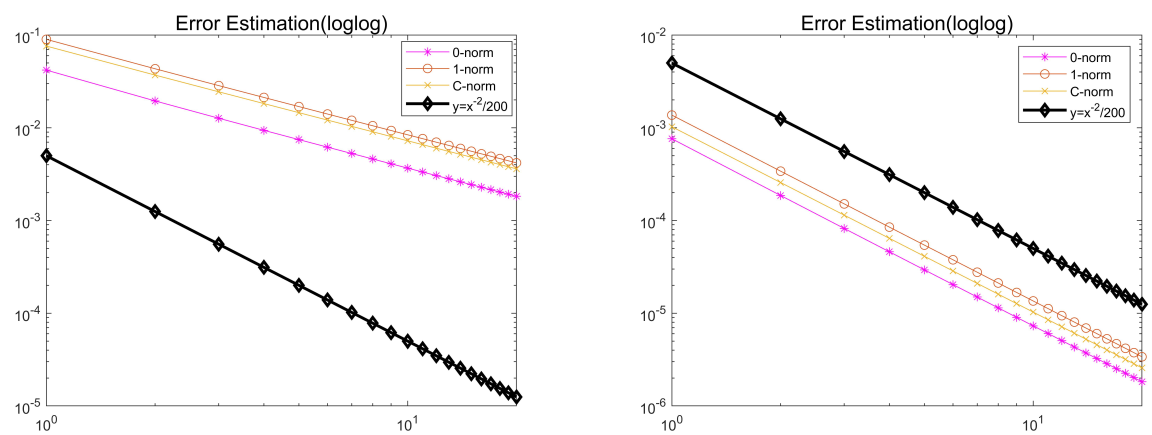
2.1 数值解图像

这里展示了剖分数 $N = 5$ 时三种不同边值条件下的数值解图像. 中心差分法和有限体积法都有不错的精度, 相比之下, 向后差分法差上一些:



2.2 误差和收敛阶

取剖分数 $N = 10n(1 \leq n \leq 20)$, 分别计算 $||\cdot||_C$, $||\cdot||_0$ 和 $||\cdot||_1$ 误差. 左图使用了向后差商的边值处理方法, 右图使用了中心差商的边值处理方法.



其中黑线表示 $y = \dfrac{x^{-2}}{200}$ 的方程. 其中比较奇怪的一点是, 相同差分格式下, $||\cdot||_1$ 误差会比 $||\cdot||_0$ 低一阶, 这里却相等了. 目前不清楚为什么.