

math

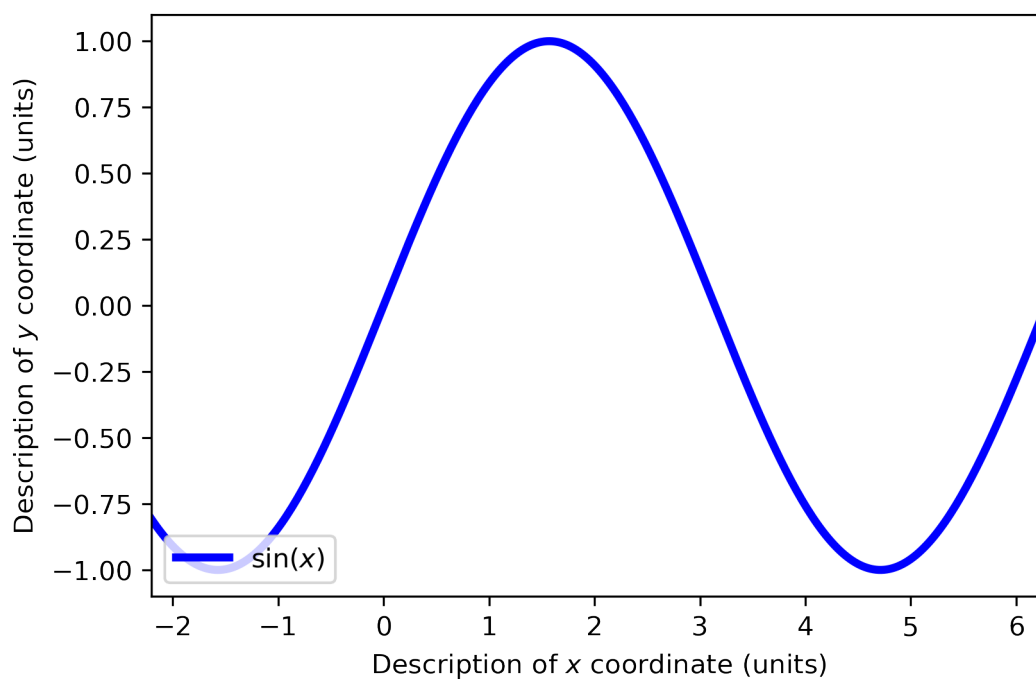
2020 年 11 月 19 日

## 1 函数

### 1.1 函数的变换

对于函数

$$y = f(x)$$



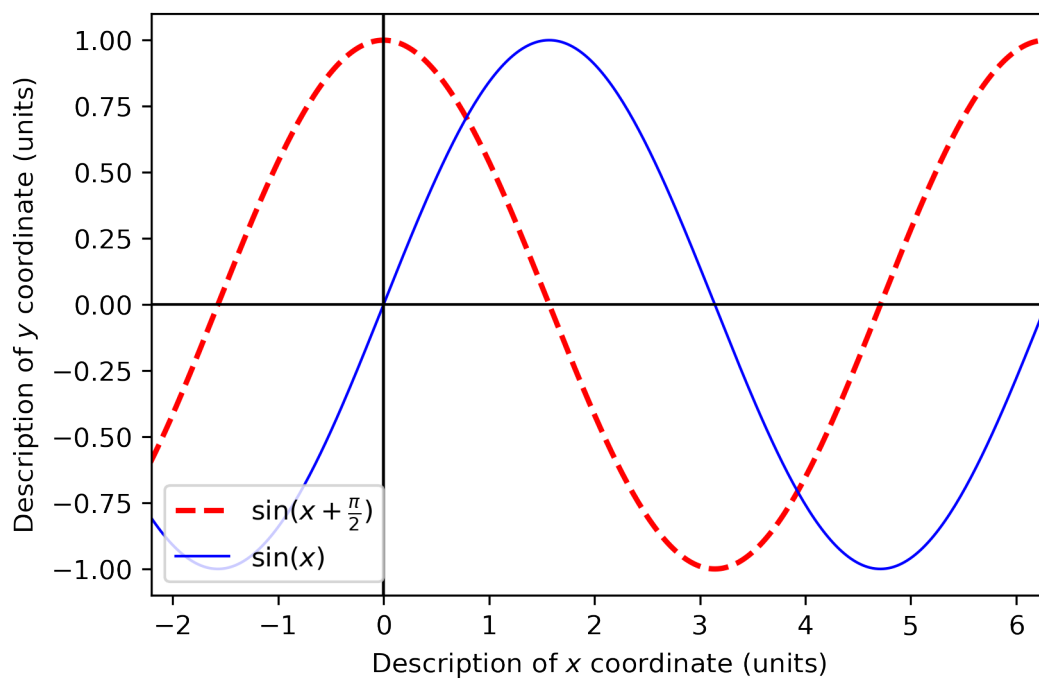
其上任意一点

$$(x_0, f(x_0))$$

$$y_0 = f(x_0)$$

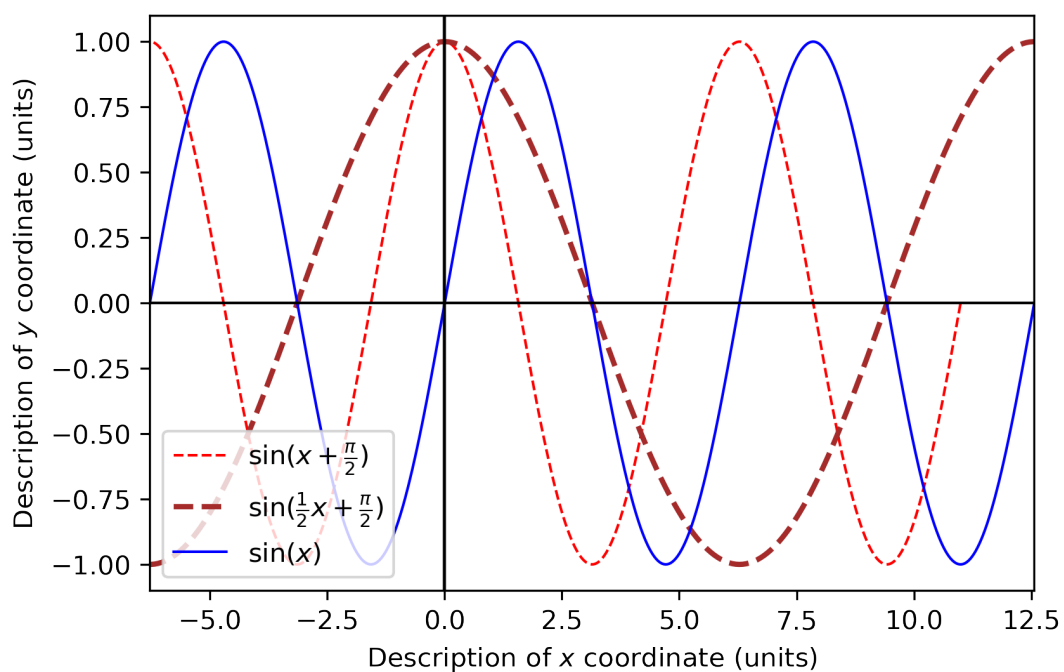
首先对其做平移变换，将函数向左平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位得到

$$(x_0 - \frac{\pi}{2}, f(x_0))$$



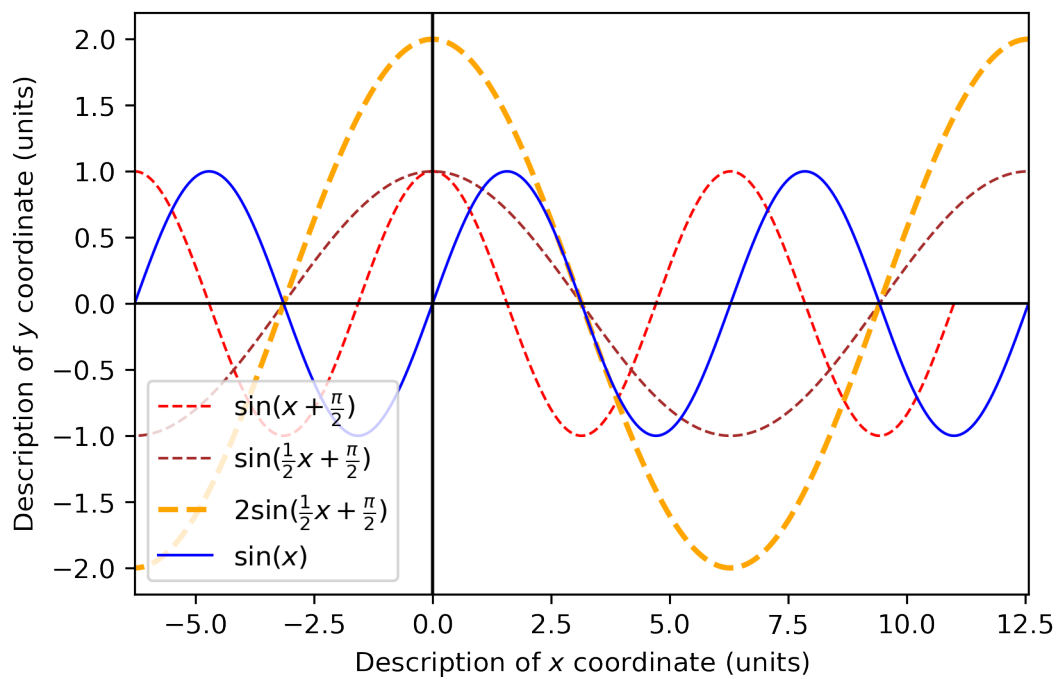
再对其进行伸缩变换，使此刻所有横坐标变为原来的 2 倍得到

$$(2(x_0 - \frac{\pi}{2}), f(x_0))$$



再在竖直方向进行拉伸两倍得到

$$(2(x_0 - \frac{\pi}{2}), 2f(x_0))$$



最后得到关系式

$$x' = 2x_0 - \pi$$

$$y' = 2y_0$$

其中  $y_0 = f(x_0)$

变换可得

$$x_0 = \frac{1}{2}x' + \frac{\pi}{2}$$

$$y_0 = \frac{1}{2}y'$$

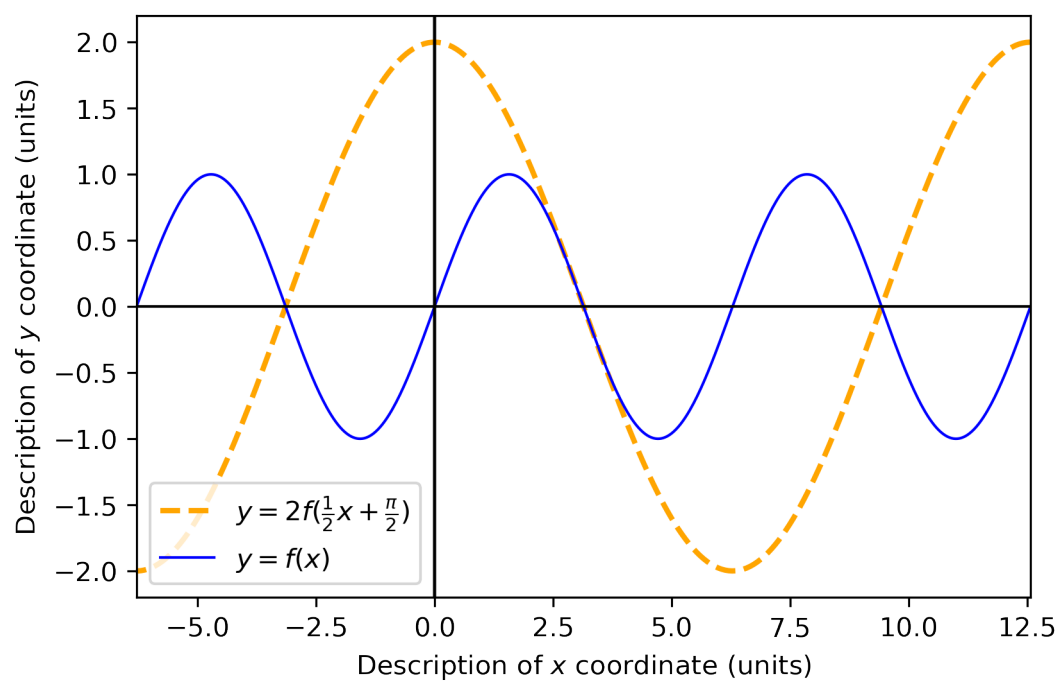
带入可得

$$\frac{1}{2}y' = f(\frac{1}{2}x' + \frac{\pi}{2})$$

容易知道对于任意的

$$(x', y')$$

$$y = 2f(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})$$

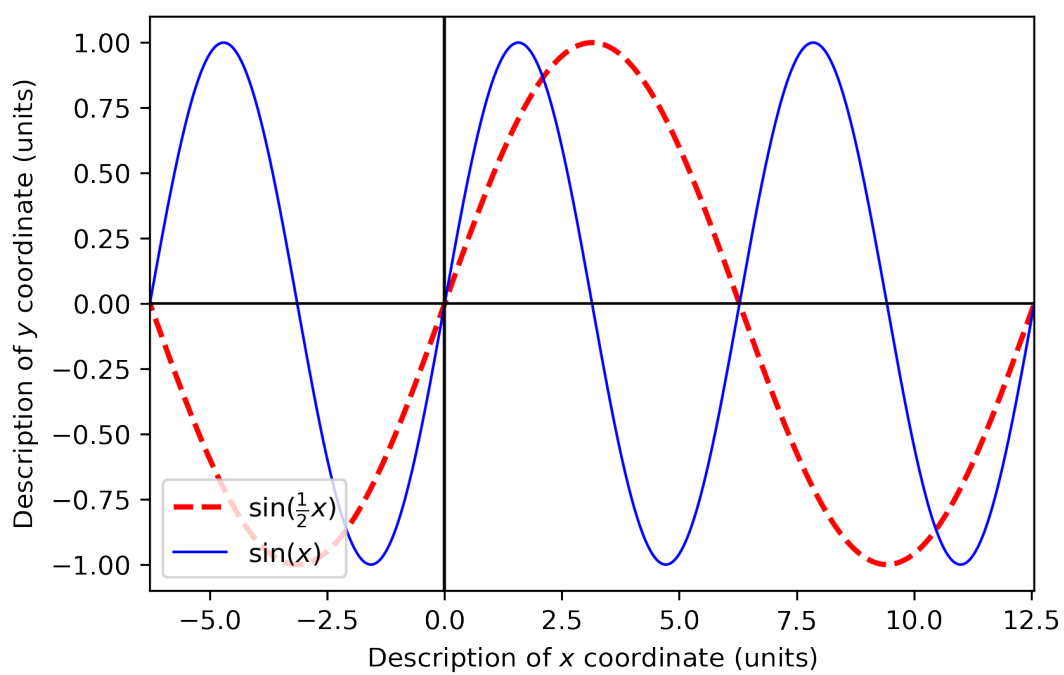


同理，对于

$$y = f(x)$$

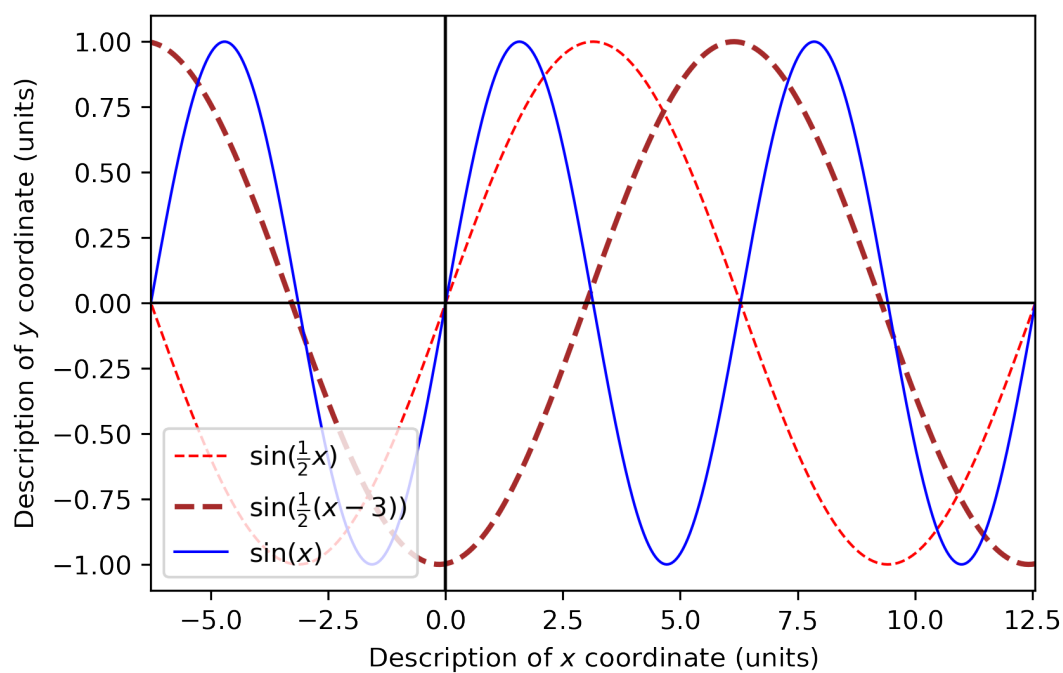
先把横坐标拉伸 2 倍

$$(2x_0, y_0)$$



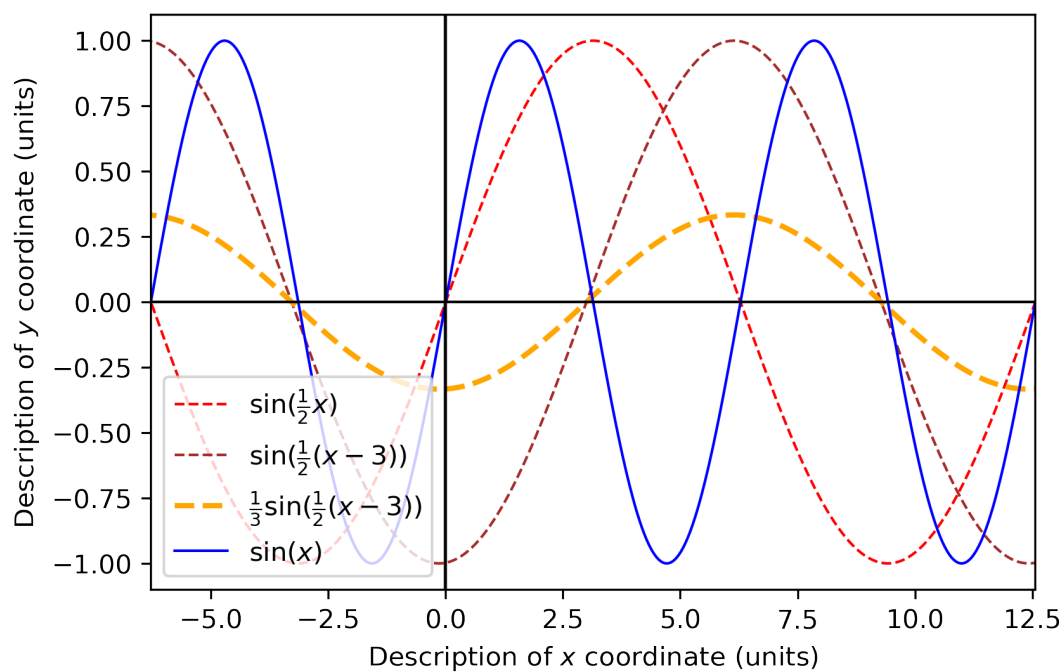
再右移 3 个单位

$$(2x_0 + 3, y_0)$$



再竖着拉伸  $\frac{1}{3}$  倍

$$(2x_0 + 3, \frac{1}{3}y_0)$$



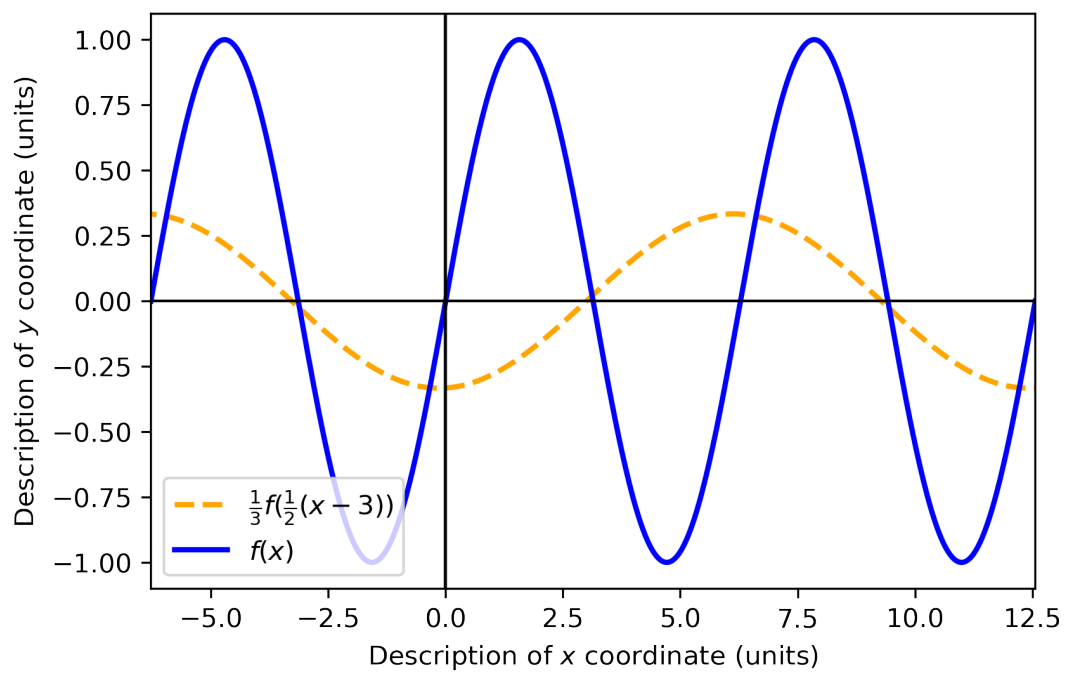
有对应关系

$$x' = 2x_0 + 3$$

$$y' = \frac{1}{3}y_0$$

代入有

$$y' = \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{2}(x' - 3)\right)$$



## 1.2 实例详解

把

$$y = f(\omega x + \phi)$$

向左平移  $m$  个单位

对于点

$$(x_0, y_0)$$

有映射

$$f : \omega x_0 + \phi \longrightarrow y_0$$

平移后的点为

$$(x_0 - m, y_0)$$

记  $x_0 - m = x_1$  则有映射

$$f : \omega(x_1 + m) + \phi \longrightarrow y_0$$

即对于变换后的点而言任意给出的  $x$  与  $y$  有关系式

$$y = f(\omega(x + m) + \phi)$$

直接有**推论**

$$y = f(\omega x + \phi) = f(\omega(x + \frac{\phi}{\omega}))$$

可以由

$$y = f(\omega x)$$

向左平移  $\frac{\phi}{\omega}$  个单位得到

同理，把

$$y = f(\omega x + \phi)$$

在水平方向拉伸  $k$  倍

拉伸后的点为

$$(kx_0, y_0)$$

记  $x_2 = kx_0$  有

$$f : \omega \frac{x_2}{k} + \phi \longrightarrow y_0$$

平移后的函数即为

$$y = f(\omega \frac{x_2}{k} + \phi)$$

### 1.2.1 推论

在水平方向的伸缩不改变  $\phi$

水平方向的平移作用在  $\omega$  的括号里

如何快速

$$y = f(\omega_1 x + \phi_1) \longrightarrow y = f(\omega_2 x + \phi_2)$$

根据推论首先改  $\omega$  不改变  $\phi$

即在水平方向伸缩  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  倍得到

$$\begin{aligned}\omega_1 x_0 &= \omega_2 x_1 \\ x_1 &= \frac{\omega_1}{\omega_2} x_0\end{aligned}$$

然后再水平平移，我不写了，你懂得

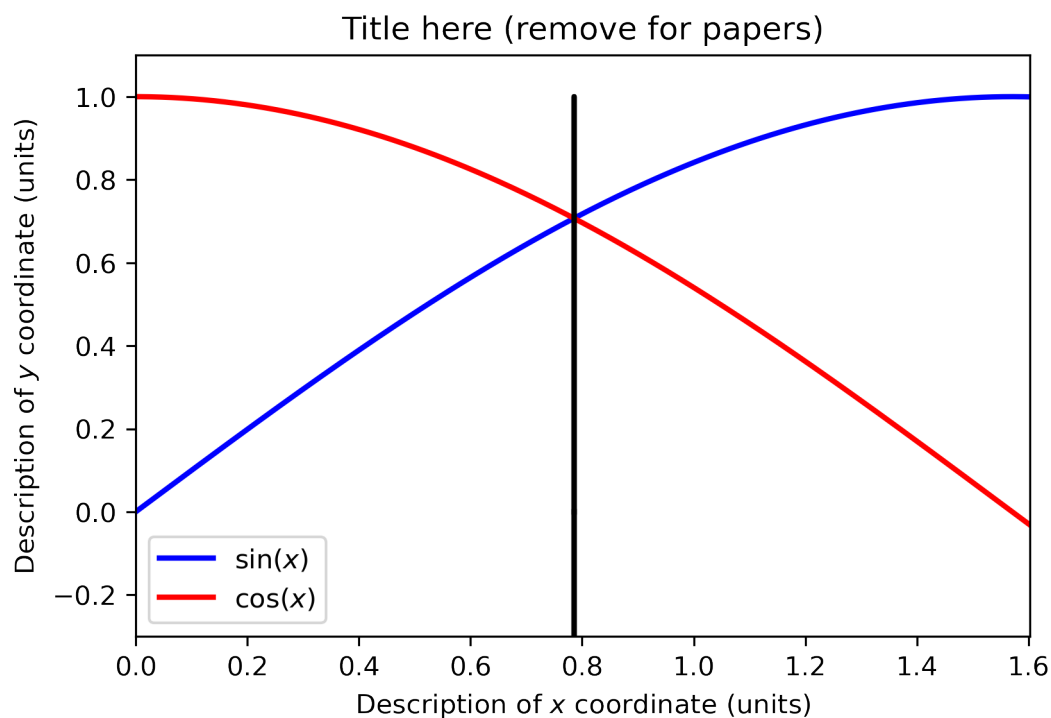
### 1.3 奇怪的题

锐角三角形 ABC 中，欲证

$$\sin A + \sin B + \sin C > \cos A + \cos B + \cos C$$

注意到

$$A + B > \frac{\pi}{2}$$



注意到

$$\frac{\pi}{4} - A < B - \frac{\pi}{4}$$

所以有

$$\sin A > \cos B$$

得证

## 2 易错点

### 2.1 注意平凡情况

比如斜率为 0 啊，二次函数首项系数为 0 啊啥的，这一写，不就有分了？先写上再说

导数切线题注意看好，是在某点的切线，还是过某点的切线

概率题，把事件写上，要不然扣分！



## 2.2 咱们来看看一个简单的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

条件告诉你

$$a_{ik} \neq a_{jk}$$

说的是啥意思呢

说的是同一列中的第  $i$  个和第  $j$  个不等！

## 2.3 有关向量的角度

注意到向量的角度从  $0$  取到  $\pi$ ，其中， $0$  不是锐角， $\pi$  不是钝角

# 3 圆锥曲线

## 3.1 二次曲线系

简单回顾

对于任意二次曲线

$$A_1x^2 + B_1y^2 + C_1xy + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

$$A_2x^2 + B_2y^2 + C_2xy + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

过它们交点的二次曲线可以写成

$$\mu(A_1x^2 + B_1y^2 + C_1xy + D_1x + E_1y + F_1) + \lambda(A_2x^2 + B_2y^2 + C_2xy + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

这时候，只要配系数就可以解决问题了

比如圆的方程必没有  $xy$  项，且  $x^2$  和  $y^2$  系数相等

### 3.1.1 实例详解

椭圆

$$Ax^2 + By^2 + F = 0$$

椭圆外一点  $E$  在定直线  $x=C$  上运动，与左顶点  $A$  与右顶点  $B$  连直线交椭圆于四个点  $ACBD$

证明  $AB$  与  $CD$  交点为定点

只需设出  $l_{EA}$  和  $l_{EB}$  的方程并乘在一块再与椭圆方程构建二次曲线系

就可以得到一定过  $ABCD$  四个点的二次曲线

随后，把  $l_{AB}$  和  $l_{CD}$  的直线根据  $CD$  过定点设出来，调参数即可

### 3.2 中点弦

中点弦是指，这有一个点，过这个点的直线与二次曲线恰好交于两点，这个点是中点，那么这条直线就能确定了

对于任意二次曲线

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

设

$$(x_0, y_0)$$

为那个中点

则有另外两个被分成两段的点

$$(x_1, y_1), (2x_0 - x_1, 2y_0 - y_1)$$

立刻有方程

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Cx_1y_1 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0 \quad (1)$$

$$A(2x_0 - x_1)^2 + B(2y_0 - y_1)^2 + C(2x_0 - x_1)(2y_0 - y_1) + D(2x_0 - x_1) + E(2y_0 - y_1) + F = 0 \quad (2)$$

(2)-(1) 得到

$$A(4x_0^2 - 4x_0x_1) + B(4y_0^2 - 4y_0y_1) + C(4x_0y_0 - 2(x_0y_1 + y_0x_1)) + D(2x_0 - 2x_1) + E(2y_0 - 2y_1) = 0$$

化简得到

$$(2Ax_0 + Cy_0 + D)(x_1 - x_0) + (2By_0 + Cx_0 + E)(y_1 - y_0) = 0$$

看得到

$$(2Ax_0 + Cy_0 + D, 2By_0 + Cx_0 + E)$$

是该直线的法向量

所以中点弦即为

$$(2Ax_0 + Cy_0 + D)(x - x_0) + (2By_0 + Cx_0 + E)(y - y_0) = 0$$

或者这个形式

$$(2Ax_0 + Cy_0 + D)x + (2By_0 + Cx_0 + E)y = (2Ax_0 + Cy_0 + D)x_0 + (2By_0 + Cx_0 + E)y_0$$

注意到  $(x_0, y_0)$  关于该曲线的极线为

$$Ax_0x + By_0y + C\frac{x_0y + y_0x}{2} + D\frac{x_0 + x}{2} + E\frac{y_0 + y}{2} + F = 0$$

或者换一种写法

$$(2Ax_0 + Cy_0 + D)x + (2By_0 + Cx_0 + E)y = -2F$$

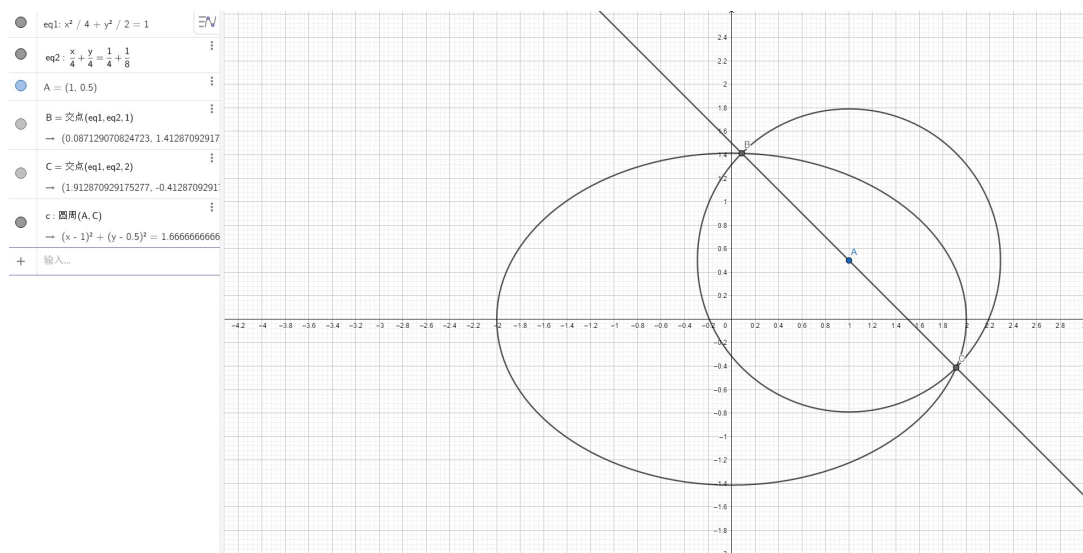
形式相近，方便记忆

### 3.2.1 结论

求中点弦只要把这个点的极线写出来，左边只放  $x$  和  $y$ ，在右边放  $x$  和  $y$  对应前面的系数和  $x_0, y_0$

举例，椭圆  $Ax^2 + By^2 + F = 0$  的中点弦是

$$Ax_0x + By_0y = Ax_0^2 + By_0^2$$



## 4 集合

简单的定义

$$\forall a \in A, \exists b = a \in B \Rightarrow A \subseteq B$$

简单的应用

$$if \quad \forall x_1 \in D_1, f(x_1) \in A, \exists x_2 \in D_2, g(x_2) \in B \Rightarrow A \subseteq B$$

其中， $A$  和  $B$  分别为  $x \in D_1$  时  $f(x_1)$  的值域和  $x \in D_2$  时  $g(x_2)$  的值域

## 5 小技巧

### 5.1 代数

见到形如

$$xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

的式子该怎么处理呢？

可以两边乘以  $xy$  然后当作  $x$  的二次函数来解

可以利用

$$(a+1)(b+1) = ab + a + b + 1$$

这个结论

换元

$$\begin{cases} xy = a \\ \frac{1}{x} = b \\ \frac{1}{y} = c \end{cases}$$

有

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ abc = 1 \end{cases}$$

## 5.2 数论

对于偶数来说，可以表示为  $2^n$  以及  $2^m \cdot c$  其中

$$c = 2k + 1 \quad k \in \mathbb{N}^+$$

对于

$$(i+j)(i-j) \quad (i, j \in \mathbb{N}^+)$$

可以表示除了 1, 2 之外的所有自然数

而对于

$$(i+j)(i-j+1) \quad (i, j \in \mathbb{N}^+)$$

来说，可以表示除了 2 的幂之外的所有偶数

给定一个不是 2 的幂的偶数，必然能写成

$$2^m \cdot c \quad \text{where} \quad c = 2k + 1 \quad k \in \mathbb{N}^+$$

则只需令

$$\begin{aligned} i + j &= 2^m \\ i - j + 1 &= c = 2k + 1 \end{aligned}$$

就能解出一组 (i,j)

## 5.3 导数题

对于任意一道导数题，先观察一下函数是否过某定点，与参数无关的，可以尝试验证  $\pm 1, \pm 2, \pm e$ ，很可能后面要用到。该技巧适用于一切函数题。

## 5.4 裂项

对于  $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$  这样的整式，可以

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = \frac{1}{6} [n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) - (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)]$$

## 5.5 最后一题

- 要抽象思考，比如说，你要求的东西只跟集合的基数有关 (cardinality)，那就没必要关注具体的细节，直接计算 card 就行
- 注意 **奇偶分析**会是极其有用的手段。有的时候可以直接用奇数和偶数来代替你要写的具体的项 (mod 2)，举个例子  $|a_{n+1} - a_n| = 1$ ，且  $a_1 = 0$ ，你发现，写出每一项是不好写的，但是写奇偶是没问题的，奇数项为 1，偶数项为 0，这样的手段往往可以帮你快速判断或证明一个命题为假
- 有时候一定要想想，我正在求的东西我真的在乎吗？我真的在乎里面具体每一个数吗？我大概是不在乎的，抽象点！
- 一个  $n$  元集合  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  的所有子集可以用一个  $n$  位的 2 进制数表示，或者， $n$  维向量进行表示，用 1 和 0 来代表选或没选该元素，好处是 **可以用 0 来湮灭我所不需要的东西**。比如我告诉你  $A$  的不同的两个子集的交集的 card 是个偶数，就可以变成，

$$\vec{B}_i \cdot \vec{B}_j = 2n \quad n \in \mathbb{N}^+$$

，这样我就又可以通过点乘来奇偶分析了！