Lecture 6：二维矩形元空间中的 Lagrange 型元

2023 年 4 月 6 日

1 本次课程内容

- 作业中问题
- 乘积型 Lagrange 型元算法
- 作业及练习

2 作业中问题

数值积分公式要在子区间上使用，且数值积分公式的精度要高于有限元的精度

3 Lagrange 型元

3.1 有限元方法的基本框架：

(1) 把问题转化为变分形式

(2) 选定单元形状，对求解区域作剖分

(3) 构造基函数或单元形状函数，生成有限元空间

(4) 形成有限元方程（Ritz-Galerkin 方程）

(5) 提供有限元方程的有效解法

(6) 收敛性及误差估计

3.2 Step 2: 区域网格剖分

若假设区域 G 可以分割成有限个互不重叠矩形的和，且每个小矩形的边和坐标轴平行。任意两个矩形，或者不相交，或者有公共的边或公共的顶点。我们把每个小矩形叫作单元，称如此的分割为矩形剖分。

- 物理节点的坐标：$\boldsymbol{p}(i) = [x_i, y_i]^\top$
- 矩形单元节点信息：$\boldsymbol{I}(i) = [i_1, i_2, i_3, i_4]^\top$
- 边界信息：$\boldsymbol{E}(i) = [i_1, i_2, k]$， k 代表其所属的边界
- 矩形单元上的广义坐标：$\boldsymbol{G}(i)$

3.3 Step 3: Lagrange 型有限元

由单元刚度矩阵生成系数矩阵的过程中，只需要标准形状上的基函数。对于矩形上的 Lagrange 型基函数可以通过一维 Lagrange 基函数的乘积得到。

- 单位正方形上的双线性基底

$$\begin{cases} N_{ij}(\xi,\eta) = \tilde{N}_i(\xi)\tilde{N}_j(\eta), \quad \partial_\xi N_{ij}(\xi,\eta) = \tilde{N}_i'(\xi)\tilde{N}_j(\eta) \\ \tilde{N}_0(\xi) = \xi, \quad \tilde{N}_1(\xi) = 1-\xi \end{cases}$$

  其广义坐标的维数和物理网格节点的个数相同。

- 单位正方形上的双二次基底

$$\begin{cases} N_{ij}(\xi,\eta) = \tilde{N}_i(\xi)\tilde{N}_j(\eta), \quad \partial_\xi N_{ij}(\xi,\eta) = \tilde{N}_i'(\xi)\tilde{N}_j(\eta) \\ \tilde{N}_0(\xi) = (2\xi-1)(\xi-1) \quad \tilde{N}_{\frac{1}{2}}(\xi) = 4\xi(1-\xi) \quad \tilde{N}_1(\xi) = (2\xi-1)\xi \end{cases}$$

  广义坐标包含矩形的中心点和边的中点，其维数高于物理网格节点的个数。

- 单位刚度矩阵包含 81 个元素，在形成单元刚度矩阵时要做适当处理。为了后面生成单元刚度矩阵方便起见，建议将 N_{ij} 的二维角标排序为一维角标仍记为 N_i。

3.4 Step 4: 形成线性方程组

3.4.1 Step 4.1:数值积分公式和仿射变换

- 对于单位正方形区域上的数值积分可以由 [0, 1] 区间上的数值积分得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta &= \int_0^1 \left[\int_0^1 f(\xi,\eta)\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\xi \\ &\approx \int_0^1 \left[\sum_{s=1}^n w_s^{(1)} f(\xi,\eta_s)\right]\mathrm{d}\xi \approx \sum_{t=1}^m w_t^{(2)} \left[\sum_{s=1}^n w_s^{(1)} f(\xi_t,\eta_s)\right] \end{aligned} \tag{3.1}$$

  Remark 3.1. 可考虑使用 *cell* 函数增加可读性。

- 仿射变换

$$x = x_i + \xi\Delta x, \qquad y = y_i + \eta\Delta y$$

3.4.2 Step 4.2: 形成单元刚度矩阵

以如下变分问题为例

$$a(u,v)=\int_\Omega [p(x,y)uv+q_1(x,y)\partial_x u\partial_x v+q_2(x,y)\partial_y u\partial_y v]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Omega f(x,y)v\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

通过仿射变换将在子区间 I_i 上的积分转化为单位正方形 I_0 上的积分

$$\begin{aligned}&\int_{I_i}[p(x,y)\varphi_i\varphi_j+q_1(x,y)\partial_x\varphi_i\partial_x\varphi_j+q_2(x,y)\partial_y\varphi_i\partial_y\varphi_j]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{I_0}\Big[p(x_0+h_x\xi,y_0+h_y\eta)N_iN_j+\frac{1}{h_x^2}q_1(x_0+h_x\xi,y_0+h_y\eta)\partial_\xi N_i\partial_\xi N_j\\&\quad+\frac{1}{h_y^2}q_2(x_0+h_x\xi,y_0+h_y\eta)\partial_\eta N_i\partial_\eta N_j\Big]h_xh_y\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

利用数值积分(3.1) 对上式进行计算，所需要的数据仅为

$$\begin{aligned}&x_0,\quad y_0,\quad h_x,\quad h_y,\quad p(x_0+h_x\xi_s,y_0+h_y\eta_t),\quad q_1(x_0+h_x\xi_s,y_0+h_y\eta_t)\\&q_2(x_0+h_x\xi_s,y_0+h_y\eta_t),\quad N_i(\xi_s,\xi_t),\quad \partial_\xi N_i(\xi,\eta),\quad \partial_\eta N_i(\xi,\eta)\end{aligned}$$

3.4.3 Step 4.3: 形成系数矩阵

通过广义坐标 G 将单元刚度矩阵分发到系数矩阵和右端向量的相应位置

3.4.4 Step 4.4: 自然边界条件和本质边界条件的处理

假设所考虑问题满足边界条件

$$\Delta u=0,\qquad \begin{cases}u=0 & \text{on}\,\Gamma_1\cup\Gamma_4\\ \partial_x u=g_1 & \text{on}\,\Gamma_2\\ \partial_y u=g_2 & \text{on}\,\Gamma_3\end{cases}$$

- 自然边界条件的处理：对右端向量更新

  $$-\int_{\Gamma_2}g_1(x,y)v\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\Gamma_3}g_2(x,y)v\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

  由边界信息矩阵 $\boldsymbol{E}$ 生成单位边界向量，通过 $\boldsymbol{E}$ 的第三个分量确定边界编号。对其处理和一维问题相同，通过仿射变换转换到 $[0,1]$ 区间上计算。

- 本质边界条件的处理：
  - 对系数矩阵和右端向量本质边界条件对应的相应行赋值为 0，对角线元素赋值为 1
  - 消去相应的行列
  - 对系数矩阵本质边界条件对应的相应位置的$A(i,i)$赋大数值，例如令 $A(i,i)=10^{10}$，数值上可得 $u(i)$ 近似为 0。

3.5 Step 5: 有限元方程的求解

3.6 Step 6: 数值误差计算

数值误差的计算依旧在每个单元上进行，通过仿射变换在单位正方形上进行求解。以 $L^2(\Omega)$ 范数为例

$$\int_{\Omega}|u_h-u^*|^2\mathrm{d}x\mathrm{dy}=\sum_{\mathrm{i}}\int_{\mathrm{I_i}}|\mathrm{u_h(x,y)-u^*(x,y)}|^2\mathrm{dxdy}$$
$$=\sum_i\int_{I_0}|u_h(x_0+h_x\xi,y_0+h_y\eta)-u^*(x_0+h_x\xi,y_0+h_y\eta)|^2h_xh_y\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$
$$=\sum_i\int_{I_0}\left|\sum_j u(G(j,i))N_j(\xi,\eta)-u^*(x_0+h_x\xi,y_0+h_y\eta)\right|^2h_xh_y\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

而 I_0 上的积分可由数值积分公式得出。

4 作业及练习（基础题目）

令 $\Omega=[0,1]^2$，利用 Lagrange 双线性元求解如下问题

$$\begin{cases}\Delta u+2\pi^2u=2\pi^2xy & \text{in}\,\Omega\\ u(0,y)=0,\qquad u(x,0)=0\\ \partial_xu(1,y)=y-\pi\sin(\pi y)\\ \partial_yu(x,1)=x-\pi\sin(\pi x)\end{cases}$$

相应的真解为

$$u^*=xy+\sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

求数值解的 L^2 和 H^1 误差以及条件数随剖分步长的变换并画图。

Remark 4.1. *作业截止日期为 2023-04-12/2023-04-19 日，将程序代码和实验报告压缩为 .rar 文件，文件名为“姓名-微分方程数值解计算实习第六周作业.rar” 发送到邮箱 yuanxk@jlu.edu.cn，邮件名称为“姓名-微分方程数值解计算实习第六周作业”*