Mathématiques actuarielles

Semestre 8 / 2019-2020
Majeure Ingénierie Financière
Option Actuariat

Laurent IMBERT
Actuaire certifié
Responsable de la majeure Actuariat
Contact : laurent.imbert@devinci.fr

Sommaire :

Intervenants et programme des 7 TD de 3 heures

Thème du TD	Nom intervenants	Mails
TD 1 : Mathématiques financières. 3h	Avner PINTO	avnerpinto26@gmail.com
TD 2 : Tarification assurance non-vie. 3h	Xuan-Quang DO	quangdx91@gmail.com
TD 3 : Calculs autour des obligations. 3h	Slim SAANOUNI	saanouni.slim@gmail.com
TD 4 : Modèle de Black Scholes et les lettres Grecs. 3h	Ange BOUYOU	ange.bouyou@hotmail.fr
TD 5: Produits dérivés. 3h	Ange BOUYOU	ange.bouyou@hotmail.fr
TD d'informatique : Introduction à R et à la manipulation/visualisation de datas et introduction aux statistiques descriptives). 6h (2 scéances de 3h de TD)	Kezhan SHI	shikezhan@gmail.com

Critères d'évaluation de la matière

Vous serez évalué avec un devoir sur table de 2h sur l'ensemble du cours et des TD (environ 150 pages).
Le cours est long et comporte de très nombreuses notions. Il faut donc travailler progressivement le cours et surtout ne pas attendre quelques jours avant le partiel pour commencer à réviser. Le devoir sera long mais accessible pour une personne ayant travaillé sérieusement le cours et les TD. Il faudra savoir refaire parfaitement l'ensemble des exercices vu en cours et en TD.

Moyenne de l'an dernier : 9/20

Exemples d'exercices :

Question de culture générale (4 points)

1) Racontez l'histoire de George Soros avec l'attaque spéculative de la livre sterling et expliquez ces conséquences.
2) Présentez les principaux objectifs de la FED et de la BCE.
3) Citez des exemples d'hyper inflation en expliquant les causes et des conséquences sur l'économie.
4) Présentez rapidement la crise de 1929.
5) Présentez rapidement les CDO synthétiques et son rôle dans la crise des subprimes.

On reprend les notations usuelles du cours des formules de Black-Scholes avec E=K (le prix d'exercice fixé de l'option).

1) Redémontrer la relation de parité et déterminer le prix d'un put à partir d'un prix d'un call.

2) Montrer l'égalité $S_t N'(d_1) = Ke^{-r(T-t)} N'(d_2)$

3) En déduire que la valeur du delta d'un call européen peut s'écrire $\Delta_{call} = N(d_1)$.

4) Donner une formule analogue pour le delta d'un put, puis montrer que $\Delta_{call} - \Delta_{put} = 1$.

Travail personnel : notions de culture générale à préparer pour le devoir sur table

1) La politique monétaire de la FED : Quantitative easing et Quantitative tightening
2) Les banques européennes et l'union bancaire en Europe
3) Les objectifs différents de la FED et de la BCE
4) La politique monétaire de la BCE : Negative Interest rate
5) Le rôle des banques centrales
6) Algorithmique trading et high frequency trading (cf Flash Boy de Michael Lewis)
7) La spéculation sur les monnaies : l’histoire de George Soros avec la livre sterling et le franc
8) Des exemples d’hyper inflation (explication des causes et des conséquences)
9) Des exemples de déflation (explication des causes et des conséquences)
10) La stratégie de carry trade
11) La stratégie de delta neutre
12) La stratégie d’investissement de Warren Buffet
13) Cryptocurrency et bitcoin
14) La crise asiatique en 1998
15) La crise de 1929
16) Les fonds vautour et les fonds de pension
17) Compréhension de la crise des subprimes (voir le film The Big Short) avec des sous-thématiques: le concept de tititrisation, le CDS & CDO, le marché des produits dérivés, le risque moral,....

3 fiches à lire avant le TD sur R animé par Kezhan Shi

- https://kezhanshi.bitbucket.io/101_01_installation.html
- https://kezhanshi.bitbucket.io/101_02_rmarkdown.html
- https://kezhanshi.bitbucket.io/101_03_bases_R.html

Introduction

R est un logiciel de stat en open source (gratuit). C'est le logiciel le plus utilisé dans le monde académique, en Banque et aussi en Assurance pour réaliser des calculs statistiques (modélisation linéaire et non linéaire, tests de statistiques classiques, classification, clustering, ACP, AFC, etc.) et de techniques graphiques.

Un des points forts de R réside dans sa capacité à pouvoir utiliser des puissantes méthodes mathématiques de manière très simple grâce aux nombreux packages que l'on peut télécharger.

Partie I

Rappel des bases de Mathématiques Financières

Préambule : à propos des mathématiques financières

On peut définir globalement les mathématiques financières « comme l’application des mathématiques aux opérations financières non instantanées » (c’est-à-dire faisant intervenir le temps).

Traditionnellement, elles se rattachent à l’analyse des opérations de prêts et d’emprunts dans un environnement certain (principalement bancaire).

Au cours de ces quarante dernières années toutefois, est apparu en matière de financement un glissement vers des systèmes d’économie des marchés financiers.

L’une des caractéristiques de ces marchés est la grande volatilité des cours boursiers et des taux d’intérêt, qu’il convient de prendre en compte. Une question apparaît alors : qu’est-ce qu’un cours boursier ? Qu’est-ce qu’un taux d’intérêt ?

Préambule : à propos des cours boursiers

Les actions : présentation

Le cours d'une société cotée est sensé refléter sa « valeur fondamentale » (somme de ses revenus futurs actualisés), telle qu'elle peut ressortir d'une analyse économique de l'activité de l'entreprise et de ses perspectives.

Les écarts entre la valeur fondamentale et la capitalisation boursière d'une société sont en général interprétés comme la conséquence de comportements spéculatifs qui auraient pour conséquence de créer un décalage entre l'« économie réelle » et le monde de la finance.

En pratique, cette dichotomie entre une analyse économique objective d'une part et un comportement largement irrationnel des marchés boursiers d'autre part peut être dépassée au prix d'une réflexion sur la nature de l'aléa sous-jacent à la détermination de la valeur.

En effet, le cours de bourse est principalement déterminé par l'offre et la demande de financement d'une société, et celles-ci sont très sensibles aux anticipations de revenu, elles-mêmes très sensibles au modèle d'anticipation retenu sachant que l'horizon de vie d'une société est souvent indéterminé, voire infini.

Préambule : à propos des cours boursiers

Une action représente une fraction du capital d'une société, et confère principalement deux droits : un droit au dividende et un droit de vote lors des assemblées générales. Elles permettent à leur détenteur de dégager deux types de revenus :

– les dividendes, généralement une fois par an ;
– son prix de revente futur, qui peut conduire à dégager une plus-value.

Le montant du dividende dépend à la fois des bénéfices de l'entreprise et de leur affectation par l'assemblée générale annuelle (distribution sous forme de dividendes ou mise en réserve afin de financer des investissements ultérieurs).

Les sociétés cotées proposent à leurs actionnaires la possibilité de percevoir leur dividende en numéraire ou en en actions.

Les actions des sociétés cotées sont des placements relativement risqués car :

– leur valeur évolue au cours du temps ;
– les dividendes qui seront versés sont aléatoires et peuvent être nuls.

Les actions : la détermination du prix et la notation de liquidité

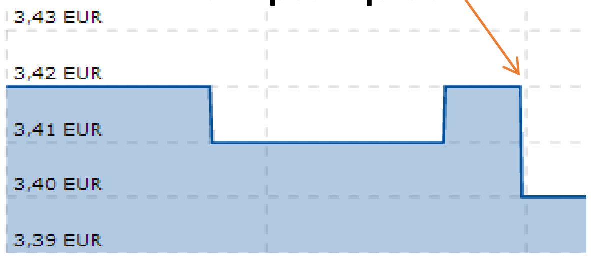
Le prix d'une action à un instant *t* représente la valeur à laquelle à eu lieu la dernière transaction. Il y a transaction car le meilleur vendeur rencontre le meilleur acheteur : **la rencontre de l'offre et la demande**. C'est cette loi qui fixe le prix d'un actif, d'une action ou de tout autre bien s'échangeant en bourse. Quand il y a davantage d'offreurs (vendeurs) que de demandeurs (acheteurs), le prix du bien tend à baisser. En effet, les vendeurs afin de vendre leur bien consentiront un prix inférieur.

La liquidité d'un titre s'apprécie au travers du volume moyen de transactions journalières enregistrées sur une valeur sur une période donnée. Plus le montant échangé chaque jour en euros est élevé et plus la liquidité du titre sera élevé. Plus un marché est liquide, plus il est aisé, rapide et peu coûteux d'y réaliser des transactions.

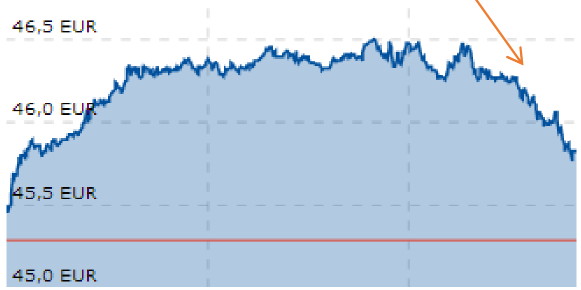
CARNET D'ORDRES

Ordres	Qté	Achat	Vente	Qté	Ordres
3	2 085	6.871	6.878	5 283	6
1	125	6.870	6.879	1 280	3
2	1 570	6.869	6.880	2 500	4
2	1 143	6.868	6.882	1 542	3
1	400	6.867	6.883	400	1
2	1 486	6.866	6.884	400	1
1	4 014	6.865	6.886	805	1
1	825	6.863	6.887	13 125	1
1	4 596	6.862	6.888	1 019	2
1	2 766	6.860	6.889	725	1
15	19 010	TOTAL	TOTAL	27 079	23

Actif peu liquide



Actif liquide



Préambule : à propos des taux d’intérêt

Un taux d’intérêt peut s’interpréter comme le prix de l’argent, mais aussi comme un « taux de change» explicite entre le présent et le futur.

Selon la durée du prêt, le niveau de taux appliqué est conditionné par celui constaté sur le marché, ainsi :
les taux d'intérêt à court terme sont fixés sur le marché monétaire, où la banque centrale joue un rôle déterminant ;
les taux d'intérêt à moyen et long terme, appelés aussi rendements obligataires, sont négociés sur le marché obligatoire.

En notant i le taux d’intérêt pour la date 1, fixer un taux d’intérêt pertinent revient ainsi à fixer le niveau de richesse $1+i > 1$ désiré en 1 (dans le futur) en échange d’une unité de richesse en 0 (dans le présent).

Le taux d’intérêt dépend ainsi de la capacité à « créer de la richesse » pour la génération future et de la « part de la richesse créée » transférée à la génération future.

En pratique, sauf à provoquer des arbitrages* entre activité financière et activité réelle, on considère généralement que :

Taux d’intérêt réel à long terme = Taux de croissance réel à long terme

Parallèlement, à long terme, il est également considéré que :

Taux d’intérêt nominal = Taux d’intérêt réel + Taux d’inflation anticipé

*opération financière destinée à assurer un gain positif ou nul de manière certaine en profitant d'écarts temporaires de prix constatés entre différents titres ou contrats.

Préambule : à propos des taux d'intérêt

Au-delà de la distinction classique taux nominaux / taux réels, il existe un clivage entre les taux courts et les taux longs, les taux d'intérêts étant différenciés par l'échéance du crédit. La courbe des taux représente graphiquement la relation entre le niveau des taux d'intérêt et leur échéance (3 mois, 1 an, 2 ans, … , 10 ans). Une courbe des taux reflète la conjoncture économique et de la politique monétaire du pays ainsi que l'influence de l'offre et de la demande de capitaux, pour chacune des durées de crédit.

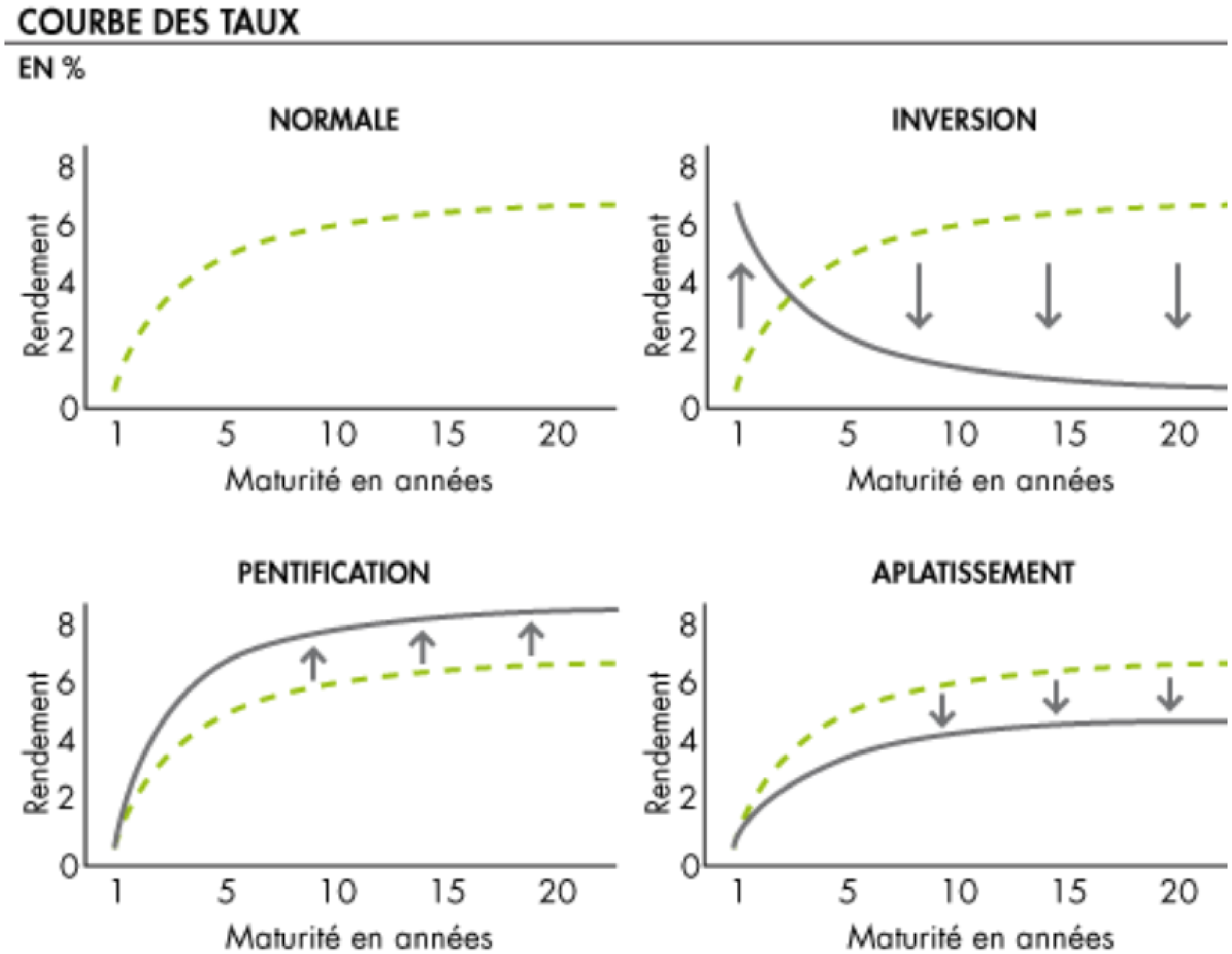
D'une façon générale, les courbes de taux sont concaves et croissantes, au moins sur leur partie 0-10 ans.

La forme de la courbe dépend en particulier des anticipations des agents privés concernant l'évolution de l'inflation et de la politique monétaire (en effet, les taux d'intérêt relèvent de mécanismes de marché, la banque centrale ne contrôlant directement que les taux directeurs).

Enfin, le taux d'intérêt dépend également de la plus ou moins grande prime de risque exigée par les investisseurs lorsqu'ils consentent à placer leurs capitaux sur le long terme. Cette prime de risque compense la moindre liquidité des placements longs et le risque croissant avec l'échéance de perte en capital.

*Quantitative easing (QE) = assouplissement quantitatif

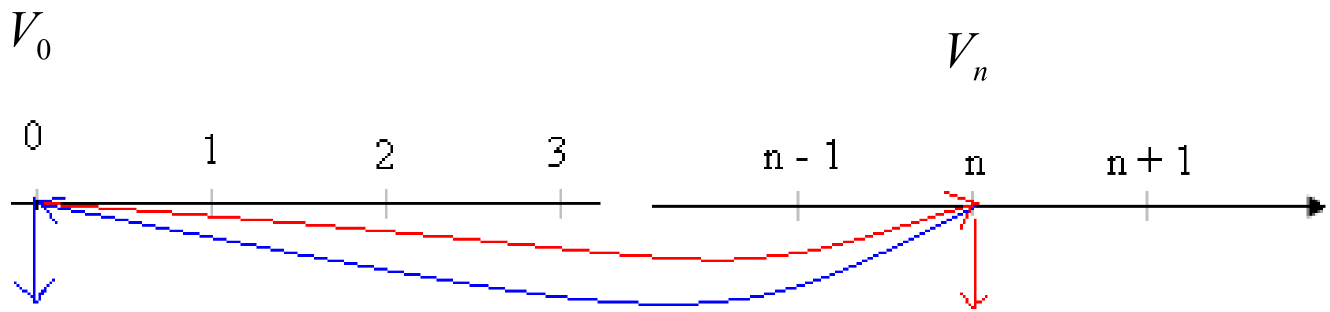
Préambule : à propos des taux d'intérêt



Une courbe de taux inversée, ie descendante sur sa partie 0-10 ans, ce qui est assez rare, indique que l'argent à court terme est plus cher que l'argent à long terme. C'est le cas :

- quand la politique monétaire est particulièrement restrictive (taux d'intérêt à court terme élevés fixés par la banque centrale dans le cadre de la lutte contre l'inflation, par exemple) ;
- ou quand le marché anticipe une récession dans le futur, qui donc entraînera un assouplissement (via un QE*) des taux courts.

Préambule : définition de l' « actualisation » et de la « capitalisation »



$$V_0 = V_n(1+i)^{-n}$$

$$V_n = V_0(1+i)^{n}$$

Actualisation : Valeur actuelle V_0 d'une valeur future V_n actualisée sur *n* périodes à un taux *i*

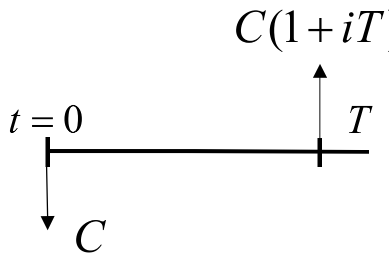
Capitalisation : Valeur acquise V_n par un capital V_0 placé pendant *n* période à un taux *i*

1. Intérêts et emprunts directs

1.1. Intérêts simples (concerne essentiellement les opérations inférieures à 1 an).

L'intérêt simple se calcule toujours sur le même capital principal. Il ne s'ajoute pas au capital pour porter lui même intérêt. L'intérêt simple est proportionnel au capital prêté ou emprunté.

Considérons un capital C placé au taux i entre les dates *t=0* et *T*.



Le montant des intérêts I au bout de cette période est donné par : $\mathrm{I} = \mathrm{C}\,\mathrm{i}\,\mathrm{T}$

Il existe alors différentes conventions pour le calcul de T en fonction du nombre de jours pour l'opération : convention « exact/exact », convention « exact/360 », etc.

Si l'opération dure moins de un an (pendant *n* jours), la valeur V_T peut être calculée au **prorata temporis** : $V_T = V_0(1 + i\frac{n}{360})$

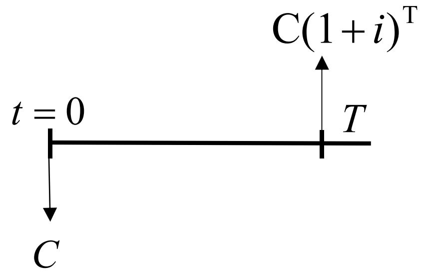
Exemple : Une personne décide de placer 750 euro sur un compte qui rapporte 6% par an. Le montant des intérêts touchés au bout de 8 mois de placement est : I = 750 × 6% × 8/12 = 30€

1. Intérêts et emprunts directs

1.2 Intérêts composés

Les intérêts sont calculés à la fin de chaque période puis ajoutés au capital (on dit qu'ils sont capitalisés) et produisent à leur tour des intérêts au même taux *i* dans les périodes ultérieures.

Considérons un capital C placé au taux i entre les dates *t=0* et *T*.



La valeur futur V_T d'un montant initial V_0 placé avec un taux d'intérêt fixe i pendant *T* année est : $V_T = V_0(1+i)^T$.

On remarque les intérêts sont égaux à : $I = C\,[(1+i)^T - 1]$

1. Intérêts et emprunts directs

1.2 Intérêts composés

Exemple 1 : Considérons un investissement de 1000€ placé pendant 6 ans sur un livret rémunérant au taux de 10%. Calculer la valeur atteinte par cet investissement au bout de 6 ans.

$$V_6 = 1000(1+10\%)^6 = 1771,56$$

Exemple 2 : Considérons une personne arrivant aux Etat Unis en 1626 avec 24$ en poche. Supposons que cette personne et ses descendants puissent placer cet argent dans un investissement qui rapporte 6% par an (sans jamais y toucher par la suite). Quelle serait la valeur de cette investissement aujourd'hui ?

Environ 188 milliards $, soit 2 fois plus que Bill Gates (86 milliards $)

Exemple 3 : Une banque vous offre 30 000€ dans 10 ans si vous investissez 15 000€ aujourd'hui.

Quel est le taux moyen de rendement annuel de cet investissement ?

$$r = \left(\frac{V_T}{V_0}\right)^{\frac{1}{T}} - 1 = \left(\frac{30000}{15000}\right)^{\frac{1}{10}} - 1 = 7,18\%$$

1. Intérêts et emprunts directs

1.3 Comparaison entre intérêts simples et composés

Pour un taux *i*, un capital C et une durée T donnés, les intérêts simples (taux proportionnel) sont inférieurs aux intérêts composés (taux actuariel) si et seulement T>1 (si T=1, les intérêts simples sont égaux aux intérêts composés), du fait de la linéarité de et de la convexité de $g(T) = (1+i)^{T} \approx e^{iT}$.

Pour que ces deux taux soient « équivalents », tant pour le prêteur que pour l'emprunteur, il faut que les flux qu'ils génèrent soient égaux, soit (avec i_p le taux proportionnel et i_{act} le taux actuariel) : $g(T) = (1+i_p T) = (1+i_{act})^{T}$

Cette relation peut être utilisée pour trouver le taux proportionnel équivalent au taux actuariel, et vice versa. On remarque par ailleurs que deux taux i_{act} et i_p équivalent sur une durée T ne le sont pas sur une durée T' différente de T.

Les taux les plus utilisés sont :

$$1 + i_{semestriel} = (1 + i_{annuel})^{\frac{1}{2}}$$

$$1 + i_{trismestriel} = (1 + i_{annuel})^{\frac{1}{4}}$$

$$1 + i_{mensuel} = (1 + i_{annuel})^{\frac{1}{12}}$$

1. Intérêts et emprunts directs

1.3 Comparaison entre intérêts simples et composés

Exemple 1 :

Taux proportionnel mensuel pour un taux annuel de 6% : 6% x 1 mois / 12 mois = 0,50%.
Taux équivalent (ou actuariel) mensuel pour un taux annuel de 6% : $(1+6\%)^{1\ \text{mois}\ /\ 12\ \text{mois}} - 1$ = 0,49%.

Exemple 2 : Un placement de 1 000€ sur 6 mois au taux annuel de 12%.

• Avec des **intérêts simples**, le taux périodique proportionnel sera de 12% x 6 mois / 12 mois, soit 6%.
Le montant des intérêts sera alors de 1 000€ x 6%, soit 60€. Pour une durée d'un an, les intérêts seront de 60 euros × 2 = 120€.

• Avec des **intérêts composés**, le taux périodique équivalent sera de $(1{,}12^{6/12} - 1)$, soit 5,83%.
Le montant des intérêts sera de 1 000 × 5,83%, soit 58,3€. Sur une durée d'un an, les intérêts seront de 58,30 + (1 058,3 × 5,83%) = 120€.

1. Intérêts et emprunts directs

1.4 Intérêts simples post-comptés et précomptés

Les intérêts peuvent être payés en fin de période (intérêts post-comptés ou à terme échu) ou en début de période (intérêts précomptés ou à terme à échoir). Les intérêts post-comptés correspondent à ceux vus précédemment.

Les intérêts précomptés sont des intérêts versés au début de l'opération. Le flux initial F_0 correspond ainsi au montant du capital, diminué des intérêts *I*. En fin de placement, le capital est ensuite versé par l'emprunteur.

1) Une **première méthode** classique pour les intérêts précomptés consiste à utiliser un taux d'escompte i_e , le flux initial est alors :

$$F_0 = C\,(1 - i_e\,T).$$

Le paiement immédiat des intérêts est pénalisant pour l'emprunteur si l'on utilise le même taux que pour des intérêts post-comptés.

Exemple : une entreprise demande 10 000€ sur une durée de 30 jours, taux d'intérêt précompté de 6%.
Elle obtient : 10 000 × [1 – (6% × 30/360)] = 9 950.

2) La **deuxième méthode** consiste alors à ajuster le taux d'escompte à la baisse pour le rendre équivalent à un taux in fine, le flux initial est dans ce cas :

$$F_0 = \frac{C}{(1 + iT)}.$$

1. Intérêts et emprunts directs

1.5 Valeur acquise et valeur actualisée

La valeur acquise est égale au montant final (capital et intérêts) récupérée par le prêteur à l'échéance de l'opération. Pour un capital placé C sur une durée T à un taux *i*, la valeur acquise (*F*) est donnée par :

$$F = C(1 + i_p\, T)$$ si i_p ,le taux est proportionnel ;

$$F' = C\,(1 + i_{act})^T$$ si i_{act} ,le taux est actuariel.

Inversement, un flux F en T peut être obtenu moyennant un placement au taux *i*, en t=0, d'un montant égal à (avec C et C' les valeurs actualisées en 0 du flux *F* disponible en T) :

$$C = \frac{F}{(1 + i_p T)}$$ si i_p ,le taux est proportionnel ;

$$C' = \frac{F}{(1 + i_{act})^T}$$ si i_{act} ,le taux est actuariel.

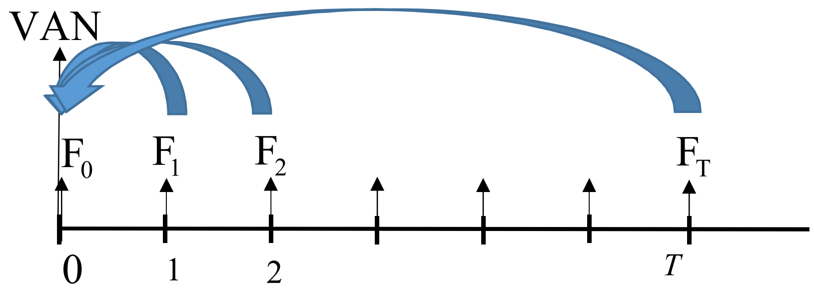
Dans un contexte d'investissement, lorsque *F, C* et *T* sont connus, le taux actuariel correspond au taux de rentabilité interne (TRI).

1. Intérêts et emprunts directs

1.6 Séquence de flux : VAN et taux actuariel

Le principe d'actualisation peut facilement s'étendre au cas de séquences faisant intervenir plusieurs flux F_j (j allant de 0 à T). Dans ce cas on a la **valeur actuelle nette** (VAN) suivante, en considérant des intérêts composés uniquement :

$$VAN = F_0 + F_1(1+i)^{-1} + F_2(1+i)^{-2} + \ldots + F_T(1+i)^{-T}$$



La VAN d'un investissement représente le flux de trésorerie en 0 par lequel on peut remplacer tous les flux de trésorerie de cet investissement (y compris mise de fonds initiale).

Un investissement ne doit être retenu que si sa VAN est positive.
En pratique, le taux actuariel (le TRI dans le cas d'un investissement) est le taux d'actualisation qui annule la VAN de la séquence de flux. Le critère de TRI peut au final se formuler ainsi : un investissement doit être accepté si et seulement si le TRI de la séquence de flux qu'il génère est supérieur au taux de rendement minimal *i* souhaité par l'investisseur.

1. Intérêts et emprunts directs

1.7 Annuités et rentes : cas des annuités constantes

Une rente est une suite d'annuités, mais nous considérons ici rentes et annuités comme synonymes. Par ailleurs, on considère ici également des intérêts composés uniquement.

En considérant T+1 dates (0 étant la date de début et T la date de fin) et T périodes, la **valeur acquise** (en début de T+1 période) d'une suite d'annuités *a* de fin de période s'écrit :

$$a(1+i)^{T-1} + a(1+i)^{T-2} + \ldots + a = a\left(\frac{(1+i)^{T} - 1}{i}\right)$$

La **valeur actuelle** s'écrit :

$$a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \ldots + a(1+i)^{-T} = a\left(\frac{1 - (1+i)^{-T}}{i}\right)$$

Dans le cas des annuités en début de période, il convient de multiplier les valeurs acquises et actuelles ci-dessus par (1+i).

1. Intérêts et emprunts directs

1.8 Emprunts indivis

Un emprunt indivis est un emprunt accordé par un seul prêteur à un unique emprunteur.

On en présente trois types ici :

- l'emprunt avec remboursement in fine ;
- l'emprunt avec amortissement constant du capital ;
- l'emprunt par annuités constantes.

Les emprunts donnent lieu à des échéanciers appelés aussi tableaux d'amortissement du capital, dans lequel figurent les périodes, le capital restant dû, les intérêts, l'amortissement du capital et les annuités.

1. Intérêts et emprunts directs

1.8 Intérêts et emprunts directs

Dans les exemples suivants, on considère un emprunt de C = 1 000 000€, sur une durée *T = 5* ans et au taux *i* = 5 %. Les exemples ci-après sont par ailleurs donnés pour des échéances annuelles.

Dans le cas du remboursement in fine, **un 1er mode** de remboursement correspond à un remboursement du principal et des intérêts en une seule fois à l'échéance : $C(1+i)^T$.

L'annuité payée à la dernière période est donc 1 276 282€.

Dans le **2ème mode de remboursement** (prêt in fine), le capital est remboursé à l'échéance et le paiement des intérêts s'observe en fin de chaque période. Le tableau d'amortissement du capital est dans ce cas :

$$C = 1\ 000\ 000\ ;$$
$$i = 5\%\ ;$$
$$T = 5\ \text{ ans.}$$

Période	Annuités	Intérêts	Amortissements	CRD en début de période
0	-	-	-	1 000 000
1	50 000	50 000	-	1 000 000
2	50 000	50 000	-	1 000 000
3	50 000	50 000	-	1 000 000
4	50 000	50 000	-	1 000 000
5	1 050 000	50 000	1 000 000	-
Total	1 250 000	250 000	1 000 000	s.o

1. Intérêts et emprunts directs

1.8 Intérêts et emprunts directs

Dans le cas du remboursement avec amortissement constant du capital, le remboursement du capital est de C/T à chaque période et le calcul des intérêts porte sur le capital restant dû. Les annuités, qui comprennent le remboursement partiel du principal et les intérêts, sont payées en fin de période.

Les annuités et les intérêts sont en progression arithmétique de raison $-\frac{iC}{T}$ et la somme des intérêts versés est de $\frac{iC(T+1)}{2}$.

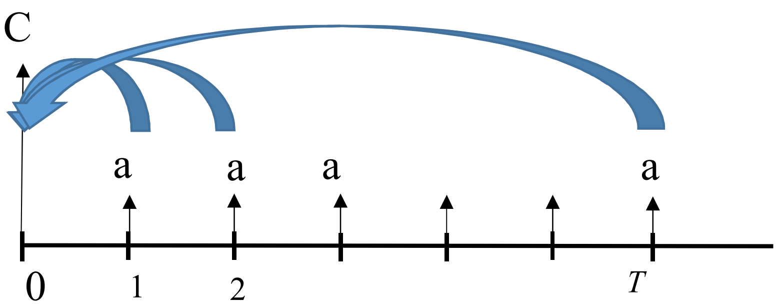
Le tableau d'amortissement du capital est dans ce cas :

$C = 1\,000\,000$;
$i = 5\%$;
$T = 5$ ans.

Période	Annuités	Intérêts	Amortissements	CRD en début de période
0	-	-	-	1 000 000
1	250 000	50 000	200 000	800 000
2	240 000	40 000	200 000	600 000
3	230 000	30 000	200 000	400 000
4	220 000	20 000	200 000	200 000
5	210 000	10 000	200 000	-
Total	1 150 000	150 000	1 000 000	s.o

1. Intérêts et emprunts directs

1.8 Intérêts et emprunts directs



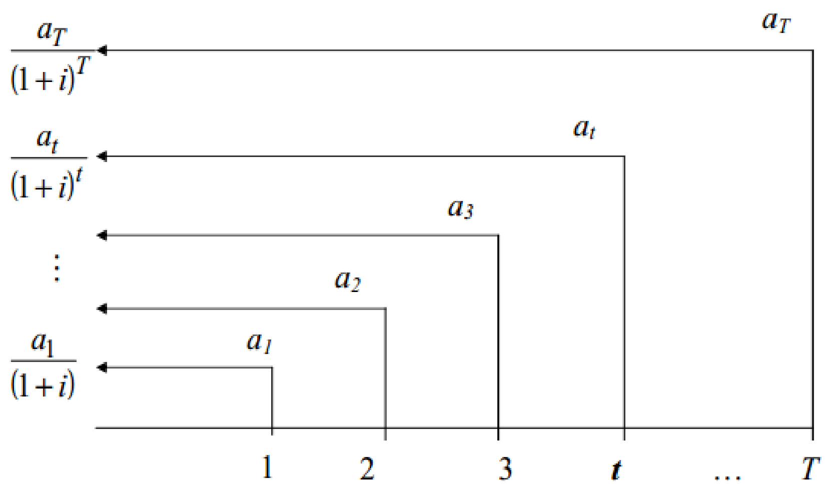
Le remboursement avec amortissement constant :

i, le taux d'intérêt ;
a, l'annuité ;
T, la durée de remboursement.

$$C=\frac{a}{(1+i)}+\frac{a}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{a}{(1+i)^T}$$

$$=a\left[\frac{1}{(1+i)}+\frac{1}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^T}\right]$$

$$=\frac{a}{1+i}\left[1+\frac{1}{(1+i)}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^{T-1}}\right]$$



1. Intérêts et emprunts directs

1.8 Intérêts et emprunts directs

Nous retrouvons l'expression d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison : $\frac{1}{1+i}$

$$C=\frac{a}{(1+i)}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{T}}{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)}\right]$$

Enfin, nous trouvons la valeur actuelle en début de n+1 période : $C=a\frac{1-(1+i)^{-T}}{i}$

De plus nous avons aussi : $C=\lim_{T\to\infty}\left(a\frac{1-(1+i)^{-T}}{i}\right)=\frac{a}{i}$

Application : Calcul du prix d'une obligation

Le prix d'une obligation (P) est obtenu en faisant la somme des flux de coupon (c) et du remboursement du nominal (N), actualisés chacun au taux de rendement i sur la période t, qui est, pour chaque flux, la durée (en années) entre la date d'achat et la date de tombée du flux :

$$P_{\text{oblig}}=\sum_{n=1}^{T}\frac{c_n}{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}}+\frac{N}{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{T}}}=\frac{\mathrm{c}}{i}\left(1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{T}}\right)+N(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{T}}$$

Exemple 1 : Un particulier souhaite financer l'achat d'une maison de ville avec un crédit à taux fixe de 4% sur 15 ans. Supposons qu'il peut consacrer une somme de 1.800€ par mois au remboursement de son crédit. Quel est le montant maximum que ce particulier peut emprunter ?

$$C=\frac{1800}{\left(1+\frac{4\%}{12}\right)}+\frac{1800}{\left(1+\frac{4\%}{12}\right)^{2}}+\ldots+\frac{1800}{\left(1+\frac{4\%}{12}\right)^{180}}$$

En utilisant la formule précédente nous avons : $C=\frac{1800}{\left(1+\frac{4\%}{12}\right)}\times\left[\frac{1-\left(1+\frac{4\%}{12}\right)^{-180}}{1-\left(1+\frac{4\%}{12}\right)^{-1}}\right]=243346$

Exemple 2 : Un particulier doit rembourser 200.000€ dans 4 ans. Le particulier souhaite reporter le remboursement de sa créance dans 10 ans (hypothèse : taux d'intérêt de 6%). Quel sera le nouveau montant que le client devra rembourser dans 10 ans?

Deux séquences de cash-flows sont équivalents si elles ont la même valeur actuelle et donc : $\frac{200000}{(1.06)^{4}}=\frac{X}{(1.06)^{10}}$

ou encore : $X=200000\times(1.06)^{6}=283703.82\ EUR$

1. Intérêts et emprunts directs

1.8 Intérêts et emprunts directs

Dans le cas du remboursement par annuités constantes, pour déterminer l'annuité *a*, on considère comme équivalent la valeur acquise d'une suite d'annuités constantes et la valeur acquise du montant du prêt *C*, capitalisé au taux *i* sur *T* périodes, soit :

$$C = \frac{a}{i}\left(1-(1+i)^{-T}\right) \quad \text{d'où} \quad a = C\frac{i}{1-(1+i)^{-T}}$$

Le tableau d'amortissement du capital est dans ce cas :

$C = 1\,000\,000$;
$i = 5\%$;
$T = 5$ ans.

Période	Annuités	Intérêts	Amortissements	CRD en début de période
0	-	-	-	1 000 000
1	230 975	50 000	180 975	819 025
2	230 975	40 951	190 024	629 002
3	230 975	31 450	199 525	429 477
4	230 975	21 474	209 501	219 976
5	230 975	10 999	219 976	0
Total	1 154 874	154 874	1 000 000	s.o

1. Intérêts et emprunts directs

1.9 Cas du remboursement par annuités variables

Avec les notations suivante :

- *i*, le taux d'intérêt ;
- *g*, le taux de croissance constant à l'infini des versements ;
- *a*, le premier versement effectué à la fin de la première année.

la valeur actuelle est donnée par :

$$C=\frac{a}{(1+i)}+\frac{a\times(1+g)}{(1+i)^2}+\frac{a\times(1+g)^2}{(1+i)^3}+\ldots+\frac{a\times(1+g)^{T-1}}{(1+i)^T}$$

$$=\frac{a}{(1+i)}\underbrace{\left(1+\frac{(1+g)}{(1+i)}+\frac{(1+g)^2}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{(1+g)^{T-1}}{(1+i)^{T-1}}\right)}$$

Somme de T termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1+g}{1+i}$

1. Intérêts et emprunts directs

1.9 Cas du remboursement par annuités variables

Nous retrouvons l'expression d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1+g}{1+i}$: $C = \frac{a}{(1+i)}\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^T}{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)}\right]$

En faisant tendre T → +∞ nous avons : $C = \lim_{T\to\infty}\frac{a}{(1+i)}\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^T}{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)}\right]$

Si i > g, la série des versements est convergente et on obtient finalement : $C = \frac{a}{i-g}$

Exemple 1 : Vous souhaitez déterminer la valeur d'un bien immobilier locatif d'une surface de 100m^2. On suppose que le loyer annuel courant (charges déduites) est de 20 000€/an. Le taux d'actualisation est de 6% et le taux de croissance des loyers est de 2% par an. A quel prix accepteriez-vous d'acheter ce bien ?

La valeur de ce bien correspond à la valeur actuelle de ses cash flows futurs, soit en supposant une durée de vie infinie :

$$V_0 = \frac{20000}{(6\% - 2\%)} = 500\,000$$

2. Le TEG

Le taux effectif global (TEG), ou taux annuel effectif global (TAEG), est le taux d'intérêt fixé par la banque ou l'établissement de crédit. Il vous indique le coût total du crédit que vous allez supporter quand vous souscrivez un crédit immobilier ou un crédit à la consommation.

Le TEG (ou TAEG) doit toujours être indiqué sur les publicités et les offres préalables de crédit. Il doit également être indiqué sur le contrat de crédit.

Il comprend :

- le taux d'intérêt de base (ou taux nominal) ;
- et les frais, commissions et rémunérations diverses (frais de garantie, frais de dossier, frais de courtage, etc) ;
- et éventuellement des primes d'assurance, lorsqu'une assurance obligatoire est souscrite simultanément auprès de l'établissement prêteur.

Dans l’hypothèse ou votre offre de crédit immobilier comporterait une erreur dans le calcul du TEG (Taux Effectif Global), vous pourriez bénéficier, après une procédure judiciaire, du taux d’intérêt légal de l’année d’obtention du prêt (0,90% en 2017). Voilà une opération financièrement intéressante pour l’emprunteur.

Calcul du TEG

Comment calculer le TEG d'un crédit avec un taux nominal avec des frais de dossier, des frais de crédit logement, etc :

1) Calculez le montant de chaque mensualité (assurance comprise). Elle est supposée ici constante sur toute la durée du crédit (*n* mois) et égale à *a*.

2) Déterminez le montant des frais inhérents aux crédit pour chaque période. On suppose ici que l'ensemble des frais sont égaux à *f* et payés à la date d'obtention du crédit.

3) Ecrivez l'égalité suivante : *Valeur Actuelle (prêtée)=Valeur Actuelle (remboursée).*

n, la durée du crédit (en mois) ;
C, capital emprunté ;
a, la mensualité ;
f, les frais payés à l'instant 0 (frais de dossier, frais de garantie, etc) ;
x, le TEG mensuel ;
X, le TEG annuel ;

$$\begin{aligned}
&\text{VA (prêtée)} = \text{VA (remboursée)} \\
&\Leftrightarrow C - f = a(1+x)^{-1} + \cdots + a(1+x)^{-n} \\
&\Leftrightarrow C - f = a\frac{1-(1+x)^{-n}}{x} \\
&\Leftrightarrow C - f = a\frac{1-(1+X)^{-n/12}}{(1+X)^{1/12}-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&X + 1 = (1+x)^{12} \\
&\Leftrightarrow x = (1+X)^{1/12} - 1
\end{aligned}$$

4) Le TEG annuel (X) est déterminé en résolvant cette dernière équation non linéaire en X.

3. Le rachat de crédit

Le rachat de crédit consiste à substituer un ou plusieurs crédits déjà existants par un seul et unique crédit, à un taux si possible moins élevé dont le choix de la durée est en adéquation avec les revenus de l'emprunteur.
Cette solution est notamment utile en cas de:

- baisse des taux ;
- situation de surendettement (exemple : rachat de plusieurs crédits à la consommation).

Avantage : une forte baisse sur le total des intérêts	Inconvénient : des frais fixes importants
Réaliser des économies importantes avec la baisse du taux et/ou de la durée	Obligation de payer un Indemnités en cas de Remboursement Anticipé (IRA) ou **pénalités** = minimum (3% de CRD ; 6 mois d'intérêts)
Possibilité de renégocier son crédit dans sa banque pour éviter des frais importants + perte de temps dû à la souscription d'une crédit dans une nouvelle banque	Obligation de souscrire une **nouvelle caution bancaire** (via un organisme spécialisé comme le Crédit Logement, CMH, etc) avec un coût d'environ 1,5% du montant du prêt (ou de faire une nouvelle hypothèque).
optimisation de la nouvelle structure de crédit avec le nouvel état financier du client	Obligation de changer de banque + perte de temps.
	Ne pas avoir changer récemment d'employeur (période d'essaie)

Conclusion : à faire uniquement en cas de baisse substantielle des taux d'intérêts (de l'ordre de 100 point de base) depuis la souscription du crédit pour amortir les frais fixes importants engendrés par l'opération. Ainsi, plus on s'approche de l'échéance du crédit et moins le rachat est intéressant (le montant d'intérêts économisé n'arrivant pas à compenser les frais de frottement de l'opération).

3. Le rachat de crédit

Exemple d’application :

Monsieur X possède un crédit à la banque A à un taux nominal de 4,0% avec un CRD de 150K€ pour une durée restante de 20 ans.
Dans un premier temps, il propose à sa banque de renégocier son crédit. La banque A accepte et lui propose une nouveau crédit de 2,5% sur la même durée (frais de dossier d’un montant de 500€).
Pour challenger cette proposition, Monsieur X prend RDV avec la banque B et obtient la proposition suivante : taux de 1,9% sur 20 ans (pas de frais de dossier).

Quelle est la meilleure proposition ?

Solution :

Calculer le TEG de chacune de ces 2 propositions et retenir le TEG le plus faible des 2 propositions :

- banque A (2,5% sur 20 ans) et frais payés à l’instant 0 : 500€ (frais de dossier) ;
- banque B (1,9% sur 20 ans) et frais payés à l’instant 0 : 0€ (frais de dossier) + coût caution bancaire + IRA de la banque A

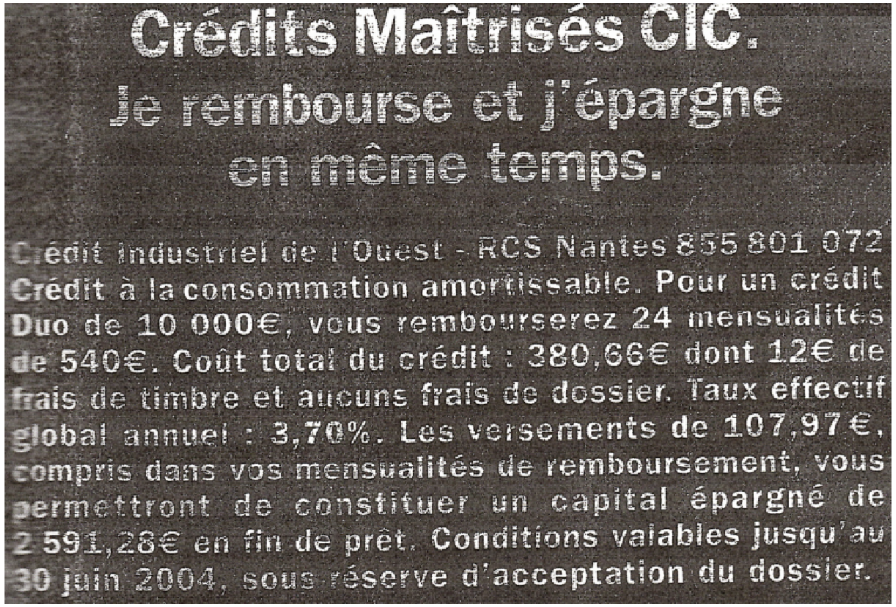
Il n’est pas nécessaire tenir compte des différences de tarif sur l’assurance emprunteur car dans les 2 cas, on peut opter pour une délégation d’assurance. La délégation d'assurance permet à l'emprunteur de souscrire un contrat individuel chez l'assureur de son choix. Ce dernier s'engage à verser la somme due à l'établissements prêteur, en cas de décès par exemple. Le plus souvent, cette formule s'avère plus avantageuse qu'une assurance groupe car elle s'adapte au profil de chaque assuré.

Exercice 1 : Erreur de la banque

Recalculer le TEG annuel de ce crédit à la consommation :

Donnez l'équation développée permettant de calculer le TEG annuel (noté X) de la publicité suivante :

« Crédit à la consommation amortissable. Pour un crédit Duo de 10 000€, vous remboursez 24 mensualités de 540€. Coût total du crédit : 380,66€ dont 12€ de frais de timbre et aucun frais de dossier. Le versement de 107,97€ compris dans vos mensualités de remboursement, vous permettront de constituer un capital épargné de 2 591,28€ en fin de prêt. »

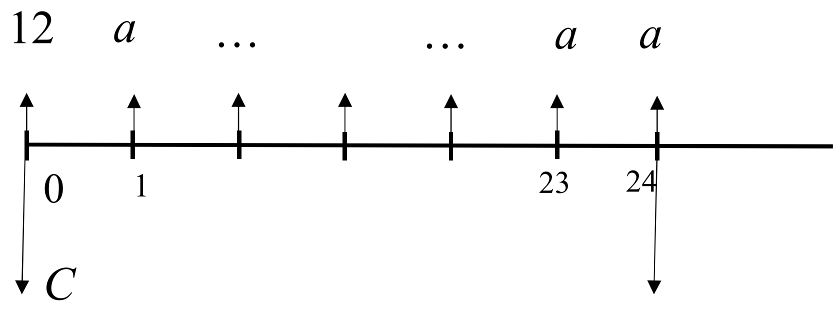


Publicité pour un crédit à la consommation extraite d'un magazine en 2004

Exercice 1 : Erreur de la banque

Correction

C=10 000€
n=24 mois
a=540€/mois
X= TEG annuel
x = TEG mensuel
Timbre = 12€



« vous permettront de constituer un capital épargné de 2 591,28€ en fin de prêt ».

$$\text{VA (prêtée)} = \text{VA (remboursée)}$$

$$\Leftrightarrow C-12 = a(1+x)^{-1} + \cdots + a(1+x)^{-24} - 2591{,}28(1+x)^{-24}$$

$$\Leftrightarrow C-12 = a\frac{1-(1+x)^{-24}}{x} - 2591{,}28(1+x)^{-24}$$

$$\Leftrightarrow C-12 = a\frac{1-(1+X)^{-2}}{(1+X)^{1/12}-1} - 2591{,}28(1+X)^{-2}$$

$$X+1 = (1+x)^{12}$$

$$\Leftrightarrow x = (1+X)^{1/12} - 1$$

On trouve X = 4,8% >> 3,70% annoncé (+30% !).

Exercice 2 : Financement d'un investissement de collectivités

Pour réaliser un investissement dont le financement est strictement réglementé, une ville doit emprunter un capital C=6.000.000€ (TTC) sur 5 ans, au taux de 10,0%. Cet emprunt implique une cotisation à un fonds de garantie à raison de 60€ par an et par 10.000€. La ville retient les 3 propositions suivantes :

1. La banque A pratique le remboursement in fine et prélève des intérêts annuels et 1,0% du capital à la souscription au titre des frais de dossier ;
2. La banque B retient également 1,0% du capital, mais comme fonds de garantie complémentaire, récupérable. Ses annuités sont constantes, sauf la 3eme qui est majorée du montant de la TVA au taux réduit de 7,0% ;
3. La banque C propose des annuités progressant tous les ans au taux U=7,6% (hors fonds de garantie).

Pour aider le responsable financier de la ville à faire son choix :

- Dresser les 3 tableaux d'amortissement ;
- Démontrez sans calcul quelle est la proposition la moins chère ;
- Ecrire l'équation développée permettant de calculer le TEG pour chacune de ces offres ;
- La ville ne pouvant impérativement disposer que de 1.500.000€ au maximum la première année pour cette opération, pour les 2 autres propositions calculez les TAEG.

Aide : pour le banque B, le montant de majoration pour la 3eme année est de : $P_{TVA} = C_{HT} \times 7\% = \dfrac{C}{(1+7\%)} \times 7\% = 392.523€$

Correction

1) Banque A : crédit « In Fine »

$C = 6.000.000€$
$N = 5$ ans
$T = 10\%$

$$\text{Frais de garantie (FG)} = \frac{6\,000\,000}{10\,000} \times 60€ = 36.000€$$
$$\text{Intérêt (annuel)} = 10\% \times C = 600.000€$$
$$\text{frais dossier (FD)} = 1\% \times C = 60.000€$$

Année	Echéance	Intérêt	Chargement	Amort	CRD
0	60.000	0	60.000	0	6.000.000
1	636.000	600.000	36.000	0	6.000.000
2	636.000	600.000	36.000	0	6.000.000
3	636.000	600.000	36.000	0	6.000.000
4	636.000	600.000	36.000	0	6.000.000
5	6.636.000	600.000	36.000	6.000.000	0

$$\text{VA (prêtée)} = \text{VA (remboursée)}$$
$$\Leftrightarrow C - 60.000 = (\text{Intérêt} + FG)\frac{1-(1+X)^{-5}}{X} + C(1+X)^{-5}$$
$$\Leftrightarrow X = 10{,}87\% = TEG(A)$$

2) Banque B

$C = 6.000.000€$

$N = 5 \text{ ans}$

$T = 10\%$

$$\text{Frais de garantie (FG)} = \frac{6\,000\,000}{10\,000} \times 60€ = 36.000€$$

$$\text{frais dossier (récupérable)} = 1\% \times C = 60.000€$$

$$P_{TVA} = C_{HT} \times 7\% = \frac{C}{(1+7\%)} \times 7\% = 392.523€$$

$$C' = C - P_{TVA}(1+T)^{-3} = 6.000.000 - 392.523(1+10\%)^{-3} = 5.705.091€$$

$$a' = \frac{C'T}{1-(1+T)^{-5}} = 5.705.091\frac{10\%}{1-(1+10\%)^{-5}} = 1.504.989€$$

« Ses annuités sont constantes, sauf la 3eme qui est majorée du montant de la TVA au taux réduit de 7,0% »

$a' + P_{TVA} = 1.504.989 + 392.523 + 36000 = 1.933.512$

Année	Echéance	Intérêt	Chargement	Amort	CRD
0	60.000	0	60.000	0	6.000.000
1	1.540.989	600.000	36.000	904.989	5.095.011
2	1.540.989	509.501	36.000	995.488	4.099.523
3	1.933.512	409.952	36.000	1.487.560	2.611.963
4	1.540.989	261.196	36.000	1.243.793	1.368.170
5	1.480.987	136.817	-24.000	1.368.170	0

$\text{frais de garantie - frais dossier} = 36.000 - 60.000 = -24.000$

« La banque B retient également 1,0% du capital, mais comme fonds de garantie complémentaire, récupérable »

$$\text{VA (prêtée)} = \text{VA (remboursée)}$$

$$\Leftrightarrow C - 60.000 = 1.540.989\frac{1-(1+X)^{-5}}{X} + 392.523(1+X)^{-3} - 60.000(1+X)^{-5}$$

$$\Leftrightarrow X = TAEG(B) < TAEG(A)$$

3) Banque C

$C = 6.000.000€$
$N = 5$ ans
$T = 10\%$
$U = 7{,}6\%$

$$\frac{1}{1+Z} = \frac{1+U}{1+T}$$
$$\Leftrightarrow Z = \frac{1+T}{1+U} - 1 = 0{,}022$$
$$A_1 = C(1+U)\frac{Z}{1-(1+Z)^{-N}} = 1.378.870$$

$$A_2 = A_1(1+U) = 1.483.665$$
$$A_3 = 1.596.423$$
$$A_4 = 1.717.751$$
$$A_5 = 1.848.300$$

Année	Echéance	Intérêt	Chargement	Amort	CRD
0	0	0	0	0	6.000.000
1	1.414.870	600.000	36.000	778.870	5.221.130
2	1.519.665	522.113	36.000	961.552	4.259.578
3	1.632.423	425.958	36.000	1.170.465	3.089.113
4	1.753.751	308.911	36.000	1.408.840	1.680.273
5	1.884.300	168.027	36.000	1.680.273	0

$$\text{VA (prêtée)} = \text{VA (remboursée)}$$
$$\Leftrightarrow C = (A_1 + 36.000)(1+X)^{-1} + \ldots + (A_5 + 36.000)(1+X)^{-5}$$
$$\Leftrightarrow X = 10{,}84\%$$
$$\Leftrightarrow X = TAEG(C) < TAEG(B)$$

Conclusion

Les 3 propositions sont au même taux nominal, même chargement de caution, même durée, même périodicité mais :

A) Frais de dossier ;
B) Fonds de garantie ;
C) Pas d'autre chargement : c'est donc la meilleure proposition.

La première annuité de B dépasse 1.500.000€. D'après les équations aux taux effectifs, on obtient :

TAEG(A)>TAEG(B)>TAEG(C)

La différence étant peu significative, il serait intéressant d'examiner les possibilités de placement à moyen terme des sommes disponibles en cas de choix de l'option A, la réponse étant évidemment à creuser hors impact électoral...

4. Présentation de quelques méthodes d'évaluation d'un investissement financier

Exemple avec le cas particulier d'un investissement locatif

4.1 Le rendement brut

Il est calculé par rapport au prix de revient du bien et ne prend en compte que le montant annuel des loyers perçus (hors charges). Cette définition est celle utilisée par les agences immobilières, mais le fait de ne pas prendre les frais annexes en compte rend ce rendement très éloigné de la réalité.

Taux de rentabilité brute (%) = $\dfrac{100 \times 12 \text{ (mois)} \times \text{ loyer (mensuel hors charges)}}{\text{prix de revient du bien}}$

Le prix de revient comprend l'ensemble des sommes ayant été déboursées pour l'acquisition :
Prix d'achat+ Frais d'agences+ Frais de notaire + Frais bancaires + Travaux

Exemple :

Un appartement est revenu à 62 000€ et les loyers perçus sont de 550€ par mois
Le rendement brut est de : (100 x 12 x 550) / 62 000 = **10,65%**

4. Présentation de quelques méthodes d'évaluation d'un investissement financier

4.2 Le rendement net de charges

Ce rendement permet d'obtenir la rentabilité en prenant en compte tous les frais inhérents à la location de l'appartement, mais on ignore ici les impôts (mais pas les taxes). Cette définition est celle permettant dans un premier temps de déterminer la faisabilité de votre projet. Si le rendement net est proche de zéro, il y a peu de chances que l'autofinancement se réalise car vous devez à ce calcul ajouter ensuite les impôts liés aux sommes que vous allez percevoir.

Taux de rentabilité net (%) = $\dfrac{100 \times (12 \times \text{loyer}_{\text{mensuel HC}} - \sum \text{charges annuelles})}{\text{prix de revient du bien}}$

Frais inhérents à la location d'un appartement :

- la taxe foncière et autres taxes locales éventuelles ;
- l'assurance PNO ;
- l'assurance loyer impayé ;
- les frais de syndic (charges de copropriété) ;
- les frais de gestion (si vous passez par une agence) ;
- les frais d'entretien ;
- les vacances locatives ;
- électricité, etc.

Exemple :

L'appartement est revenu à 62 000€, les loyers perçus sont de 550€ par mois et les charges annuelles sont de 5 269€. Le rendement net est de : 100 x (12 x 550) – 5 269 / 62 000 = **2,15%.**

4. Présentation de quelques méthodes d’évaluation d’un investissement financier

4.3 Le rendement net de charges et après impôt :

Ce rendement est le rendement que l’investisseur touche dans sa poche après l’ensemble des frais et après impôt. Il donc le plus complexe à déterminer car il dépend de la situation fiscale lors de l’investisseur lors de l’opération. L’idée est de soustraire les impôts payés relatifs à cet investissement immobilier pour avoir une estimation finale. Ce calcul, bien que complexe est important car c’est grâce à lui que vous verrez si votre investissement va vous rapporter de l’argent ou vous en coûter.

Taux de rentabilité net net (%) = $\dfrac{100 \times (12 \times \text{loyer}_{\text{mensuel HC}} - \sum \text{charges annuelles} - \sum \text{impôts annuels})}{\text{prix de revient du bien}}$

Exemple 1 (régime du micro foncier) :
Notre appartement est revenu à 62 000€, les loyers perçus sont de 550€ par mois et les charges annuelles sont de 5 269€. Supposons que nous sommes dans la tranche d’imposition des 40% (TMI) et que nous déclarons cet investissement immobilier au régime **micro-foncier** (abattement de 30%).

Calculons d’abord le montant des impôts : ((550 x 12)-30%)* 40% = 1 848 €
Rendement net après impôt = 100 x [(12 x 550)- 5 269 - 1 848] / 62 000 = **- 0,83%**

Il est donc très important de prendre en compte le régime d’imposition qui sera adopté pour votre déclaration fiscale dans le montage financier du bien. Dans la plupart des cas, le régime réel est bien plus avantageux car les intérêts d’emprunt, prélèvements sociaux et autres charges sont également déductibles des revenus générés par les loyers.

4. Présentation de quelques méthodes d'évaluation d'un investissement financier

Exemple 2 (en régime réel + prise en compte d'un crédit) :

Le **recours à l'emprunt immobilier** peut vous permettre d'améliorer la rentabilité de votre investissement locatif en vous permettant de profiter de l'effet de levier financier et fiscal du crédit.

Prenons un exemple simple pour illustrer l'**effet de levier du crédit :** vous achetez un bien valant 100 000€ qui vous rapporte 4 000€ de loyer annuel, soit un **rendement brut** de 4%. Si vous financez votre achat comptant, la **rentabilité nette/nette** de votre investissement est de 1,74% (avec un **taux marginal d'imposition** de 41% et 15,5% de **prélèvements sociaux**).

On suppose que vous pouvez financer votre opération avec un prêt à 3,70 % (hors assurance) : les résultats ci-après montrent que plus la part financée à crédit augmente, plus la **rentabilité financière** augmente.

	Achat sans crédit	Achat à crédit (taux fixe de 3,70 %)	
Apport personnel (1)	100 000	50 000	30 000
Emprunt	0	50 000	70 000
Loyer annuel	4 000	4 000	4 000
Intérêts de l'emprunt	0	1 850	2 590
Revenus imposables	4 000	2 150	1 410
Impôt dû sur les loyers	2 260	1 215	797
Revenu net (2)	1 740	935	613
Rentabilité nette (2/1)	1,74 %	1,87 %	2,04%

4. Présentation de quelques méthodes d'évaluation d'un investissement financier

4.4 Le Taux de Rendement Interne (TRI)

Le taux de rentabilité interne (notion identique à la notion de TEG) est égal au taux d'actualisation qui produit une valeur actuelle nette nulle pour l'investissement :

$$VA_{invest} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \frac{\mathrm{Flux_i}}{(1+\mathrm{TRI})^i} = 0$$

Le tout premier flux ($Flux_0$) est égal au montant de l'investissement initial, et est donc négatif. Chacun des flux futurs sera ramené à une valeur présente grâce à un taux d'actualisation identique, le taux de rentabilité interne.

Si le TRI est supérieur au taux d'actualisation en vigueur, alors le projet est rentable.

Exemple : un investissement coûte 100€ à l'acquisition et rapporte 70€ la première année, et 70€ la deuxième année.

Calcul du TRI de l'opération pour l'investisseur :

$$100 = \sum_{i=0}^{n} \frac{\mathrm{Flux_i}}{(1+\mathrm{TRI})^i}$$

$$\Leftrightarrow 100 = \frac{70}{(1+\mathrm{TRI})^1} + \frac{70}{(1+\mathrm{TRI})^2}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{TRI} = 25,69\ \%$$

4. Présentation de quelques méthodes d’évaluation d’un investissement financier

4.5 La Valeur Actuelle Nette (VAN)

La valeur actuelle nette mesure, à partir d'informations comptables, si l'investissement peut réaliser les objectifs attendus des apporteurs de capitaux.
Une VAN positive indique que l'investissement peut être entrepris : $VAN = \sum_{i=0}^{n} \frac{\mathrm{Flux}_i}{(1+t)^i} - I$

Avec t, le taux d’actualisation (ou le coût moyen du capital), n le nombre total d’annuités et I, le capital investi initialement.

Le TRI est souvent reconnu comme un critère de sélection économique entre projets : si on doit choisir entre plusieurs projets, définis par des investissements et des cash flows (ou flux de trésorerie) connus dans le temps, on pense souvent que l'on doit choisir le projet qui a le TRI le plus élevé. Cependant, ceci n'est pas vraiment justifié, et peut être faux comme le montre l'exemple suivant.

Retenons que la VAN est le critère de référence pour comparer des projets, et que le **TRI n'est pas un critère pertinent de choix de projet** : il permet juste de savoir si les projets sont rentables (comparaison entre le TRI de chaque projet et du taux d'actualisation du capital).

Le **TRI** est un outil de décision à l’investissement. Un projet d'investissement ne sera généralement retenu que si son TRI prévisible est suffisamment supérieur au taux bancaire, pour tenir compte notamment de la prime de risque propre au type de projet.
En effet, mathématiquement, si le TRI est supérieur au taux d'actualisation du capital, la VAN du projet est positive, ie le projet est **rentable**.

4. Présentation de quelques méthodes d’évaluation d’un investissement financier

Exemple trompeur : VAN vs TRI

Considérons une entreprise qui à le choix entre les 2 investissements suivants (taux d'actualisation de 10 %) :

	Projet A	Projet B
Investissement en fin d’année 1	20	20
Recettes en fin d’année 2	0	20
Recettes en fin d’année 3	30	6

$$VAN_A = \frac{30}{(1+10\ \%)^2} - 20 = 4{,}8$$

$$VAN_B = \frac{20}{(1+10\ \%)^1} + \frac{6}{(1+10\ \%)^2} - 20 = 3{,}1$$

	Projet A	Projet B
TRI	22 %	24 %
VAN avec taux d'actualisation à 10 %	4,8	3,1

$$\frac{30}{(1+TRI_A)^2} - 20 = 0 \Leftrightarrow TRI_A = 22\%$$

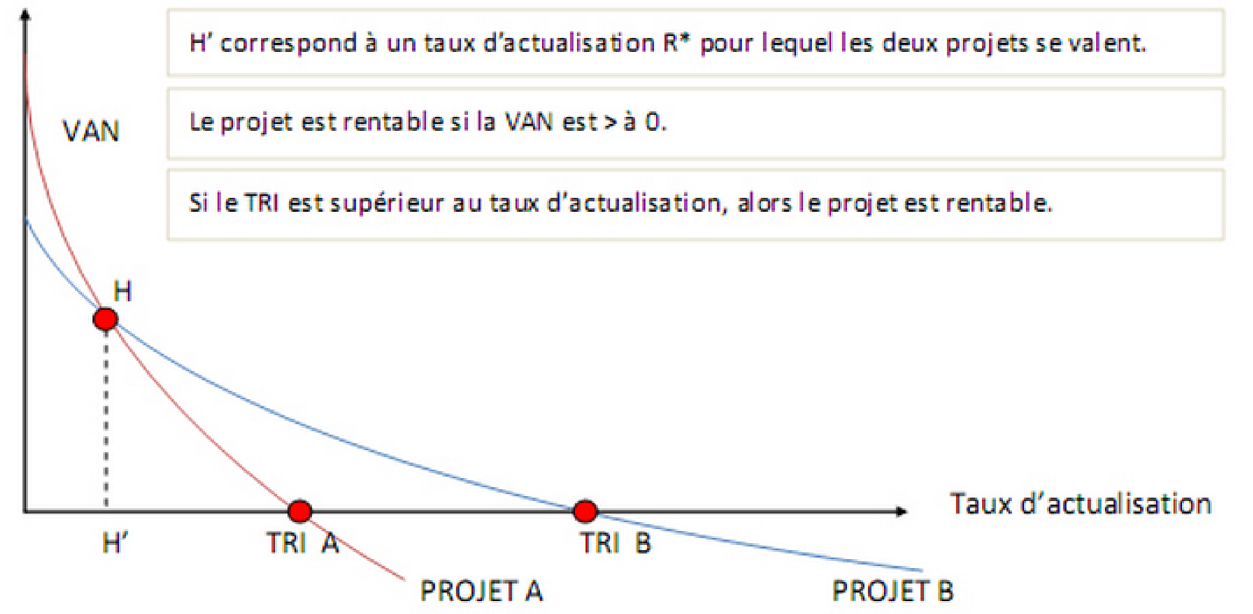
$$\frac{20}{(1+TRI_B)^1} + \frac{6}{(1+TRI_B)^2} - 20 = 0 \Leftrightarrow TRI_B = 24\%$$

4. Présentation de quelques méthodes d'évaluation d'un investissement financier

Exemple trompeur : VAN vs TRI

Conclusion : l'utilisation indue du TRI (choix du projet B qui a le TRI le plus élevé) implique donc un revenu actualisé de 3.1, c'est-à-dire bien moins que ce que rapporte le projet A (VAN de 4.8).

Ceci est dû à un profil différent de la courbe de la VAN en fonction du taux d'actualisation utilisé : les courbes se croisent.



5. Le viager

Le viager consiste à acquérir un bien mais sans forcément l'occuper immédiatement contrairement à une acquisition classique. En effet l'acquéreur ne peut occuper le logement que lorsque le vendeur décède s'il s'agit d'un viager « occupé ».

Le viager est la rencontre de deux intérêts. Celui du vendeur d'un bien immobilier et celui de l'acheteur de ce bien :

– le vendeur est une personne âgée qui souhaite améliorer sa condition de vie au quotidien ;
– l'acheteur est une personne souhaitant investir. Soit en placement financier pur, soit pour préparer son futur immobilier personnel (résidence secondaire, logement au soleil pour la retraite ...).

Le viager occupé est le plus répandu et concerne la plupart des opérations. Le vendeur occupe le logement jusqu'à son décès et il perçoit un capital initial (appelé bouquet) et une rente indexée.

Le montant du bouquet (et donc celui de la rente) est à définir en fonction des besoins du vendeur : plus le montant du bouquet est important et plus l'aléa sera faible. Le plus souvent, le contrat prévoit une clause d'indexation de la rente. Si ce n'est pas le cas, la loi prévoit la révision annuelle de la rente.

Le viager libre ne représente que 2% des ventes en viager. Les biens concernés sont essentiellement des biens qui ne sont pas la résidence principale du vendeur.
Toutes les règles relatives à la vente (notamment la signature par acte authentique) doivent être respectées lors d'une vente en viager. Seules les modalités de paiement du prix sont particulières.
Si l'acquéreur ne paie pas la rente, le contrat peut prévoir une clause résolutoire permettant au vendeur de saisir le bien et de conserver les sommes déjà reçues à titre de dommages et intérêts. Par contre, le bouquet devra être restitué au débirentier.

Avantages et inconvénients du viager

L'avantage essentiel du **viager occupé** est qu'il permet d'obtenir une décote d'environ 30% sur le prix réel du logement, qui correspond aux loyers non encaissés. C'est donc un bon moyen de devenir propriétaire d'un bien convoité alors qu'on ne dispose pas initialement des fonds nécessaires.

Le vendeur crédirentier a l'obligation de supporter les **charges usufructuaires**, c'est à dire les contributions et **charges courantes** ainsi que les **impôts fonciers**. Les parties restent libres de prévoir conventionnellement une répartition différente.
Concernant les travaux, le vendeur **crédirentier** doit supporter **les travaux d'entretien** alors que l'acquéreur débirentier devra supporter **les grosses réparations.**

Le calcul de la rente viagère dépend de plusieurs éléments :

- la valeur vénale du bien ;
- le montant du bouquet : capital versé lors de la signature du contrat par le débirentier au crédirentier. Son montant est fixé librement et arbitrairement par le vendeur (généralement entre 0 et 50% de la valeur vénale du bien) ;
- l'âge du vendeur ;
- le type de viager.

La **rente viagère** est calculée sur la base de la **valeur vénale diminuée du montant du bouquet**.
Le **risque** principal du viager est le **risque de longévité du crédirentier** (exemple de Jeanne Calmant).
En cas de décès de l'acquéreur, l'obligation de paiement de la rente est transmise à ses héritiers qui sont tenus de s'en acquitter jusqu'au décès du crédirentier.

Exemple simplifié du calcul du montant de la rente

M. X dispose d'un bien immobilier d'une valeur de 200 000€. Il souhaite vendre ce bien en viager (viager sur une tête). Il souhaite avoir un bouquet de 60 000€.

Hypothèses simplificatrices : inflation nulle (pas d'actualisation) et pas de revalorisation de la rente.

M. X est un homme de 80 ans. D'après les tables de mortalité, il lui reste environ 7 ans à vivre. Le coefficient diviseur correspondant à son âge est de 6,723.

- **Cas d'un viager libre** : la rente annuelle correspondra à (200 000-60 000)/6,723, soient 20 824 euros par an et donc 1 735 euros par mois.

- **Cas d'un viager occupé** : il est nécessaire de décompter de la valeur du bien le montant des loyers qui serait normalement perçu pour un bien équivalent (notamment même superficie et même localisation). Pour un loyer de 800 euros mensuels sur 7 ans, la valeur à décompter est alors égale à : 67 200 euros (800*7*12). La valeur décotée du bien s'élève à : 132 800€ (200 000-67 200). En tenant compte de cette valeur décotée, la rente annuelle pour un viager occupé est donc égale à : (132 800-60 000)/6,723= 10 828€. La rente mensuelle s'élève alors à 902€.

Age du vendeur	Coefficient Diviseur (espérance de vie*)
60	12,702
61	12,412
62	12,117
63	11,818
64	11,516
65	11,212
66	10,905
67	10,597
68	10,287
69	9,977
70	9,667
71	9,358
72	9,051
73	8,745
74	8,442
75	8,143
76	7,848
77	7,558
78	7,273
79	6,995
80	**6,723**
81	6,458
82	6,201
83	5,952
84	5,711

***Données INSEE de 2009**.

Partie II

Les mathématiques au fondement de l’assurance

1.1 Les spécificités du métier

Le secteur de l’assurance est caractérisé par l’inversion du cycle de production, et l’utilisation de la loi des grands nombres. En assurance, on fixe le prix du produit (i.e. la prime d’assurance) avant que son coût (i.e. le montant de la prestation versée) ne soit connu => utilisation d’outils statistiques.

L'assurance repose sur le principe de mutualisation des risques. L'assurance repose sur les contrats aléatoires.

Il n'est alors pas surprenant de voir surgir des théorèmes de probabilité lorsque l'on tente de quantifier le résultat d'un assureur. Car si ce dernier espère faire un bénéfice, il n'est pas impossible (ou improbable) qu'il fasse une perte.

En effet, si l'assureur ne vendait qu'un contrat, l'opération se réduirait à un pari : si le risque n'advient pas, l'assureur réalise un petit bénéfice (en encaissant la prime), mais, dans le cas contraire, il pourrait faire une perte (très) importante.

Ce pari pourrait alors aisément causer la faillite de l'assureur. Afin de l'éviter, il va essayer de réunir un grand nombre d'assurés, et réaliser une opération de mutualisation : les primes reçues de tous vont permettre d'indemniser les plus malchanceux.

1.2 Les conditions de l'assurabilité

⇒ **une expérience statistique (ou possibilité d'une approche par benchmark)**
⇒ **une nécessaire sécurité juridique**
⇒ **un aléa :** Un contrat d'assurance est un contrat dit aléatoire. C'est-à-dire qu'il dépend du caractère incertain (réalisation ou date de survenance) d'un événement. La présence d'un aléa est donc nécessaire pour la validité du contrat d'assurance et l'obligation pour une compagnie d'indemniser la victime. L'aléa doit exister au moment même de la formation du contrat d'assurance. En cas d'absence d'aléa, le contrat est annulé.

Exemple: lorsqu'un contrat d'assurance-vie est souscrit à un moment où l'assuré est déjà atteint d'une maladie dont l'issue mortelle est quasi certaine, on considère que l'aléa n'existe pas et le contrat est donc annulé. Attention, l'aléa subsiste si l'invalidité intervient postérieurement à signature du contrat, même si elle a pour origine une maladie antérieure.

Les sinistres volontaires :
Lorsque l'assuré provoque volontairement le dommage, l'aléa disparaît et par conséquent l'événement provoque la nullité du contrat d'assurance. Il s'agit alors de la faute intentionnelle de l'assuré (Article L 113-1 du code des assurances).

Cas particulier : le suicide
L'assurance en cas de décès est nulle si l'assuré se donne volontairement la mort au cours de la 1ere année du contrat.

1.2 Les conditions de l'assurabilité

L'assurance est possible pour un ensemble fermé de risques.

Il est donc nécessaire de délimiter le champ des garanties offertes:

- dans leur objet ;
- dans leur étendue ;
- dans leur application dans le temps ;
- dans leur montant.

L'inassurabilité de certains risques

- Du fait de la loi : amende, dommage provenant de la faute intentionnelle
- De l'absence de prévisibilité :
  - ➢ impossibilité d'identifier et de quantifier le montant des pertes;
  - ➢ risque de développement : risque indécelable au moment où l'activité génératrice est exercée.
- De l'absence d'aléa:
  - ➢ décision économique de l'assuré ;
  - ➢ refus deprendre des mesures évitant un dommage inéluctable ;
  - ➢ connaissance par l'assuré au moment de la souscription du contrat du sinistre.

1.3 Les contraintes économiques

1.3.1 L'inversion du cycle de production

Dans l'industrie et les services:

1. Fabrication du produit ou service (décaissement)
2. Vente du produit

Dans l'assurance et la réassurance :

1. Vente du produit (encaissement)
2. Règlement des sinistres (décaissement)

Conséquence pour l'assureur : Fixation du prix du produit avant d'en connaitre le coût

1.3 Les contraintes économiques

1.3.2 La mutualisation des risques

Partage sur l'ensemble d'une population d'assurés du coût des sinistres touchant quelques éléments de cette population. La population doit être suffisamment nombreuse afin que le coût de l'assurance soit économiquement supportable pour chacun.

Pour réduire la volatilité des risques, la mutualisation doit s'effectuer sur des segments de populations homogènes, présentant des risques de même nature et de même niveau. Cette segmentation permet de proposer des tarifs ajustés à chaque type de population.

La question du coût supportable : une analogie avec l'industrie pharmaceutique

L'industrie pharmaceutique détermine ses prix «en fonction des capacités économiques du marché».
Exemple du prix d'un traitement pour traiter l'hépatite C (cure standard de 12 semaines de Sofosbuvir) qui coûte :

- 41 000€ en France ;
- $67 000 (59 000€) aux États-Unis ;
- 4 000€ en Thaïlande ;
- et 700€ en Égypte.

1.3 Les contraintes économiques

1.3.3 La problématique des branches à développement long

Du point de vue du risque : un délai important peut exister entre l’exposition au risque et la manifestation du sinistre résultant de cette manifestation.
Du point de vue de la responsabilité : un délai important entre le fait générateur et la reconnaissance de la responsabilité (expertises, procédures, etc.).

1.3.4 Une sécurité réglementaire et juridique

- L’activité d’assurance suppose de maîtriser les engagements (provisions,…). D’où une nécessaire stabilité juridique pour permettre aux assureurs d’apprécier correctement leurs engagements sur le long terme.
- L’évolution du cadre juridique ne doit pas mettre en péril la solvabilité des compagnies d’assurances en créant de nouvelles responsabilités non prévues.
- Une nécessaire prévisibilité.

Exemple d’une forte inflation juridique avec le « *blood money » en* l’Arabie Saoudite : en 2011, le pays à multiplié par 3 le prix de l’indemnité à payer (*diya*) à la victime le faisant passer de $26 666 à $80 000.

2. Les fondements mathématiques de l’assurance

L'assurance repose sur le principe de mutualisation des risques. L'assurance repose sur les contrats aléatoires.

Il n'est alors pas surprenant de voir surgir des théorèmes de probabilité lorsque l'on tente de quantifier le résultat d'un assureur. Car si ce dernier espère faire un bénéfice, il n'est pas impossible (ou improbable) qu'il fasse une perte.

En effet, si l'assureur ne vendait qu'un contrat, l'opération se réduirait à un pari : si le risque n'advient pas, l'assureur réalise un petit bénéfice (en encaissant la prime), mais, dans le cas contraire, il pourrait faire une perte (très) importante.

Ce pari pourrait alors aisément causer la faillite de l'assureur. Afin de l'éviter, il va essayer de réunir un grand nombre d'assurés, et réaliser une opération de mutualisation : les primes reçues de tous vont permettre d'indemniser les plus malchanceux.

2.8 Les fondements mathématiques de l'assurance

Considérons des variables indépendantes X_1, X_2,..., X_n, et de même espérance $\boldsymbol{E(X_i) = \mu}$ finie, nous avons alors, lorsque $n \to \infty$, quel que soit $\varepsilon > 0$:

$P[\ |S_n - n\mu| > n\varepsilon\ ] \to 0$ avec $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

En termes plus assuranciels, la probabilité que la différence entre le coût moyen (par contrat) et la prime pure soit plus petite que n'importe quelle constante arbitraire tend vers 0 (événement certain) lors que la taille du portefeuille augmente à l'infini

Utilisation : Lorsque l'on construit une table de mortalité, la fréquence de décès à un âge donné doit être très proche de la probabilité de décéder à cet âge si l'échantillon est suffisamment grand.

La LGD ne parle pas de risque que l'on peut associer à la variance ici. L'idée que la mutualisation réduit le risque ne vient du théorème central limite.

■ **Le théorème central limite**

Théorème : Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées.
Supposons de plus : $E(X_i) = \mu$ et $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$ finie.

Nous avons alors lorsque $n \to \infty$, quel que soit β :
$$P\left[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \beta\right] = \Phi(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\beta} e^{\frac{x^2}{2}} dx$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

C'est essentiellement à cause de ce théorème que la loi normale est autant présente en statistique.

Interprétation : si les risques sont indépendants, homogènes et de variance finie, alors la loi de la charge totale est approximativement gaussienne.

On peut alors en déduire toutes les mesures de risques possibles (ce qui est fait dans la formule standard de Solvabilité II).

■ **Le théorème central limite**

Les applications de ces résultats en assurance

Un contrat d'assurance garantit le versement d'un capital de 20 000€ en cas de décès de l'assuré pendant l'année souscrit par 10 000 assurés, et que chacun a une probabilité de 1% de décéder dans l'année (noté par la suite p).

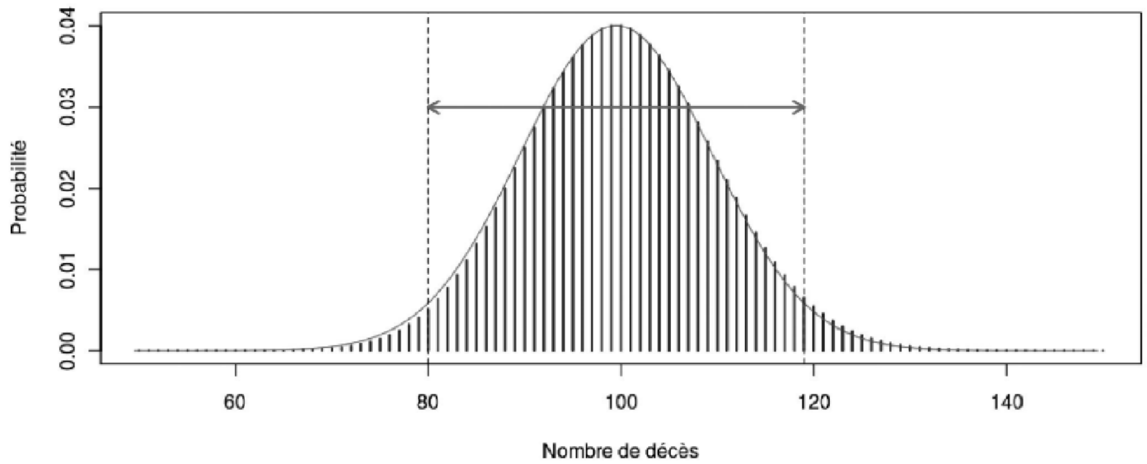
L'espérance mathématique du nombre de décès est 100, donc le nombre de décès est une variable aléatoire, centrée sur 100.

Le coût moyen (espéré d'une certaine manière par l'assureur) total sera alors de 2M€, soit 200€ par assuré (=prime pure).

Le théorème central limite nous dit que le coût total pour l'assuré suit approximativement (car le nombre de 10 000 assurés peut être supposé comme « très grand ») une loi normale.

On peut ainsi montrer qu'il y a 95% de chances pour que le nombre de personnes qui décèdent soit compris entre 80 et 120 (voir figure 1), ou 95% de chances pour que le coût total pour l'assuré soit compris entre 1,6 million et 2,4M€, soit 2M ± 20 %.

Figure 1. Distribution du nombre de personnes touchées



La loi des grands nombres nous garantit que la différence relative tend vers 0 lorsque la taille du portefeuille tend vers l'infini. Formellement, les bornes de la région de confiance à 95% sont comprises dans l'intervalle : $\left\{-2\frac{\sqrt{\frac{1}{p}-1}}{\sqrt{n}};+2\frac{\sqrt{\frac{1}{p}-1}}{\sqrt{n}}\right\}$

Ou encore $\left\{-\frac{2}{\sqrt{np}};+\frac{2}{\sqrt{np}}\right\}$

si la probabilité est faible (ici ±20%).

■ Le théorème central limite

Une autre application simple de cette loi est la détermination des fonds propres nécessaires pour éviter le risque de ruine. Supposons que l'assureur souhaite avoir une probabilité de ruine de α = 0,1% et qu'il tarifie en demandant aux assurés de payer la prime pure. Alors le montant de fonds propres nécessaire pour assurer ce niveau de solvabilité est *u* tel que :

$$\alpha = P[S_n > n\mu + u] = P\left[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right] = 1 - \phi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Ou encore : $$u = \sigma\sqrt{n} \times \phi^{-1}(1-\alpha) \approx 3\sigma\sqrt{n}$$

Dans le cas de l'assurance décès $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$ (écart type d'une loi de Bernoulli), et donc, les fonds ramenés au chiffre d'affaire s'écrivent comme :

$$\frac{u}{np} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{np}\sqrt{n} \cdot \phi^{-1}(1-\alpha) = \frac{3}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{1}{p}} = \frac{3}{\sqrt{np}} = 30\%$$

On remarquera que le CA croît proportionnellement à la taille du portefeuille avec un facteur *n*, mais le besoin de fonds propres croît avec un facteur racine de *n* : le risque croît moins vite que le CA.

Ces deux théorèmes peuvent s'appliquer uniquement si :

- des risques indépendants entre eux ;
- des risques homogènes au sein du portefeuille ;
- des risques de moyenne et de variance finies.

Dans la réalité, la conjonction de toutes ces hypothèses ne se rencontrent que rarement.

■ La tarification en assurance non-vie

On définit une classe *C* de contrats, dont le cardinal est compris entre 1 et le nombre de contrats du portefeuille d'une entreprise d'assurance dans une branche donnée. Les contrats sont indistincts dans cette branche, c'est à dire que l'on considère qu'ils sont tous identiques (d'où l'importance du choix des variables tarifaires pour toute segmentation d'un portefeuille existant).

Dans le modèle collectif (ou composé), la charge sinistre *S* de *C* est fonction du nombre de sinistres *N* et des montants de ceux ci X_i :

Propriété . *Soient* N*, la v.a (représentant la fréquence) et* $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ n *v.a (représentant la sévérité) identiquement distribuées (de même loi que* X*) de variance finie.* N *et* $(X_i)_{i=1,\dots,k}$ *sont supposées être indépendantes.*

Nous avons alors : $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[N]$$

$$var(S) = \mathbb{E}[N]\ var(X) + \mathbb{E}(X)^2\ var(N)$$

Indépendance de la fréquence et des coûts.

■ La tarification en assurance non-vie

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] \\
&= \sum_{n,(x_1,\ldots,x_n)} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \mathbb{P}[N=n, X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n] \\
&= \sum_{n} \mathbb{P}[N=n] \sum_{(x_1,\ldots,x_n)} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \mathbb{P}[X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n] \\
&= \sum_{n} \mathbb{P}[N=n]\ E[X_1+\ldots+X_n] \\
&= E[X_1]\ \sum_{n} n\ \mathbb{P}[N=n] \\
&= \mathbb{E}[X]\times\mathbb{E}[N]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
var(S) &= \mathbb{E}[S^2]-\mathbb{E}[S]^2 \\
&= \mathbb{E}[N^2]\mathbb{E}[X]^2+\mathbb{E}[N]var(X)-(\mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X])^2 \\
&= \left(\mathbb{E}[N^2]-\mathbb{E}[N]^2\right)\mathbb{E}[X]^2+\mathbb{E}[N]\left(\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2\right) \\
&= var(N)\mathbb{E}[X]^2+\mathbb{E}[N]var[X]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2\right] \\
&= \sum_{n,(x_1,\ldots,x_n)} \left(\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j\right) \mathbb{P}[N=n, X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n] \\
&= \sum_{n} \mathbb{P}[N=n] \sum_{(x_1,\ldots,x_n)} \left(\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j\right) \mathbb{P}[X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n] \\
&= \sum_{n} \mathbb{P}[N=n]\ \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^{n} X_i X_j\right] \\
&= \sum_{n} \mathbb{P}[N=n]\ \mathbb{E}\left[\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} X_i X_j+\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2\right] \\
&= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[N=n]\left(n(n-1)\mathbb{E}[X]^2+n\mathbb{E}[X^2]\right)
\end{aligned}$$

3. La méthode Monte Carlo

Théorème (Loi des grands Nombres) : Soit $(Y_i)_{i\in N}$ une suite de variables aléatoires.

3 Hypothèses sur $(Y_i)_{i\in N}$:

- Indépendance ;
- distribution identique (comme une v.a. Y) ;
- $E[\,|\,Y\,|\,] < +\infty$

Alors presque sûrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{Y}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(Y_1 + \ldots + Y_n) = E[Y]$

Méthode : pour calculer $\mu = E[f(X)]$

- Simuler N variables aléatoires $(X_n)_{1\le n\le N}$ i.i.d de même loi que X
- Poser : $\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_i) = \frac{f(X_1) + \ldots + f(X_N)}{N}$

Grâce à la loi des grands nombres, nous avons pour un N suffisamment grand : $\hat{\mu}_N \approx \mu$

Méthode Monte Carlo

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_i) = \frac{f(X_1)+\ldots+f(X_N)}{N}$$

$$\hat{\sigma}_N = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(f(X_i)-\hat{\mu}_N)^2}$$

Erreur donnée par intervalle de confiance avec niveau de confiance α avec c_α ,le quantile d'ordre 1-α/2 de la loi Normale:

$$I_{\alpha,N} = [\hat{\mu}_N - c_\alpha \frac{\hat{\sigma}_N}{\sqrt{N}}, \hat{\mu}_N + c_\alpha \frac{\hat{\sigma}_N}{\sqrt{N}}]$$

Pour diminuer la taille de IC, on peut :

- Diminuer le niveau de confiance α ;
- Augmenter N ;
- Diminuer θ => voir théorie sur la réduction de la variance.

Savoir utiliser une table de quantiles

On cherche le quantile à 97,5% pour la N(0,1). Cela revient à trouver a tel que $P[Z \le a] = 0{,}975$

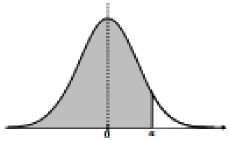
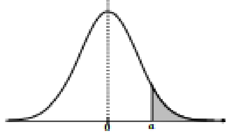
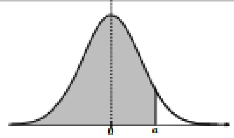
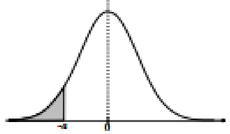
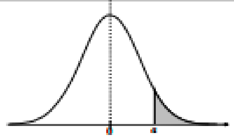
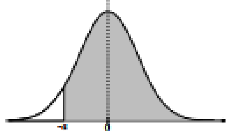
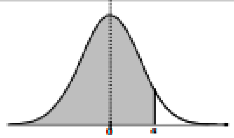
On lit la table à l'envers :

	…	$0,06$	…
⋮			
$1,9$	…	0.9750	…
⋮			

Donc : $P[Z \le 1{,}96] = 0{,}975$

Le quantile recherché est donc 1,96.

Pour n'importe quel a>0 :

I	$\mathbb{P}(X \le a)$				$\Rightarrow$ table
II	$\mathbb{P}(X \ge a)$		$= 1 -$		$\Rightarrow$ cas I
III	$\mathbb{P}(X \le -a)$		$=$		$\Rightarrow$ cas II
IV	$\mathbb{P}(X \ge -a)$		$=$		$\Rightarrow$ cas I

Savoir utiliser une table de quantiles

Quantiles de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0	$-\infty$	-3.090	-2.878	-2.748	-2.652	-2.576	-2.512	-2.457	-2.409	-2.366
0.01	-2.326	-2.290	-2.257	-2.226	-2.197	-2.170	-2.144	-2.120	-2.097	-2.075
0.02	-2.054	-2.034	-2.014	-1.995	-1.977	-1.960	-1.943	-1.927	-1.911	-1.896
0.03	-1.881	-1.866	-1.852	-1.838	-1.825	-1.812	-1.799	-1.787	-1.774	-1.762
0.04	-1.751	-1.739	-1.728	-1.717	-1.706	-1.695	-1.685	-1.675	-1.665	-1.655
0.05	-1.645	-1.635	-1.626	-1.616	-1.607	-1.598	-1.589	-1.581	-1.572	-1.563
0.06	-1.555	-1.546	-1.538	-1.530	-1.522	-1.514	-1.506	-1.498	-1.491	-1.483
0.07	-1.476	-1.468	-1.461	-1.454	-1.447	-1.440	-1.433	-1.425	-1.419	-1.412
0.08	-1.405	-1.398	-1.392	-1.385	-1.379	-1.372	-1.366	-1.359	-1.353	-1.347
0.09	-1.341	-1.335	-1.329	-1.323	-1.316	-1.311	-1.305	-1.299	-1.293	-1.287
0.9	1.282	1.287	1.293	1.299	1.305	1.311	1.316	1.323	1.329	1.335
0.91	1.341	1.347	1.353	1.359	1.366	1.372	1.379	1.385	1.392	1.398
0.92	1.405	1.412	1.419	1.425	1.433	1.440	1.447	1.454	1.461	1.468
0.93	1.476	1.483	1.491	1.498	1.506	1.514	1.522	1.530	1.538	1.546
0.94	1.555	1.563	1.572	1.581	1.589	1.598	1.607	1.616	1.626	1.635
0.95	1.645	1.655	1.665	1.675	1.685	1.695	1.706	1.717	1.728	1.739
0.96	1.751	1.762	1.774	1.787	1.799	1.812	1.825	1.838	1.852	1.866
0.97	1.881	1.896	1.911	1.927	1.943	1.960	1.977	1.995	2.014	2.034
0.98	2.054	2.075	2.097	2.120	2.144	2.170	2.197	2.226	2.257	2.290
0.99	2.326	2.366	2.409	2.457	2.512	2.576	2.652	2.748	2.878	3.090

Figure 1: Table des quantiles de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. La première ligne et la première colonne fournissent la valeur de α quand on cherche t tel que $\mathbb{P}\{Z \leq t\} = \alpha$ lorsque $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, lorsque l'on cherche t tel que $\mathbb{P}\{Z \leq t\} = 0.975$, on regarde la ligne correspondant à 0.97 et la colonne correspondant à 0.005, on trouve alors à l'intersection la valeur $t = 1.960$.

Exemple : pour $\alpha = 5\%$ et $Z \sim N(0,1)$ alors le quantile d'ordre $1 - \frac{5\%}{2} = 0{,}975$ est de 1,96 car :

$$P[Z \leq 1{,}96] = 0{,}975 => C_{0{,}975} = 1{,}96$$

Ainsi $\left[\bar{X}_n - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
est l'intervalle de confiance de µ de confiance 0,95

$$\sigma\sqrt{n} \times \phi^{-1}(99{,}99\%) \approx 3\sigma\sqrt{n}$$

La méthode Monte Carlo pour simuler de lois non uniformes

On suppose que X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition $F(t) = P(X \leq t)$, alors F est une fonction croissante continue à droite. On définit la fonction pseudo-inverse de F sur [0,1] par :

$$F^{-1}(u) = \inf\left\{y \in R \,/\, F(y) \geq u\right\}$$

Rappel : *X* suit une loi uniforme sur [*a*,*b*] si sa densité *f* est : $f_X(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$

Lemme d'inversion : Si *U* suit une loi uniforme sur [0,1], alors $F_Y^{-1}(U)$ et Y ont la même loi.

Démonstration : $F_{F_Y^{-1}(U)}(y) = P[F_Y^{-1}(U) \leq y] = P[U \leq F_Y(y)] = \int_{-\infty}^{F_Y(y)} 1_{[0,1]}(x)dx = F_Y(y)$

Par conséquent si F est explicite, on calculera F^{-1} et pour générer un échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi de fonction de répartition F, on générera un échantillon $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de variables de loi uniforme sur [0,1] et on posera $X_i = F^{-1}(U_i)$.

Exemple : Si *X* suit une loi exponentielle de paramètre λ de densité $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ et de fonction de répartition $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$.

Si $U \in [0,1]$, nous avons : $F^{-1}(u)=-\dfrac{\ln(1-u)}{\lambda}=-\dfrac{\ln(u)}{\lambda}$

Soit *U*, une variable aléatoire sur *[0,1]*, la variable *X* a donc la même loi que $-\dfrac{\ln(U)}{\lambda}$

On peut maintenant générer échantillon *n*-échantillons de loi exponentielle sur R : $(X_1,\ldots,X_n)=(-\dfrac{\ln(U_1)}{\lambda},\ldots,-\dfrac{\ln(U_n)}{\lambda})$

```
> myrexp <- function(n, lambda)
+     return(-log(runif(n)) / lambda)
>
> ## Simulation d'une Exp(5)
> lambda <- 5
> x <- myrexp(500, lambda)
>
> ## Comparaison histogramme / densite
> hist(x, freq = FALSE)##freq = FALSE pour aire = 1
> curve(dexp(x, lambda), xlim = c(0, max(x)), col = "red", add = TRUE)
```

Exercice 1

Partie 1 : Calcul d'une prime pure

Le montant de sinistre causé par une police du portefeuille est de la forme :

$$S = \begin{cases} 0 \text{ avec la probabilité } 0{,}9 \\ X \text{ avec la probabilité } 0{,}1 \end{cases}$$

$$P[X > x] = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}, x > 0$$

1.1 Donnez la définition de la prime pure.

1.2 Calculez la prime pure pour cette police.

1.3 Calculez le montant de la prime nette de façon à ce que la probabilité que le montant de sinistre S dépasse ce montant (le montant de la prime nette) soit de 1%.

<u>Application numérique :</u>

$$(0{,}1)^{-2/3} - 1 = 3{,}64$$

$$\phi^{-1}(0{,}999) \approx 3{,}09$$

$$\phi(5) \approx 2{,}87.10^{-7}$$

avec Φ, la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Exercice 1

Partie 2 : Application du théorème central-limite

Soit un portefeuille comprenant 10 000 polices dont la charge annuelle totale S des sinistres admet les caractéristiques suivantes :

$$E[S] = 10.000$$
$$Var(S) = 1.000.000$$

2.1 Calculez la probabilité que S excède 15.000 à l'aide de ce théorème.

2.2 Calculez x_{min}, le seuil que S ne peut dépasser qu'avec une probabilité de 0,1% (ie, le quantile d'ordre 0,999 de S).

Correction :

1.1 La prime pure est le montant du sinistre moyen auquel devra faire face l'assureur pour le risque. Mathématiquement, la prime pure est égale à l'espérance des pertes.

1.2 La prime pure est :

$$E[S] = 0{,}1 \times E[X] = 0{,}1 \times \int_0^{+\infty} p[X > x]dx = 0{,}1 \times \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{3}{2}} dx = 0{,}1 \times \left[\left(\frac{-2}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{+\infty} = 0{,}2$$

1.3 Calculons à présent le montant de la prime nette p_{pure} de façon à ce que probabilité que le montant de sinistre S dépasse ce montant soit au plus de 1%. Nous avons :

$$P[S > p_{nette}] = P[S > 0] \times P[X > p_{nette}] = 0{,}1 \times \left(\frac{1}{1+p_{nette}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Ainsi, la prime nette recherchée doit être telle que :

$$0{,}1 \times \left(\frac{1}{1+p_{nette}}\right)^{\frac{3}{2}} = 0{,}01 \Leftrightarrow p_{nette} = (0{,}1)^{-2/3} - 1 = 3{,}6416$$

2.1 $$P[S > 15.000] = P[\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} > \frac{15.000 - 10.000}{1.000}] \approx 1 - \phi(5) = 2,87.10^{-7}$$

2.2 Notons x_{min}, le seuil que S ne peut dépasser qu'avec une probabilité de 0,1%. Alors nous avons :

$$0,1\% = P[S > x_{min}] = P[\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} > \frac{x_{min} - 10.000}{1.000}$$

$$\Leftrightarrow 0,001 = 1 - P[\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{x_{min} - 10.000}{1.000}]$$

$$\Leftrightarrow 0,001 = 1 - \phi\left(\frac{x_{min} - 10.000}{1.000}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_{min} - 10.000}{1.000} = \phi^{-1}(0,999)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_{min} - 10.000}{1.000} = 3,09$$

$$\Leftrightarrow x_{min} = 3,09 \times 1.000 + 10.000$$

$$\Leftrightarrow x_{min} = 13.090$$

Exercice 2 : Application du TCL pour déterminer les fonds propres nécessaires afin d'éviter le risque de ruine

Un contrat d'assurance garantit le versement d'un capital C en cas de décès de l'assuré pendant l'année souscrit par n assurés (> 10 000), et que chacun a une probabilité p de décéder dans l'année. Notons N, la variable aléatoire modélisant le nombre de décès, CM le coût moyen global pour l'assureur et Xi, la variable aléatoire modélisant la sinistralité d'un individu i et µ, la prime pure du contrat tel que : E(Xi) = µ et Var(Xi) = σ^2

1. Calculer E[N], CM et µ en fonction de p, n et C.
2. Supposons que l'assureur souhaite avoir une probabilité de ruine *α=0,1%* et qu'il tarifie le contrat en demandant aux assurés de payer le montant μ. A partir du théorème centrale limite (en vérifiant les hypothèses), déterminez le montant de fonds propres nécessaire pour assurer un certain niveau de solvabilité noté *u* en notant :

   $$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

3. Calculer le rapport $\frac{u}{E[N]}$ sachant que dans ce cas (l'assuré décès), nous avons : $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$

AN : $\phi^{-1}_{N(0,1)}(0{,}999) \approx 3$

Loi binomiale de paramètre *n* (expériences réalisées)=1 et *p* la probabilité de succès

Correction :

1.1 $$E[N] = p \times n$$
$$CM = E[N] \times C = p \times n \times C$$
$$\mu = \frac{CM}{n} = p \times C$$

1.2 Hypothèses TCL vérifiées : X_i, v.a indépendante, identiquement distribué et n très grand.

$$\alpha = P[S_n > n\mu + u] = P[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{u}{\sigma\sqrt{n}}] = 1 - \phi(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}})$$

On a donc : $u = \sigma\sqrt{n} \times \phi^{-1}(1-\alpha) \approx 3\sigma\sqrt{n}$

1.3 $$\frac{u}{np} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{np}\sqrt{n} \cdot \phi^{-1}(1-\alpha) = \frac{3}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{1}{p}} = \frac{3}{\sqrt{np}} = 30\%$$

Partie III

Petits calculs autour des obligations

1. Introduction

1.1 Les différents types de risque

Le risque de taux

Les institutions financières sont extrêmement sensibles à toute fluctuation des taux d’intérêt et par conséquent à toute variation du prix des actifs financiers qu’elles ont pour vocation de négocier.

- Pour les investisseurs, le risque de taux d’intérêt est celui : d’une dévalorisation du patrimoine ou d’une diminution des revenus du fait des fluctuations de taux d’intérêt ;
- Pour les emprunteurs, le risque de taux d’intérêt est celui : d’une revalorisation du patrimoine ou d’une augmentation des revenus du fait des fluctuations de taux d’intérêt

On peut le définir comme le risque engendré par une variation des taux d’intérêt :
- un risque de marge correspondant à des placements de ressources dans des emplois de mêmes caractéristiques avec une marge (spread) lorsque les opérations adossées sont à taux variables
- un risque de placement concernant la valeur de titres porteurs d'intérêts à taux fixes.

Ce risque concerne aussi bien des positions existantes que futures. En effet, une baisse des taux pénalise une société ayant contracté un emprunt à taux fixe, cette baisse représentant alors une perte d’opportunité pour l’entreprise. Une entreprise désirant effectuer un emprunt dans le futur risque de voir les taux croître d’ici là.

1. Introduction

1.1 Les différents types de risque

Le risque de défaut

Par risque de défaut, on entend la qualité de crédit d’une entreprise (ou d’un état), c’est-à-dire une mesure de la capacité et de la volonté d’une entreprise à rembourser sa dette à échéance et en totalité.

En d’autres termes, il s’agit de la probabilité selon laquelle une entreprise cesse de rembourser sa dette bancaire ou obligataire, ou bien la restructure selon des conditions qui représentent une perte pour les investisseurs.
La probabilité de remboursement d'un émetteur est mesurée par des agences de notations.

À l'échelle mondiale, il existe trois principales agences de notations : Standard&Poor's, Moody's et Fitch. Ces dernières analysent la situation économique et financière de chaque émetteur et attribuent une note à chaque produit financier, dont les obligations. Plus la note adossée à un titre obligataire est élevée, plus le risque est faible. Néanmoins, plus le risque pris est important, plus le rendement espéré est élevé.

Le risque souverain est le risque de défaut étatique. Exemple : défaut partiel de la Grèce en 2002.

1. Introduction

1.1 Les différents types de risque

Le risque de liquidité

Le risque de liquidité correspond à celui qu'un investisseur pourrait prendre en détenant une ou plusieurs obligations dont le volume de transactions sur les marchés est faible. Autrement dit, si il décide de vendre son obligation, il fait face à un risque de liquidité s'il ne trouve pas de contrepartie prête à la racheter. Plus le volume de transactions d'une obligation est important, plus le risque de liquidité est faible.

Le risque de change

Certaines obligations sont libellées dans des devises différentes. Par exemple, si un investisseur détient des bons du Trésor américains, ce dernier s'expose à un risque de change. L'évolution du taux de change peut être favorable ou défavorable pour l'investisseur.

Le risque d'inflation

Tous les épargnants et les investisseurs doivent faire face à ce risque. Si l'inflation augmente, la valeur et les revenus d'un investissement se dégradent nécessairement. C'est pourquoi certaines obligations sont indexées sur le taux d'inflation. Elles garantissent à leurs détenteurs un réajustement quotidien de la valeur de leur investissement en fonction de l'évolution de l'inflation.

1. Introduction

1.1 Les différents types de risque

Le risque de transformation

Le risque de transformation est le risque qui découle d'un décalage, à une date donnée, entre les montants et les durées respectives des emplois et des ressources.

Ce risque peut induire 2 autres risques :

- **un risque de liquidité** : la banque peut craindre de ne pas trouver les liquidités pour fermer sa position.
- **un risque de taux** : les conditions auxquelles elle se procurera (ou placera) les liquidités dont elle aura besoin, peuvent lui être très défavorables.

1. Introduction

1.2 Les differents indices

TMM (Taux Mensuel Moyen) ou T4M : C'est une moyenne arithmétique des TMP journaliers, le dernier taux connu étant retenu pour les jours sans marché (samedi, dimanche…). Il est calculé par l'Association Française des Banques. Le TAM (Taux Annuel Monétaire) est obtenu en capitalisant mensuellement les TMM des 12 derniers mois. Il est publié par la Caisse des Dépôts et Consignations.

EONIA (Euro OverNight Interest Average) : C'est la référence du prix de l'argent au jour le jour sur le marché interbancaire de la zone euro depuis le 04/01/1999. Il est calculé par une moyenne, pondérée par les volumes, du taux des transactions pratiquées par 57 banques de la zone euro. Il est publié par la Fédération Bancaire Européenne à 19 heures chaque jour ouvré.

1. Introduction

1.2 Les differents indices

…IBOR (... Interbank Offered Rate) : Les taux "...IBOR " sont des taux calculés soit à Francfort (ils sont alors appelés EURIBOR) pour l'euro, soit à Londres (ils sont alors appelés LIBOR) pour le dollar US, la livre sterling, le franc suisse, soit encore sur des places domestiques pour la couronne danoise (ils sont alors appelés CIBOR), la couronne suédoise (ils sont alors appelés STIBOR), la couronne tchèque (ils sont alors appelés PRIBOR) etc ..

EURIBOR (Europe Interbank Offered Rate) est calculé tous les jours sur des durées différentes (Euribor 1 mois, Euribor 3 mois…) en effectuant la moyenne arithmétique simple des taux offerts à 11 heures à des banques de première catégorie.

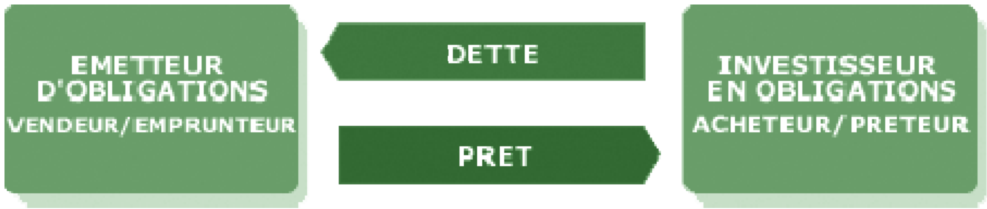
TBB (Taux de Base Bancaire) : Ce taux appartient au marché du crédit, il est propre à chaque établissement (mais généralement harmonisé). Ce taux n'est pas directement lié aux taux de marché constaté mais reste très utilisé en pratique au niveau des PME - PMI.

2. Les obligations

2.1 Présentation

Une obligation est un titre de créance négociable. En effet, quand un investisseur achète une obligation, il prête en réalité une somme d'argent à l'émetteur de l'obligation et celui-ci contracte une dette.

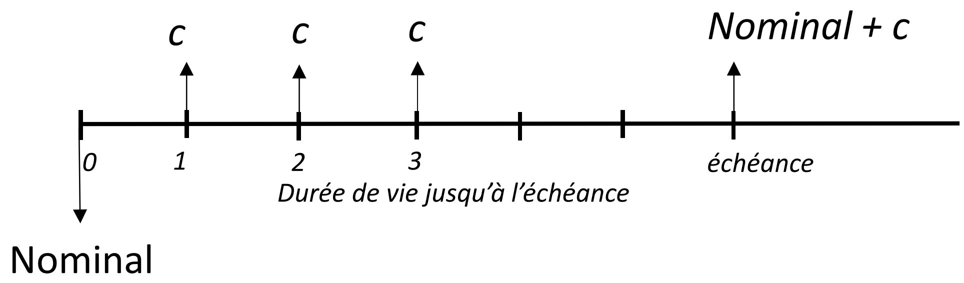
Par conséquent, l'émetteur (ou vendeur de l'obligation) est emprunteur et l'investisseur (ou acheteur de l'obligation) est créancier (prêteur). Ce créancier, qui est « épargnant » est donc détenteur d'un actif financier qu'il peut négocier (vendre) sur le marché financier à tout moment. C'est cette négociabilité imposée par la loi qui distingue l'obligation des autres emprunts tels que ceux contractés auprès des banques ou d'une simple reconnaissance de dette.



2. Les obligations

2.1 Présentation

Le prix d'émission de l'obligation correspond à l'argent que l'investisseur prête à l'émetteur. Et, comme dans tous prêts, lorsque l'on achète une obligation, l'emprunteur verse à l'acheteur des intérêts pendant toute la durée du prêt. Ces intérêts versés en général annuellement s'appelle coupon. Ensuite, à l'échéance fixée, l'emprunteur rembourse le prêt (le nominal)



La durée d'un prêt s'appelle son échéance. Et les intérêts du prêt payés par l'emprunteur s'appellent le coupon.
Le montant des intérêts payés et la fréquence de paiement des intérêts sont précisés dans les termes spécifiques gouvernant l'émission de l'obligation.

Les obligations sont appelées titres à revenu fixe car à la différence des actions où la rentabilité n'est pas garantie, une entreprise qui émet une obligation s'engage à rembourser le principal plus les intérêts.

2. Les obligations

2.2 La définition mathématique d'une obligation

En situation d'équilibre : $$P_n = \frac{c}{(1+r_1)} + \frac{c}{(1+r_1)(1+r_2)} + \cdots + \frac{c+N}{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)}$$

Avec :
- n : l'échéance de l'obligation ;
- c : le coupon annuel ;
- N : la valeur de remboursement, supposée égale à la valeur nominale et au prix d'émission ;
- r_j : le taux d'intérêt à court terme de l'année j ;
- P_n : le cours de l'obligation.

Le rendement de cette obligation est par définition le taux r tel que :

$$P_n = \frac{c}{(1+r)} + \frac{c}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{c+N}{(1+r)^n}$$

Suite géométrique de raison $(1+r)^{-1}$
Et de premier terme $c(1+r)^{-1}$

$$\Leftrightarrow P_n = c(1+r)^{-1}\frac{1-(1+r)^{-n}}{1-(1+r)^{-1}} + N(1+r)^{-n}$$

$$\Leftrightarrow P_n = c\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n}$$

2. Les obligations

2.3 La définition du risque de taux d'intérêt

Risque en capital : risque d'une dépréciation du patrimoine de l'entreprise liée aux fluctuations des taux d'intérêt
Risque en revenu : risque d'une diminution des revenus de l'entreprise liée aux fluctuations des taux d'intérêt

Gain ou perte = Somme des variations des intérêts perçus - Somme des variations des intérêts versés

Exemple : Obligation à taux fixe in fine

- Valeur nominale : 1000€
- Taux nominal : 10%
- Durée de vie : 10 ans

Calculer le prix *P* de cette obligation :

1) si le taux du marché est à 10%
2) si le taux du marché est à 9%
3) si le taux du marché est à 11%

2. Les obligations

2.3 La définition du risque de taux d'intérêt

$$P_n = c\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n}$$

1) si le taux du marché est à 10% :

$$P = 1000$$

2) si le taux du marché est à 9% :

$$P = 100 \times \frac{1-(1+9\%)^{-10}}{9\%} + \frac{1000}{(1+9\%)^{10}} = 1064{,}19$$

3) si le taux du marché est à 11% :

$$P = 100 \times \frac{1-(1+11\%)^{-10}}{11\%} + \frac{1000}{(1+11\%)^{10}} = 941{,}11$$

2. Les obligations

2.4 Exercices d'application

Exercice 1 : Soit une obligation de nominal 500 euros, au taux de 5%, émise le 25/10/N, remboursable le 25/10/N+5.
Quel était le coupon couru à la date du mardi 22/12/N+3 (date de négociation) ?

Exercice 2 : Soit une obligation de nominal 1 000€, cote du jour 65, coupon couru (en %) : 7,396.
Quel est la valeur total de l'obligation ?

Exercice 3 : Supposons que vous investissiez à l'émission dans une obligation de nominal 1 000€ à un prix d'émission de 995€ avec un taux nominal de 5% pendant 4 ans. Calculez le taux actuariel.

2. Les obligations

2.4 Exercices d'application : correction

Exercice 1 : correction

Nombre de jours du 25/10/N+3 au 22/12/N+3 : (31-25)+30+22 = 58 jours

- Coupon couru (en valeur) : $\frac{500 \times 5\% \times 58}{365} \approx 3{,}97€$
- Coupon couru (en % du nominal) : $\frac{3{,}97}{500} \approx 0{,}794\%$

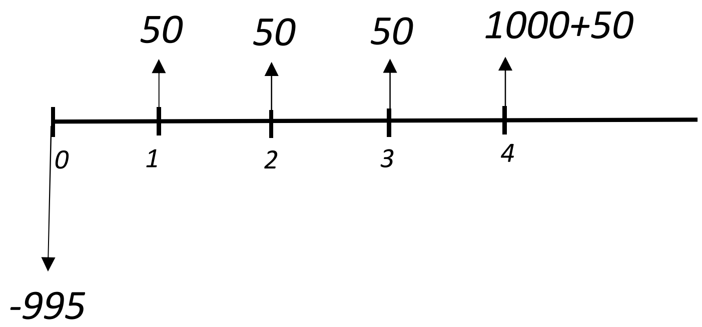
Exercice 2 : correction

$$\text{Valeur totale} \ : \ \frac{(65+7{,}396)}{100} \times 1000 = 723{,}96€$$

2. Les obligations

2.4 Exercices d'application : correction

Exercice 3 : correction



$$VA(prêtée) = VA(remboursée)$$

$$\Leftrightarrow 995 = 50(1+t)^{-1} + 50(1+t)^{-2} + 50(1+t)^{-3} + 50(1+t)^{-4} + 1000(1+t)^{-4}$$

$$\Leftrightarrow 995 = 50(1+t)^{-1}\frac{1-(1+t)^{-4}}{1-(1+t)^{-1}} + 1000(1+t)^{-4}$$

$$\Leftrightarrow 995 = 50\frac{1-(1+t)^{-4}}{t} + 1000(1+t)^{-4}$$

$$\Leftrightarrow t \approx 5{,}1415\%$$

Remarque : La différence entre le taux d'intérêt actuariel de 5,1415% et le taux d'intérêt nominal de 5% s'explique par le montant de la prime d'émission qui est positive (5€).

3. La Sensibilité du prix d'une obligation et les déterminants du risque de taux d'intérêt

3.1 Etude de la sensibilité

Les différents paramètres influençant le prix d'une obligations sont :

- la maturité ;
- le montant du coupon ;
- le niveau initial des taux ;
- le sens de variation des taux ;
- la surcote et la décote des titres financiers.

La sensibilité d'un titre financier à revenu fixe est représentée par les variations de prix qu'il enregistre lors d'une fluctuation de taux d'intérêt. La sensibilité d'un titre financier à revenu fixe est d'autant plus forte que sa durée de vie est grande. La sensibilité d'un titre financier à revenu fixe est d'autant plus forte que son coupon est faible.

Exemple : Trois titres T1, T2, T3 de valeur nominale 1000€ (coupon=100) :

		10%	10,25%
T1	C=10% n=10 ans	1000€	985€ (1,5%)
T2	C=10% n=5 ans	1000€	991€ (0,9%)
T3	C=0% n=5 ans	621€	614€ (1,12%)

3. La Sensibilité du prix d'une obligation et les déterminants du risque de taux d'intérêt

3.2 La duration

Définition : Somme des valeurs actuelles des cash flows du titre c_j, pondérées par leur année de perception et exprimées en pourcentage de la valeur actuelle du titre :

$$D = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{(1+r_j)^j} \times j}{\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{(1+r_j)^j}} = \frac{1}{P} \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{(1+r_j)^j} \times j$$

La duration est d'autant plus forte que :

- la maturité est éloignée ;
- le taux de coupon est faible ;
- le taux d'intérêt est faible.

Interprétation : La duration est en quelque sorte le temps d'attente moyen pour percevoir les flux d'une obligation, pondéré par leur valeur actualisée.

Exemple : Trois titres T1, T2, T3 de valeur nominale 1000€ (coupon=100) :

		10%	D
T1	C=10% n=10 ans	1000€	6,8
T2	C=10% n=5 ans	1000€	4,2
T3	C=0% n=5 ans	621€	5

$$P = c\,\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + (1+r)^{-n}$$

$$\frac{dP}{dr} = -n(1+r)^{-(n+1)}\left(1-\frac{c}{r}\right) + \frac{c}{r^2}\left[(1+r)^{-n} - 1\right]$$

$$D = -\frac{(1+r)}{P}\frac{dP}{dr}$$

(Preuve plus tard…)

3. La Sensibilité du prix d’une obligation et les déterminants du risque de taux d’intérêt

3.3 La volatilité (duration modifiée) V et la sensibilité S

Définition : c’est le rapport de la variation relative du cours d’un titre financier à revenu fixe à une variation du taux d’intérêt. La volatilité V représente le pourcentage de variation du prix d’un titre face à une fluctuation de taux d’intérêt.

Interprétation : Il s'agit de la variation pour 1% de taux (100 points de base) du prix de l'instrument par rapport à son taux actuariel. Comme, pour la plupart des instruments, le prix augmente lorsque les taux diminuent, on considère plutôt le rapport inverse pour la sensibilité :

$$V = \frac{1}{P}\frac{dP}{dr} \quad \text{et} \quad S = -V = -\frac{1}{P}\frac{dP}{dr}$$

Il existe une relation entre la volatilité et la duration :

$$V = -\frac{D}{1+r} \quad \text{et} \quad S = \frac{D}{1+r}$$

Exemple : une obligation ayant une sensibilité de 5 verra sa valeur baisser d'environ 5% si les taux d'intérêts augmentent de 1%, et inversement, sa valeur augmenter d'environ 5% si les taux baissent de 1%.

3. La Sensibilité du prix d'une obligation et les déterminants du risque de taux d'intérêt

3.3 La volatilité (duration modifiée)

cash flows

Démonstration de la relation : $P = \frac{c_1}{(1+r)} + \frac{c_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{c_n}{(1+r)^n}$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{dr} = -\frac{c_1}{(1+r)^2} - \frac{2c_2}{(1+r)^3} - \cdots - \frac{nc_n}{(1+r)^{n+1}} = -\frac{1}{1+r}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{(1+r)^j}\times j$$

La relation entre la volatilité et la duration :

$$V = \frac{dP/P}{dr} \Leftrightarrow V = \frac{dP/dr}{P} \Leftrightarrow V = -\frac{1}{1+r}\times\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{(1+r)^j}\times j}{\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{(1+r)^j}} = -\frac{D}{1+r}$$

La duration suppose :

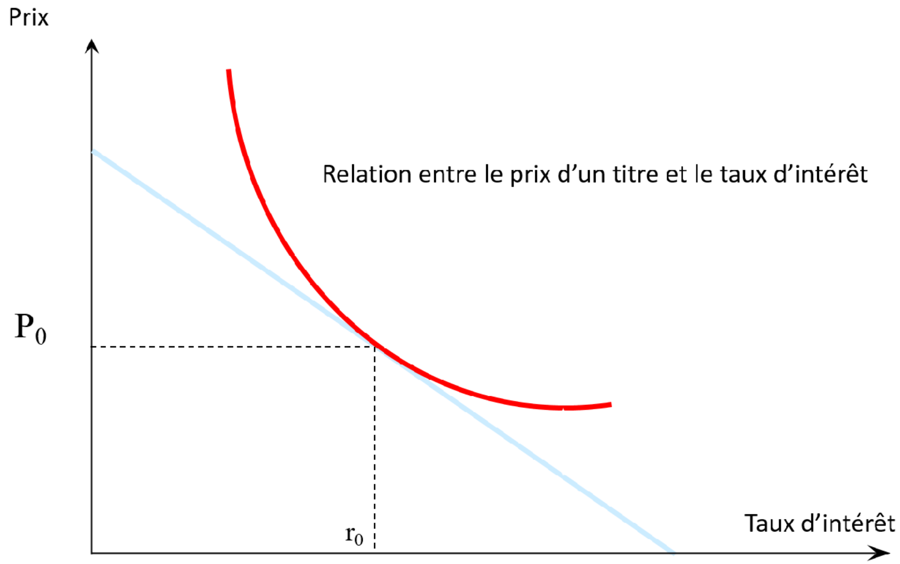
- que la structure par terme des taux d'intérêt est plate ;
- que les déplacements de la structure par terme sont parallèles.

3. La Sensibilité du prix d’une obligation et les déterminants du risque de taux d’intérêt

3.4 La convexité

La duration suppose que la relation entre le prix et le taux d’intérêt est linéaire.
La convexité permet de mesurer l’impact de cette hypothèse : mesurer la stabilité de la volatilité lorsque les taux d’intérêt varient.

Définition : variation de la volatilité induite par une variation du taux de rendement actuariel : $C = \frac{dV}{dr} = \frac{1}{P} \times \frac{d^2 D}{dr^2}$



3. La Sensibilité du prix d'une obligation et les déterminants du risque de taux d'intérêt

3.5 Les manifestations du risque de taux d'intérêt

Risque de revenu

Émetteur :

- Perte en revenu si les taux baissent après l'émission
- Gain en revenu si les taux s'élèvent après l'émission

Investisseur :

- Perte de revenu si les taux baissent après l'achat
- Gain en revenu si les taux s'élèvent après l'achat

Risque de capital

Investisseur :

- Subit une moins value si les taux s'élèvent
- Bénéficie d'une plus value si les taux baissent

4. Les opérateurs exposés au risque de taux d'intérêt

Investisseur :

S'il conserve ses titres jusqu'à l'échéance : Pas de risque en capital ;

S'il ne conserve pas les titres jusqu'à l'échéance : Risque de plus value ou de moins value en capital.

Intermédiaires :

Marché primaire :

Syndicat de garantie

Syndicat de placement

Marché secondaire :

Courtier

Teneur de marché

généralement une banque d'investissement qui, sur un marché donné, transmet en continu des prix à l'achat et à la vente soit uniquement à sa clientèle, soit à l'ensemble du marché, y compris donc à ses concurrents. On dit aussi qu'il « cote ».

Objectif de la protection contre le risque de taux : «Minimiser, au moindre coût, les pertes susceptibles d'affecter le patrimoine ou les revenus de l'entreprise du fait des variations des taux d'intérêt»

TD : Les obligations

Exercice 1 : calcul actuariel

Dans ce exercice, on considère 2 obligations A et B dont les caractéristiques figurent dans le tableau ci-dessous :

Obligation	Maturité (ans)	Coupon	Prix
A	2	6%	100
B	4	7%	98

1. En utilisant la variation, calculer une valeur approchée du rendement actuariel de B.
2. On considère un portefeuille composé de 100€ nominal de titre A et 200€ nominal de titre B. Calculer une approximation au premier ordre du rendement actuariel de ce portefeuille.

Rappel : développement au premier (si *f* est dérivable) ordre de *f(x)* en $x=x_0$: $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left.\frac{df}{dx}\right|_{x0}$

TD : Les obligations

Exercice 1 : correction

1.1 Astuce : si ***r_0=c=7% alors P(r_0)=1*** (obligation émise au pair)

$$P=\sum_{i=1}^{n}c(1+r)^{-i}+(1+r)^{-n}=\frac{c}{1+r}\frac{\left[1-(1+r)^{-n}\right]}{1-(1+r)^{-1}}+(1+r)^{-n}\Rightarrow P=\frac{c}{r}\left[1-(1+r)^{-n}\right]+(1+r)^{-n}$$

$$\frac{dP}{dr}=-\frac{c}{r^2}\left[1-(1+r)^{-n}\right]+n\frac{c}{r}(1+r)^{-(n+1)}-n(1+r)^{-(n+1)}\Rightarrow\left.\frac{dP}{dr}\right|_{r_0}=-3{,}387$$

$$P(r)=P(r_0)+(r-r_0)\left.\frac{dP}{dr}\right|_{r_0}\Leftrightarrow r=\frac{P(r)-P(r_0)}{\left.\frac{dP}{dr}\right|_{r_0}}+r_0$$

$$r=\frac{P(r)-P(r_0)}{\left.\frac{dP}{dr}\right|_{r_0}}+r_0=\frac{98/100-1}{-3{,}3872}+7\%=7{,}59\%$$

Exercice 1 : correction

1.2 On utilise le fait que : $q_A P_A(r_A) + q_B P_B(r_B) = q_A P_A(r^*) + q_B P_B(r^*)$ (1)

On a (DL à l'ordre 1) :
$$\begin{aligned} q_A \times \\ q_B \times \end{aligned} \begin{cases} P_A(r^*) = P_A(r_A) + (r^* - r_A)\left.\dfrac{dP}{dr}\right|_{r_A} \\ P_B(r^*) = P_B(r_B) + (r^* - r_B)\left.\dfrac{dP}{dr}\right|_{r_B} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow q_A P_A(r^*) + q_B P_B(r^*) = q_A P_A(r_A) + q_A(r^* - r_A)\left.\frac{dP}{dr}\right|_{r_A} + q_B P_B(r_B) + q_B(r^* - r_B)\left.\frac{dP}{dr}\right|_{r_B}$$

(1)

$$\Leftrightarrow q_A(r^* - r_A)\left.\frac{dP}{dr}\right|_{r_A} + q_B(r^* - r_B)\left.\frac{dP}{dr}\right|_{r_B} = 0$$

$$\Leftrightarrow r^* = \frac{q_A r_A \left.\dfrac{dP}{dr}\right|_{r_A} + q_B r_B \left.\dfrac{dP}{dr}\right|_{r_B}}{q_A \left.\dfrac{dP}{dr}\right|_{r_A} + q_B \left.\dfrac{dP}{dr}\right|_{r_B}} = 7{,}25\%$$

$r_A = 6\%$ $\quad$ $r_B = 7\%$

$n_A = 2ans$ $\quad$ $n_B = 4ans$

$\left.\dfrac{dP}{dr}\right|_{r_A} = -1{,}833$ $\quad$ $\left.\dfrac{dP}{dr}\right|_{r_B} = -3{,}298$

$q_A = 100$ $\quad$ $q_B = 200$

TD : Les obligations

Exercice 2 : Valorisation d'une obligation

Une entreprise notée AA émet une obligation à 3 ans. Le taux sans risque de maturité 3 ans est de 3%. Les marges de crédit sont résumées dans le tableau suivant :

Notation	1ans	5ans	10ans	20ans
AAA	12	14	20	30
AA	20	24	40	50
A	40	44	60	80

Marge de crédit, fonction de la notation et de la maturité, en point de base

2.1 Calculer le coupon annuel que doit choisir cette entreprise pour émettre son obligation au pair.
2.2 Exactement 6 mois après l'émission, la notation de l'entreprise est abaissé à A. Le taux sans risque est toujours de 3%. Calculer le prix pied de coupon de l'obligation.

TD : Les obligations

Exercice 2 : correction

2.1 Coupon annuel pour émettre au pair. Le coupon doit être égal au taux de rendement.

D’après le tableau, entre 1 an et 5 ans, le spread augmente de 4bp (de 20 à 24 bp) : par interpolation linéaire, le spread pour 2 ans est donc de 2 bp.

Spread=20+2 bp=22.

Coupon=3% (taux sans risque)+0,22% (spread)=3,22%.

Notation	1ans	5ans	10ans	20ans
AAA	12	14	20	30
AA	20	24	40	50
A	40	44	60	80

TD : Les obligations

Exercice 2 : correction

2.2 A l'émission, le prix de P est de 1 (obligation émise au pair). Après dégradation de rating, le prix de l'obligation est de :

$$P(r,n)=\frac{c}{r}\left[1-(1+r)^{-n}\right]+(1+r)^{-n}=0{,}994$$

c=3,22%
n=3ans

Nouveau spread=40+2=42 bp
r (nouveau)=3%+0,42%=3,42%

Soit P(r,t) le prix actuariel, au taux r, avec une maturité résiduelle t, avec (n-1)<t<n. 6 mois après, on capitalise avec r=3% :

$$P(r,t)=P(r,n)(1+r)^{\frac{180}{365}}=0{,}994(1+3\%)^{\frac{180}{365}}=1{,}011$$

$$cc=\frac{180}{365}\times 3{,}22\%\times 1=0{,}016$$

Soit P_c (r,t) le prix coté (ou prix pied de coupon) de l'obligation : $P_c(r,t)=P(r,t)-cc=1{,}011-0{,}016=0{,}994$

TD : Les obligations

Exercice 3 :

3.1 Calculer le prix d’une obligation 3 ans, coupon 6% dont le rendement est 7%.
3.2 Calculer la variation de cette obligation.
3.3 Utiliser ce résultat pour estimer de rendement du titre si le prix est de 99.

TD : Les obligations

Exercice 3 : correction

3.1 c=6%/r=7%

$$P = \frac{c}{r}\left[1-(1+r)^{-n}\right]+(1+r)^{-n}$$

$$P = c\left(\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}+\frac{1}{(1+r)^3}\right)+\frac{1}{(1+r)^3} = 97{,}38$$

3.2 La variation est la dérivée du prix par rapport au taux de rendement :

$$\frac{dP}{dr} = -c\left[\frac{1}{(1+r)^2}+\frac{2}{(1+r)^3}+\frac{3}{(1+r)^4}\right]-\frac{3}{(1+r)^4} = -257{,}64$$

$$V = \frac{dP}{dr} = -\sum_i \frac{iC_i}{(1+r)^{1+i}}$$

3.3 Une approximation du 1er ordre de la variation du prix est donc : $dP = V \times dr$

Le rendement correspondant à un prix P*=99 peut être estimé en résolvant : $P^* - P = V(r^* - r)$

$(99-97{,}38) = V(r^* - 7\%) \Leftrightarrow r^* = 6{,}37\%$ (vrai uniquement en cas de faible variation)

TD : Les obligations

Exercice 4 :

4.1 Calculer la sensibilité et la duration autour du pair d'une obligation de maturité 10 ans, de coupon=5%
4.2 Le taux de rendement actuariel de l'obligation augmente de 0,1%. Calculer la nouvelle valeur de D et de S.

TD : Les obligations

Exercice 4 : correction

L'obligation étant au pair, on a r=c=5%.

$$P(r) = \frac{c}{r}\left[1-(1+r)^{-n}\right] + (1+r)^{-n} = \frac{1}{(1+r)^n}\left[1-\frac{c}{r}\right] + \frac{c}{r}$$

$$\frac{dP}{dr} = -n(1+r)^{-(n+1)}(1-\frac{c}{r}) + \frac{c}{r^2}\left[(1+r)^{-n} - 1\right]$$

$$S = -\frac{\Delta P}{P\Delta r} = 7{,}72$$

$$D = (1+r)S = 8{,}10$$

Ou DL à l'odre 1 : $\Delta r = 0{,}1\%$ $\quad \Delta P = P(5{,}1\%) - P(5\%)$

$$S = -\frac{\Delta P}{P\Delta r} = 7{,}68 \qquad D = S(1+r) = 8{,}07$$

TD : Les obligations

Exercice 5 :

Considérez une rente perpétuelle qui paie une somme c une fois par an. Donner une formule analytique pour la sensibilité et la duration de cette rente.

TD : Les obligations

Exercice 5 : correction

Considérez une rente perpétuelle qui paie une somme c une fois par an. Donner une formule analytique pour la sensibilité et la duration de cette rente.

$$P(r) = \frac{c}{r}\left[1 - (1+r)^{-n}\right] + (1+r)^{-n} \underset{n \to +\infty}{\approx} \frac{c}{r}$$

$$S = -\frac{dP}{Pdr} = -\frac{c}{r^2} \times \left(-\frac{r}{c}\right) = \frac{1}{r}$$

$$D = (1+r)S = \frac{1+r}{r}$$

Partie IV

Présentation des options et application à l’actuariat

Plan

1. La terminologie et le contexte des options

2. Les fondements de la valeur d’une option

3. Les stratégies spéculatives et application à l’actuariat

1.1 Les définitions générales

Une valeur mobilière est un ensemble de titres de même nature, côtés ou susceptibles de l'être, issus d'un même émetteur et conférant par eux même des droits identiques à leur détenteur (actions, obligations, SICAV, FCP et les produits dérivés).

La Bourse (Exchange) - lieu d'échange - permet, de fait, la rencontre physique entre les demandeurs et offreurs de capitaux. Il s'agit donc d'un marché organisé, avec ses autorités, ses intervenants et ses intermédiaires, sur lequel se dénoueront les négociations entre les capitaux et les titres. Dans un deuxième temps, après la conclusion de ces opérations, la bourse poursuivra sa mission de lieu de rencontre puisque s'y négocieront des valeurs déjà émises. Les intermédiaires ou les négociateurs sont chargés d'exécuter les ordres d'achat et de vente sur les différents marchés.

Un contrat dérivé (dérivative) ou un **actif contingent** (contigent claim) est un instrument financier dont la valeur dépend d'un autre actif ou plus généralement d'une variable sous-jacente. L'option et, a fortiori, l'option négociable sur action, font parties de l'ensemble des contrats dérivés.

1.2 L'option

1.2.1 Définition de l'option

L'option est un contrat par lequel le porteur (ou souscripteur) a le droit, et non l'obligation, d'acheter (option d'achat, call) ou de vendre (option de vente, put) une quantité donnée de l'actif sous-jacent (underlier value) ou titre de base ou titre support au prix d'exercice (strike price) à une date future moyennant le paiement immédiat d'une prime (premium). L'option négociable sur action (Stock option) est une option cotée sur un marché et dont le sous-jacent est une action.

On distingue deux grandes catégories d'options négociables : les options européennes et les options américaines. La différence tient au fait de pouvoir exercer ou non l'option avant l'échéance. Dans le cas d'une option américaine, l'acheteur peut exercer son option à tout moment entre t_0 (prise de position) et T (échéance). Une option européenne ne peut être exercer avant l'échéance T. En supposant qu'on soit à l'échéance aujourd'hui, une option est dite « IN the money» si elle pouvait être exercée avec un retour (payoff) non nul. Une option est dite « OUT the money » si elle ne pouvait pas être exercée. Elle est dite « AT » dans la situation neutre (entre IN et OUT).

	Option d'achat	Option de vente
E=S	AT the money	AT the money
E<S	IN the money	OUT the money
E>S	OUT the money	IN the money

E = prix d'exercice S = point critique

1.2.2 Illustrations

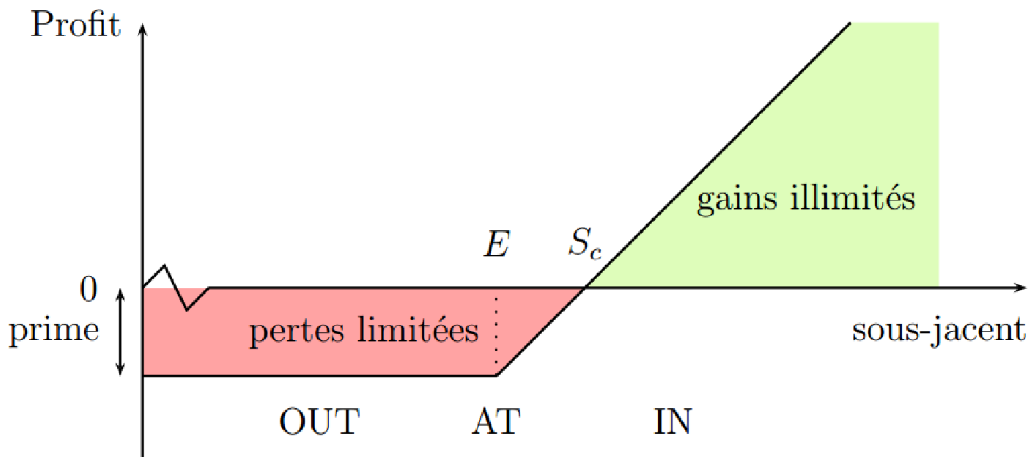
L'achat d'une option d'achat

Les quatre stratégies de bases sont présentées pour visualiser l'achat de l'option d'achat (long call), la vente de l'option d'achat (short call), l'achat de l'option de vente (long put) et la vente de l'option de vente (short put).

Si l'option est exercée en T, l'investisseur achète le sous-jacent au prix E et peut le vendre au cours du jour S supérieur à E. Comme l'acheteur du call espérait retirer un profit, cela veut dire que l'acheteur d'une option d'achat spécule à la hausse.

A l'échéance, le retour (payoff) est de max(0, S_T – E).

En notant C la prime de l'option d'achat, le profit réalisé est de max(0, S_T −E) − C. Cette opération entraîne un risque de perte limité à la valeur de l'option (une perte maximale égale à la prime C). En revanche, l'acheteur d'une option d'achat réalise un profit dès que la valeur du sous-jacent est supérieure au point mort ou seuil critique (S_c) égal à E +C .

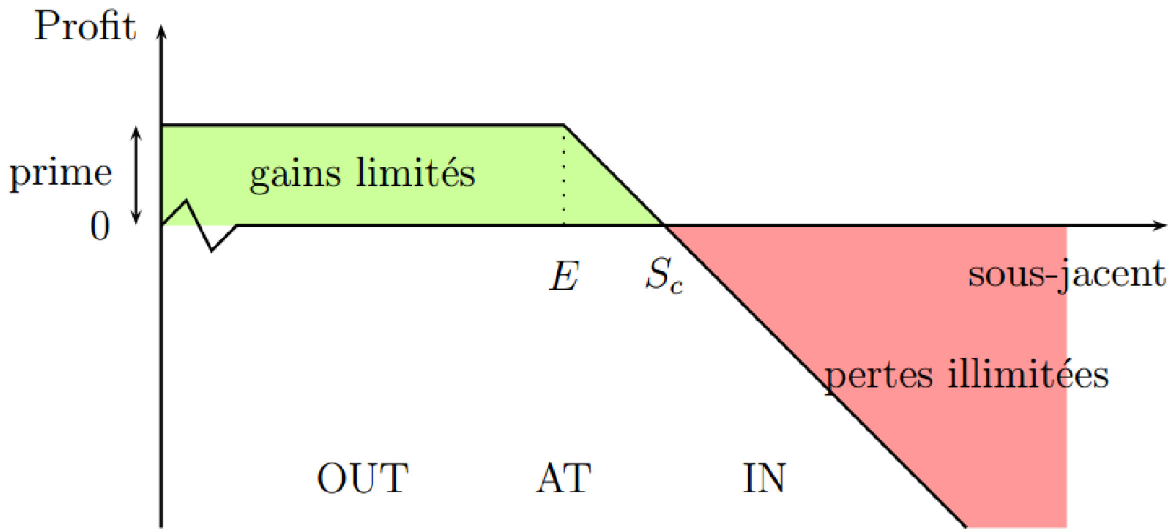


1.2.2 Illustrations

La vente d'une option d'achat

L'opérateur réalise l'opération inverse de l'acheteur du call.
Si l'option est exercée en T, l'investisseur vend le sous-jacent au prix E et peut l'acheter au cours du jour S inférieur à E. Le vendeur d'une option d'achat n'a donc pas intérêt à ce que l'option soit exercée, il spécule à la baisse.

A l'échéance, le retour est de min(0, E − S_T) = max(0, S_T − E) et le profit réalisé est de C − max(0, S_T − E).



1.2.2 Illustrations

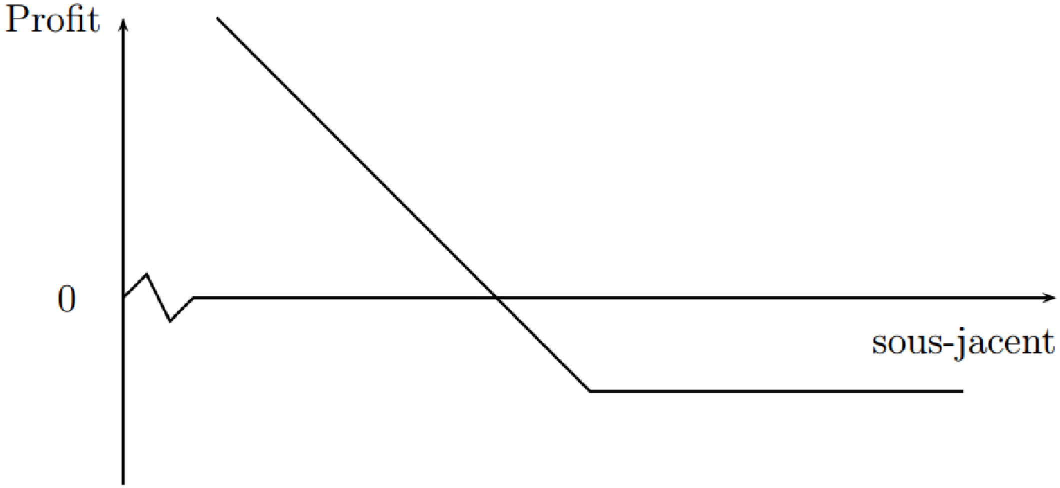
L'achat d'une option de vente

Si l'option est exercée, l'acheteur d'une option de vente vend l'actif au prix E et peut l'acheter au prix S inférieur à E. Un acheteur d'options de vente spécule donc à la baisse. A l'échéance, le retour est de max(0, E − S_T).

En notant P la prime du put, le profit réalisé est de max(0,E−S_T)−P.

Il est positif dès que S est inférieur au seuil critique S_c égal à E−P. Le risque de perte est limité au montant de la prime.

Vous disposez maintenant l'ensemble des informations nécessaires pour compléter le schéma de la figure suivante :



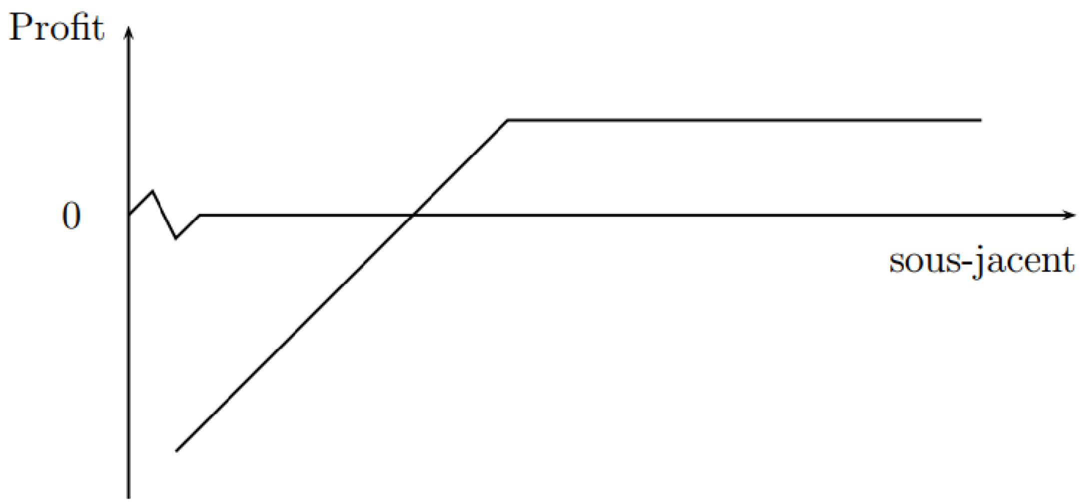
1.2.2 Illustrations

Vente d'une option de vente

Si l'option est exercée, le vendeur d'une option de vente achète l'actif au prix E et peut le vendre au prix S inférieur à E. Le vendeur d'une option de vente spécule donc à la hausse. A l'échéance, le retour est de min(0, S_T − E).

En notant P la prime du put, le profit réalisé est de :
P − max(0, E − S_T).

Vous disposez maintenant l'ensemble des informations nécessaires pour compléter le schéma de la figure suivante :



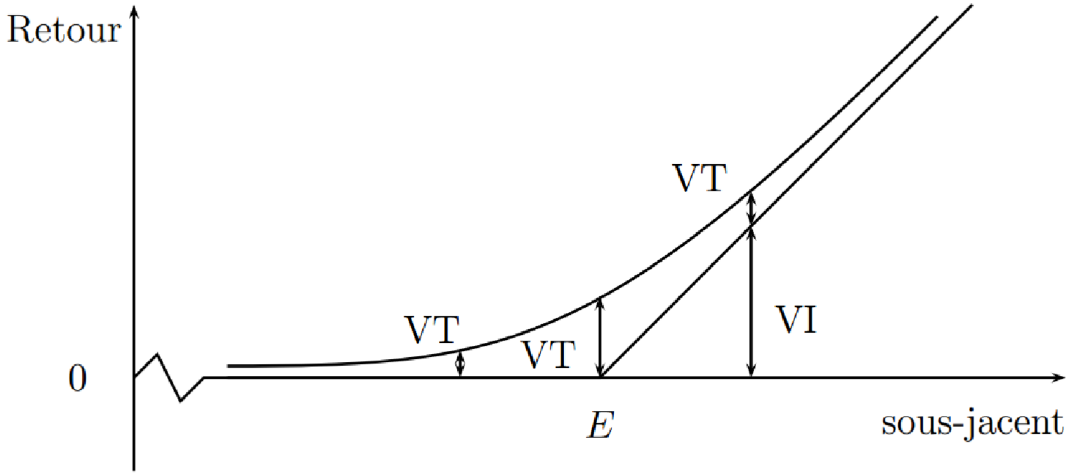
2. Le prix des options négociables sur actions

2.1 Les fondements de la valeur d'une option

La valeur intrinsèque de l'option (intrinsic value) est la valeur qu'elle aurait si on était à l'échéance. Elle est égale à max(O, S −E) pour une option d'achat et max(0, E − S) pour une option de vente. La valeur temps ou surcote (time value) est la différence entre la valeur de l'option et sa valeur intrinsèque.

La valeur temps est égale à C − (max(0, S − E)) pour une option d'achat et à P − (max(0, E −S)) pour une option de vente. Elle est toujours positive. Les primes C et P sont appelées valeurs marchandes.

Ensuite, la valeur de l'option dépend de paramètres exogènes et de paramètres endogènes respectivement présentés dans les deux sous-sections suivantes.



2.1 Les fondements de la valeur d'une option

2.1.1 Les paramètres exogènes

Il y a trois paramètres exogènes qui dépendent du sous-jacent : le prix spot, les dividendes éventuels et la volatilité du sous-jacent. Le quatrième déterminant exogène, le taux d'intérêt, est lié au marché et ne dépend pas du sous-jacent.

Le prix spot

La valeur de l'option d'achat (de vente) est croissante (décroissante) par rapport à la valeur du sous-jacent. Notons par ailleurs que la valeur temps est maximale quand le prix du sous jacent est proche du prix d'exercice. Lorsque le prix du sous jacent est très inférieur au prix d'exercice, la probabilité d'exercer est faible. Ainsi $C_T = 0$ avec une probabilité très forte. Dans ce cas, la valeur de l'option est proche de zéro et par conséquent la valeur temps aussi (confère figure précédente). Lorsque le prix du sous jacent est très supérieur au prix d'exercice, l'option sera exercée avec une quasi-certitude.

A l'échéance, on aura $C_T = S_T - E$ avec une probabilité très proche de 1. Deux actifs qui ont le même rendement ont le même prix (absence d'opportunité d'arbitrage). Ainsi $C \approx S - E \approx VI$,la valeur temps tend vers zéro. Lorsque le prix du sous jacent est proche du prix d'exercice, la probabilité d'une augmentation de prix est a priori aussi grande que celle d'une baisse de prix.

2.1 Les fondements de la valeur d'une option

2.1.1 Les paramètres exogènes

Le dividende

La perte de valeur due au versement de dividende se reporte sur la valeur de l'action. Lorsqu'il y a négociation de contrat d'option, les opérateurs doivent donc s'efforcer d'anticiper la date et le montant du versement du prochain dividende.

Si la distribution doit intervenir pendant la durée de vie de l'option, le cours du sous-jacent sera affecté par ce versement. Le cours du sous-jacent chute immédiatement de la valeur du dividende. Cela profitera au vendeur d'options d'achat et à l'acheteur d'options de vente. Dans le cas des options américaines, les investisseurs analysent l'influence de ses versements sur le cours de l'option avant de prendre une position.

2.1 Les fondements de la valeur d’une option

2.1.1 Les paramètres exogènes

La volatilité

La volatilité du sous-jacent est mesurée à partir de l’écart type des taux de rentabilité enregistrés sur les cours de l’action sous-jacente. La volatilité de l’option est calculée de la même façon à partir des taux de rentabilité de l’option. La volatilité du sous-jacent peut être calculée par un historique ou par un modelé théorique (Janssen et al., 1997; Hull, 2000). La volatilité des options est largement supérieure à la volatilité des actions. Sa valeur est une fonction croissance de la volatilité des actifs sous-jacents. En effet, l’acheteur d’une option est d’autant plus prêt à acquitter une prime élevée que l’amplitude des fluctuations du sous-jacent est importante. Ce raisonnement est valable pour les options d’achat comme pour les options de vente.

Le taux d’intérêt à court terme

Acheter un call revient à acheter un titre et à la payer plus tard, plus le taux d’intérêt est élevé et plus le call sera cher. Une augmentation des taux d’intérêt entraîne une augmentation du prix de l’option d’achat et baisse du prix de l’option de vente.

2.1 Les fondements de la valeur d’une option

2.1.2 Les paramètres endogènes

La durée de l’option

Pour les options américaines la valeur de l’option augmente avec la durée de l’option. Pour le voir, considérons deux options qui diffèrent uniquement par la date de l’échéance. L’option qui a la maturité la plus longue ouvre toutes les opportunités de l’option qui a la maturité la plus courte et même plus. L’option « longue » a donc une valeur supérieure à l’option « courte ».

Dans le cas d’une option européenne, ce raisonnement ne peut pas s’appliquer. S’il n’y a pas de dividendes, l’influence de la durée de l’option apparaît à travers l’évolution de la valeur temps. Plus la durée de vie de l’option est longue, plus la surcote est élevée. Autrement dit, la durée de vie influence à la hausse la prime pour une option d’achat et pour une option de vente.

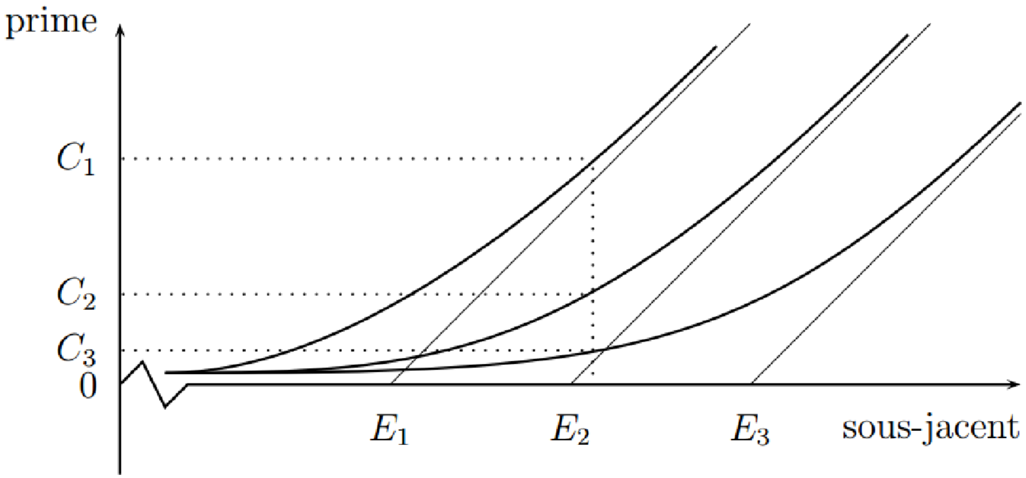
2.1 Les fondements de la valeur d'une option

2.1.2 Les paramètres endogènes

Le prix d'exercice

L'option d'achat a d'autant plus de chance d'être exercée que le prix d'exercice est faible. La prime est donc une fonction décroissante du prix d'exercice.

L'influence du prix d'exercice sur la valeur de l'option de vente est symétrique par rapport à celle de l'option d'achat. Plus le prix d'exercice est élevé, plus la prime de l'option de vente est élevée.



2.1 Les fondements de la valeur d'une option

2.1.3 Synthèse

Déterminants	call	put
Cours du sous-jacent	+	-
Prix d'exercice	-	+
La maturité (ou le temps)	+ (-)	+ (-)
Volatilité	+	+
Taux d'intérêt à court terme	+	-
Versement de dividende	-	+

L'influence des déterminants sur les options

2.2 La formule de Black et Scholes

2.2.1 Présentation

Le modèle de référence est le modèle de Black and Scholes (1973). Pour obtenir le prix de l'option, les auteurs font les hypothèses suivantes qu'ils appellent les conditions idéales :

a) Le taux sans risque R, est constant quelque soit la maturité. La quantité r est définie par la relation suivante :

$$r = \ln(1+R) \Leftrightarrow (1+R)^t = e^{rt}$$

b) Le marché fonctionne en continu. Le prix de l'actif suit un mouvement Brownien géométrique de paramètres μ et σ constants. A l'échéance, le prix du sous-jacent suit une loi log-normale :

$$S_t = S_0 \times e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \quad \forall t \in [0, T]$$

c) Il n'y a pas de dividende pendant toute la durée de l'option.
d) L'option est « européenne », elle ne peut être exercée qu'à l'échéance.
e) Le marché est sans friction (il n'y a ni impôts, ni frais de transaction). Chaque titre est parfaitement divisible.
f) La vente à découvert de titres est autorisée.

2.2 La formule de Black et Scholes

2.2.1 Présentation

Soit f un contrat dérivé (derivative) du sous-jacent S. L'équation différentielle de Black-Scholes-Merton qui permet d'évaluer f est la suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rs\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

Nous rappelons que le prix de l'option d'achat est, à l'échéance, défini par l'équation C(S,T) = max(0, S − E) et que le prix de l'option de vente est défini par l'équation P(S,T)=max(0, E − S).

Ces valeurs sont les conditions aux bornes de l'équation différentielle de Black-Scholes-Merton.

2.2 La formule de Black et Scholes

2.2.2 La relation de parité

Considérons un portefeuille qui comprend l'achat d'une action de valeur S, la vente d'une option d'achat d'une valeur C et l'achat d'une option de vente de valeur P. On suppose que l'échéance est identique (T), que le prix d'exercice E est le même pour les deux options.

	$S_T < E$	$S_T > E$
Achat action	S_T	S_T
Vente call	0	$-(S_T - E)$
Achat put	$E-S_T$	0
Total	E	E

Les valeurs du portefeuille à l'échéance

Quelle que soit l'évolution du sous-jacent, le portefeuille apporte E à l'échéance. Le portefeuille peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} Port_t = S_t - C_t + P_t \\ Port_T = E \end{cases}$$

2.2 La formule de Black et Scholes

2.2.2 La relation de parité

S'il y a deux portefeuilles qui produisent le même profit à l'échéance, leur valeur en t est identique (il s'agit d'une conséquence de l'absence d'opportunité d'arbitrage).

Donc tout portefeuille sans risque rapporte effectivement le taux sans risque. L'option est estimée de telle sorte que la rentabilité de la position globale soit équivalente au taux d'intérêt sans risque. Notons τ la maturité exprimée en année ($\tau = T - t$).

$Port_t$ vérifie l'équation : $Port_t = e^{-r(T-t)} Port_T = e^{-r\tau} Port_T = e^{-r\tau} E$

Avec l'équation précédente nous avons donc : $S_t - C_t + P_t = E \times e^{-r\tau}$

Remarque : Cette démonstration détermine le prix de l'option de vente sans faire d'hypothèses sur le comportement des investisseurs face au risque.

2.2 La formule de Black et Scholes

2.2.3 Le prix d'une option d'achat

La solution analytique dans le cas d'une option d'achat de l'équation différentielle de Black-Scholes-Merton est :

$$C = S \times N(d_1) - E \times e^{-r\tau} N(d_2)$$

Où N représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et où

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2.2 La formule de Black et Scholes

2.2.2 La relation de parité

Exercice : à partir de la relation de parité, déterminer le prix d'une option :

L'équation différentielle de Black-Scholes-Merton nous donne :

$$C = S \times N(d_1) - E \times e^{-r\tau} N(d_2)$$

En appliquant cette dernière à la relation de parité, nous avons :

$$P = E \times e^{-r\tau} - S + C$$

$$= E \times e^{-r\tau} - S + S \times N(d_1) - Ee^{-r\tau} N(d_2)$$

$$= S[N(d_1) - 1] - Ee^{-r\tau}[N(d_2) - 1]$$

2.2 La formule de Black et Scholes

2.2.3 Le prix d'une option d'achat

Une institution financière qui commercialise des options ou d'autres produits dérivés à un client en dehors du marché financier se trouve face à un problème pour gérer ce risque. Si la même option est cotée sur un marché, elle peut aisément neutraliser son risque.

Elle vend l'option à son client et achète la même sur un marché, elle réalise juste une opération de courtage. Mais un contrat peut être vendu pour répondre à un besoin du client sans qu'il y ait forcément de contrat standard coté sur un marché qui lui corresponde.

Le risque supporté par l'institution financière devient plus difficile à gérer. Par une stratégie de couverture qui utilise le sous-jacent, l'institution financière peut neutraliser son risque.

La sensibilité de l'option peut être mesurée par cinq paramètres (les lettres grecques) : le Delta Δ mesure la sensibilité de la valeur d'une option par rapport aux variations du prix du sous-jacent, le Gamma Γ mesure la sensibilité de l'option aux variations du Δ, le Thêta Θ mesure la sensibilité d'une option au temps restant à courir jusqu'à l'échéance, le Vega V mesure la sensibilité de l'option par rapport à σ, le rho ρ mesure la sensibilité d'une option au taux d'intérêt à court terme. Ce sont les dérivés pas rapport aux valeurs S, E, σ, r, et t.

2.3 Sensibilité et couverture

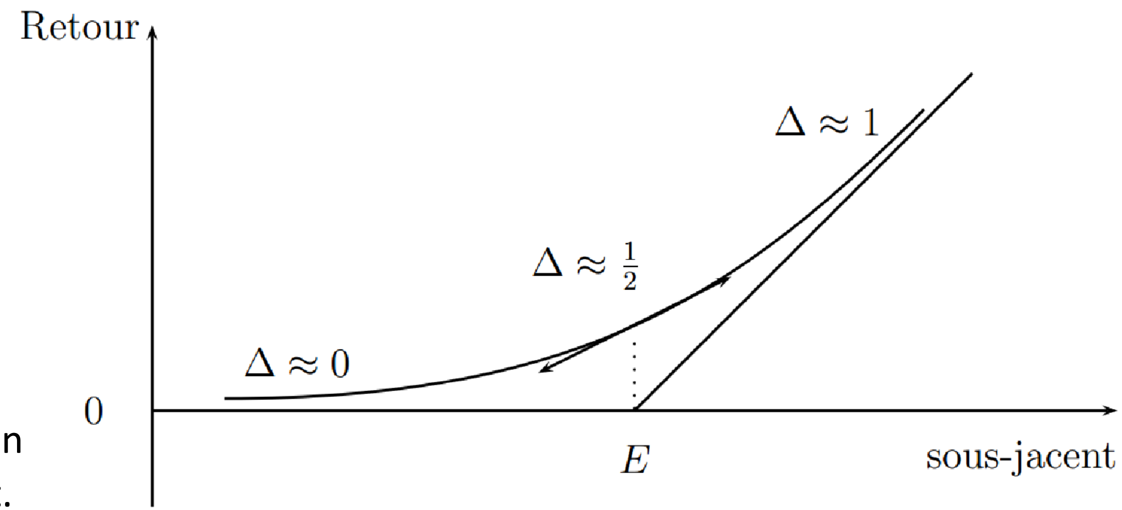
2.3.1 Le Delta Δ

Le Delta représente la variation de l'option lorsque le sous-jacent varie d'une unité monétaire. Il fournit une information sur la variabilité de l'option mais aussi sur la probabilité d'exercer l'option. Enfin, il nous donne le nombre d'actions à utiliser pour couvrir une option. Il suffira de multiplier ce Delta par la quotité pour obtenir la position globale.

Pour l'option d'achat :

$$\Delta_C = \frac{\partial}{\partial S} C = C_S = N(d_1) \text{ avec } \Delta \in]0,1]$$

Le delta d'une option mesure la sensibilité de son prix à une variation donnée du cours du sous-jacent.



L'influence du sous-jacent sur la valeur d'une option d'achat

2.3 Sensibilité et couverture

2.3.1 Le Delta Δ

Démonstration :

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \qquad N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \qquad \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$N'(d_1) = N'(d_2 + \sigma\sqrt{\tau}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-d_2{}^2 - 2d_2\sigma\sqrt{\tau} - \sigma^2\tau}{2}} = N'(d_2) e^{-d_2\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2\tau}{2}} = N'(d_2) e^{-\frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})^2 \tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2\tau}{2}} = N'(d_2)\frac{E}{S}e^{-r\tau}$$

$$C = S \times N(d_1) - E \times e^{-r\tau} N(d_2)$$

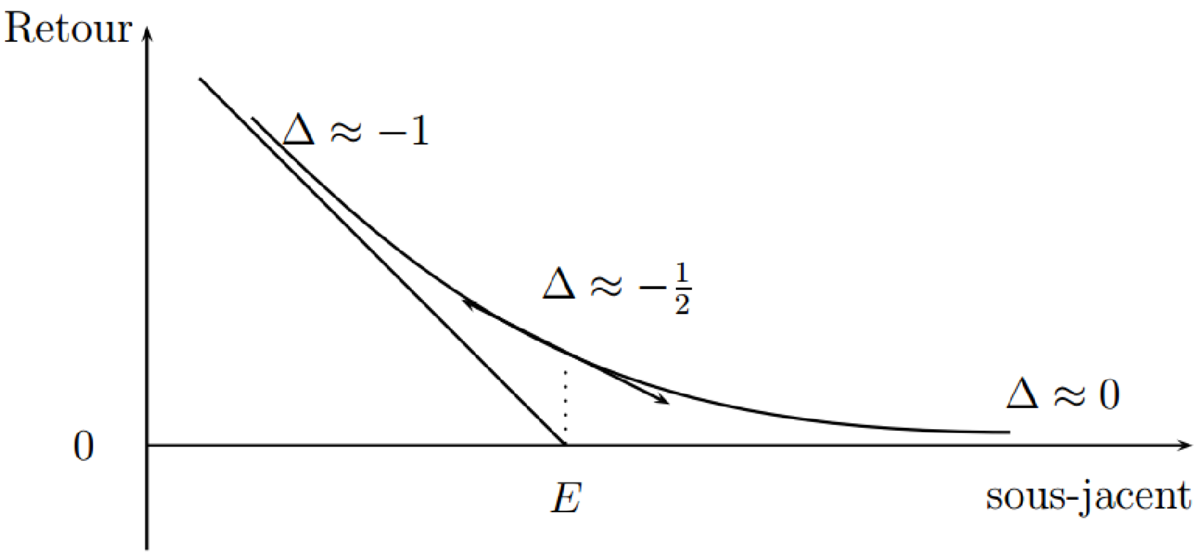
$$\Delta_C = N(d_1) + S \times N'(d_1) \times \frac{\partial d_1}{\partial S} - Ee^{-r\tau} \times N'(d_2) \times \frac{\partial d_2}{\partial S} = N(d_1) + S \times N'(d_1) \times \frac{\partial d_1}{\partial S} - S \times N'(d_1) \times \frac{\partial d_2}{\partial S}$$

$$= N(d_1) + S \times N'(d_1) \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} - S \times N'(d_1) \times \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} = N(d_1)$$

2.3 Sensibilité et couverture

2.3.1 Le Delta Δ

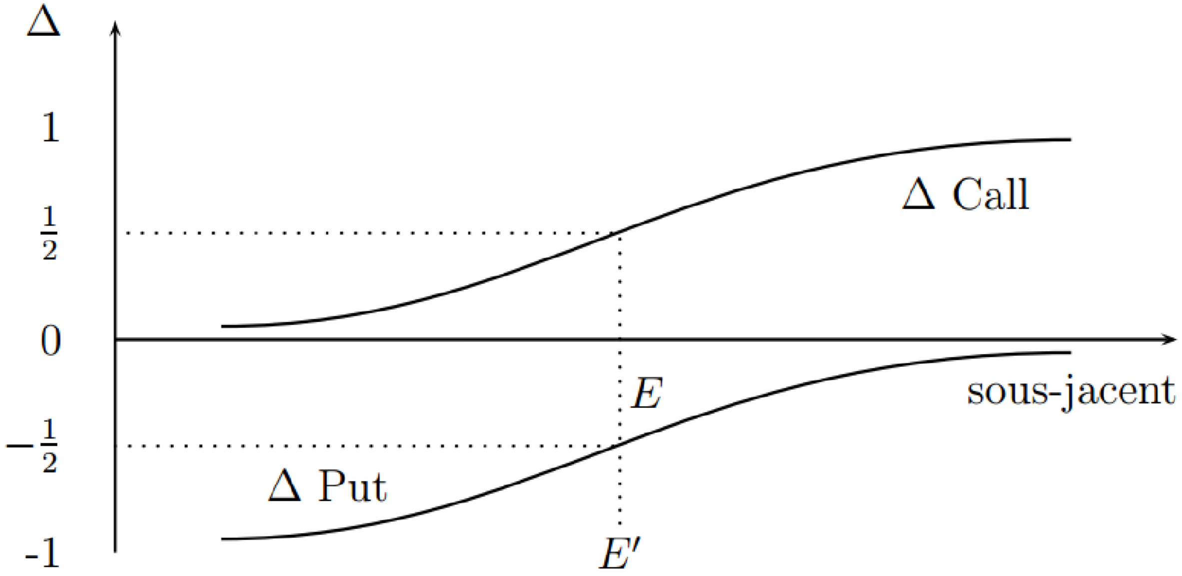
Pour l'option de vente : $\Delta_P = \frac{\partial}{\partial S} P = P_S = N(d_1) - 1 \quad \text{avec } \Delta \in [-1,0[$



L'influence du sous-jacent sur la valeur d'une option de vente

2.3 Sensibilité et couverture

2.3.1 Le Delta Δ



L'influence du sous-jacent sur le delta

2.3 Sensibilité et couverture

2.3.1 Le Delta Δ

Stratégie de couverture

Pour couvrir sa position, le vendeur d'options d'achat (qui doit livrer des titres) adopte une position en Δ neutre.
Il constitue un portefeuille d'action.

Sur un certain nombre d'actions il respecte toujours deux conditions :

- acheter Δ actions par call vendu (à la quotité près) ;
- gérer en continu (à cause de l'instabilité du Δ).

Exemple 1 Soit **Δ = 0,3**. Pour couvrir la vente d'une option d'achat, **l'investisseur achète 0,3 actions par option vendue (pour une action).** S'il vend 100 options d'achat (pour une quotité de 10). La position acheteur (longue) est de 300 actions et la position vendeur (courte) est de 100 options. Le delta global d'une position est défini par le gain ou la perte réalisé par cette position lorsque le cours de l'action augmente d'une unité monétaire.

Le delta d'une action est égal à un. Dans l'exemple :

- de la position courte pour 100 options : $0,3 \times 10 \times (-100) = -300$;
- de la position longue pour 300 actions : $1 \times 300 = 300$.

Le Δ global vaut donc 0.

2.3 Sensibilité et couverture

2.3.1 Le Delta Δ

Couverture pour un acheteur d'option d'achat : Le procédé sera identique mais la position sera inversée : on sera en position vendeur d'actions par call acheté.

Couverture pour un acheteur d'option de vente : Une position longue sur un put est couverte par une position longue sur l'action (gestion en continu, les positions sur le sous-jacent sont ajustées régulièrement).

Couverture pour un vendeur d'option de vente : Une position courte sur un put est couverte par une position courte sur l'action (gestion en continu).

A partir du delta, on peut calculer le levier de mouvement, L : $L = \dfrac{\frac{\partial C}{C}}{\frac{\partial S}{S}} = \dfrac{\partial C}{\partial S}\dfrac{S}{C} = \Delta \dfrac{S}{C}$

Ce levier correspond à l'élasticité du cours de l'option par rapport à l'élasticité du cours de l'action.

Dans l'observation empirique, on a L > 1 car les options sont plus volatiles que les actions.

2.3.2 Le Gamma Γ

Le Gamma représente la variation du delta d'une option d'achat ou d'une option de vente lorsque l'actif sous-jacent varie d'une unité monétaire.

Il est identique pour l'option d'achat et l'option de vente : $\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial S^2} C = f(d_1) \times \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} > 0$

avec *f*, la fonction de densité de la loi normale centrée réduite : $f(x) = \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$

2.3 Sensibilité et couverture

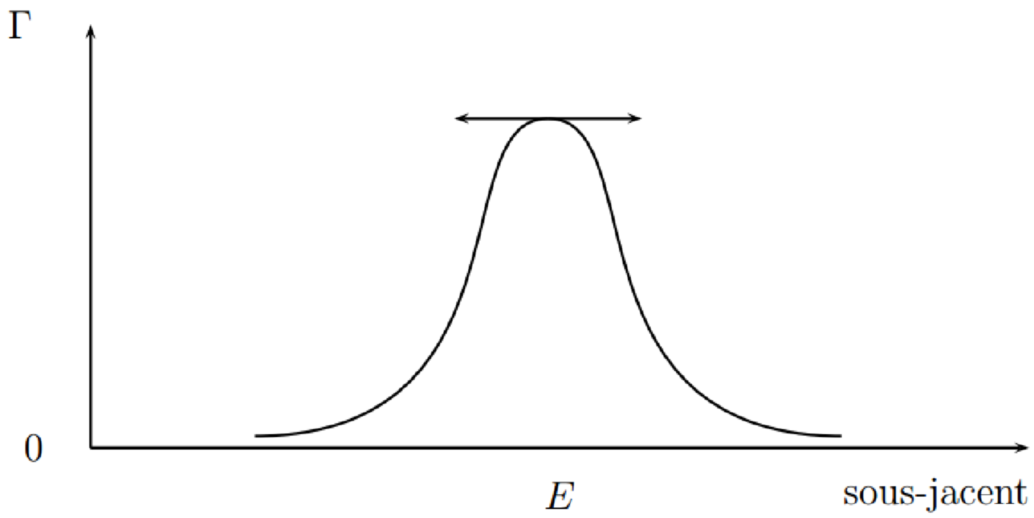
2.3.2 Le Gamma Γ

« AT the money », le Δ est instable que ce soit pour l'option d'achat ou pour l'option de vente (Γ élevé).

A l'inverse, loin de cette position, le Δ est stable (Γ faible). L'évolution du Γ en fonction du sous-jacent est illustré ci-dessous :

La connaissance du Γ est très importante dans une stratégie delta neutre.

Si le Γ est élevé, les stratégies de rééquilibrage seront nombreuses parce qu'il y aura une forte instabilité de la couverture. Idéalement, la position globale devra avoir un delta nul mais également un Γ proche de 0.



2.3 Sensibilité et couverture

2.3.3 Le Thêta Θ

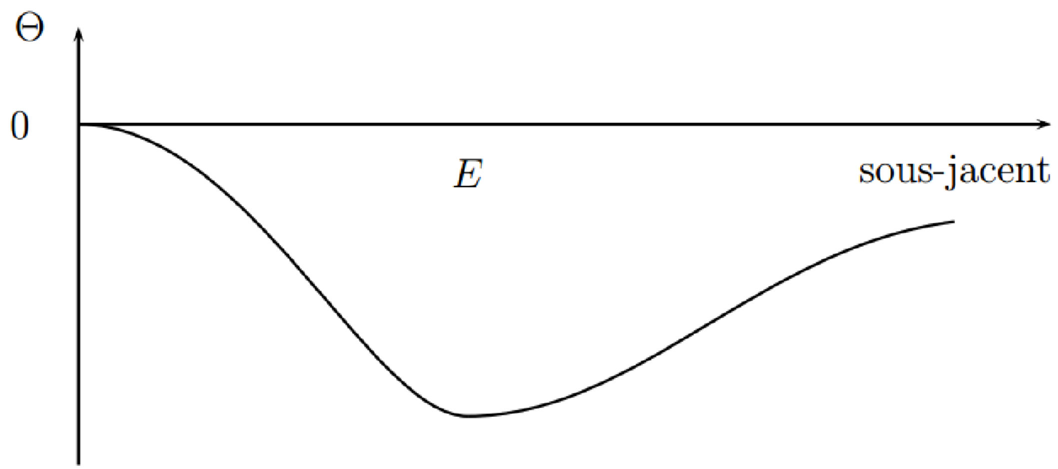
Le Thêta donne la sensibilité de l'option par rapport au temps. La valeur d'une option diminue avec le temps (tous autres paramètres égaux par ailleurs). Il est toujours négatif.

Pour l'option d'achat :

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial t} C = -\frac{\partial}{\partial T} C = -\left[\frac{S\sigma}{2\sqrt{T}} f(d_1) + rEe^{-r\tau} N(d_2) \right] < 0$$

Pour l'option de vente :

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial t} P = -P_T = -C_T + rEe^{-r\tau}$$



Le Thêta en fonction du sous-jacent

2.3 Sensibilité et couverture

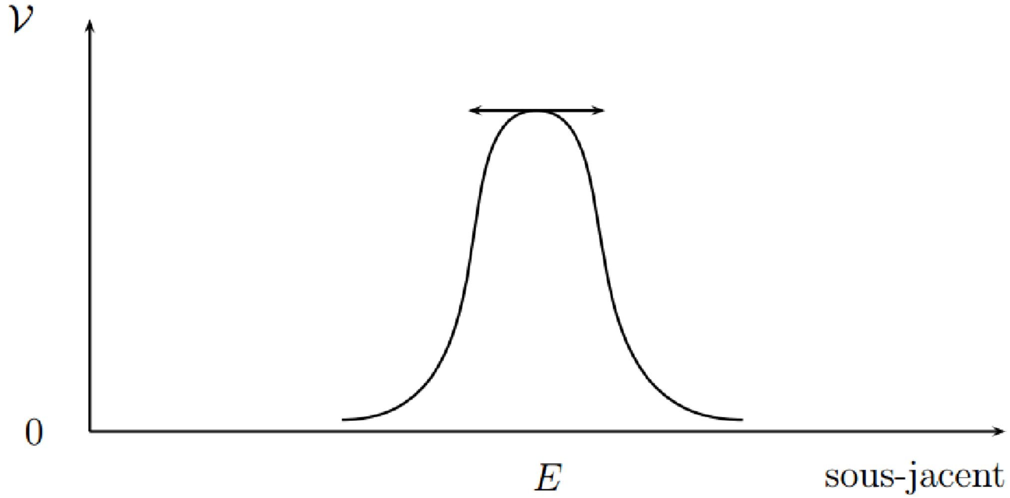
2.3.4 Le Véga υ

Le Véga mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations de la volatilité du sous-jacent.

Pour l'option d'achat et l'option de vente : $$\upsilon = \frac{\partial}{\partial \sigma} C = C_{\sigma} = S\sqrt{\tau} \times f(d_1) > 0$$

La valeur de l'option d'achat est une fonction croissante de la volatilité du sous-jacent. En effet, une volatilité forte augmente les chances d'exercer l'option et augmente donc son prix.

Dans le cas du modèle de Black and Scholes cette quantité présente peu d'intérêt car la volatilité σ est supposée constante.
Il sera plus logique de calculer cette quantité dans le cas d'un modèle où la volatilité est supposée aléatoire (Hull et White, 1987).



L'évolution du Vega en fonction du sous-jacent à σ constant.

2.3 Sensibilité et couverture

2.3.5 Le rho ρ

Le rho mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport au taux d'intérêt continu r. Elle permet de mesurer les risques des options liés à l'évolution des taux d'intérêt à court terme.

Ce paramètre est peu utilisé car les taux d'intérêt sont supposés constants dans le modèle de Black and Scholes et car ils varient peu en pratique sur la durée de vie de l'option.

Pour l'option d'achat : $$\rho_C = \frac{\partial}{\partial r} C = \tau \times E \times e^{-r\tau} N(d_2) > 0$$

Pour l'option de vente : $$\rho_P = \frac{\partial}{\partial r} P = -\tau \times E \times e^{-r\tau} N(-d_2) < 0$$

2.3 Sensibilité et couverture

2.3.6 Le prix d’exercice E

Le prix d’une option d’achat est une fonction décroissante du prix d’exercice et le prix d’une option de vente est une fonction croissante du prix d’exercice.

Pour l’option d’achat : $$\frac{\partial}{\partial E} C = C_E = -e^{-r\tau} N(d_2) < 0$$

Pour l’option de vente : $$\frac{\partial}{\partial E} P = P_E = C_E + e^{-r\tau} > 0$$

3. Les stratégies spéculatives

3.1 Les stratégies simples

Une stratégie simple permet de réaliser un gain supérieur à une stratégie qui achète ou vend le titre sous-jacent quand les anticipations sont vérifiées. A cet instant, la valeur temps est nulle, le prix de l'option est égal à la valeur intrinsèque.

3.1.1 L'achat d'une option d'achat

L'achat d'une option d'achat (Long call) est une spéculation à la hausse. Pour chaque titre sous-jacent, plusieurs options d'achat sont cotées (avec des prix d'exercice différents).

Le prix d'exercice à retenir dépend complètement de l'anticipation de l'investisseur. Si elle est très élevée, il privilégie les options « OUT the money ». Sinon l'investisseur se tourne plutôt vers des options IN ou AT.

3. Les stratégies spéculatives

3.1 Les stratégies simples

3.1.2 La vente d'une option d'achat

La vente d'une option d'achat (Short call) est une spéculation à la baisse. Les rendements sont opposés à ceux de l'acheteur d'une option d'achat.

3.1.3 L'achat d'une option de vente

L'achat d'une option de vente (Long put) est une spéculation à la baisse : l'investisseur espère à l'échéance acheter au prix du marché S et vendre au prix d'exercice E (E > S).

3.1.4 La vente d'une option de vente

La vente d'une option de vente (Short put) est une spéculation à la hausse. Les rendements sont opposés à ceux de l'acheteur d'une option de vente.

3. Les stratégies spéculatives

3.1 Les stratégies simples

Exemple : Les données sont : S=100, σ=20%, τ=1, R=10%. De plus, $E_1 = 90$, $E_2 = 100$ et $E_3 = 110$.
La formule de Black and Scholes nous donne : $C_1 = 19{,}67$, $C_2 = 12{,}99$ et $C_3 = 7{,}97$.

Cours S	70	90	100	110	120	130	160
Valeur option	0	0	10	20	30	40	70
Résultat invest	-19,67	-19,67	-9,67	0,33	10,33	20,33	50,33
Rendt option (%)	-100	-100	-49,16	1,68	52,52	105,56	255,21
Rendt action (%)	-30	-10	0	10	20	30	60

L'achat de l'option d'achat C_1, IN : E = 90, S = 100, $C_1 = 19{,}67$.

Exemple Rendt Option :

$$\frac{9{,}67}{-19{,}67} = -49{,}16\%$$

Les options les plus « OUT of the money » sont celles qui ont le plus de levier : elles donnent le plus fort taux de rentabilité dans la mesure où la valeur de la prime est très faible. Toutefois, la probabilité pour que le seuil critique ou point mort soit atteint est très faible. Pour C_1, le point mort $S_{C1} = 109{,}67$; pour C_2, $S_{C2} = 112{,}99$ et pour le dernier contrat $S_{C2} = 117{,}97$.

3. Les stratégies spéculatives

3.1 Les stratégies simples

Exercice : Déterminez les rendements de l'option d'achat dans les cas suivants :

Cours S	70	90	100	110	120	130	160
Valeur option							
Résultat invest							
Rendt option (%)							

L'achat de l'option d'achat C_2, AT : S=E = 100, C_2 = 12,99.

Cours S	70	90	100	110	120	130	160
Valeur option							
Résultat invest							
Rendt option (%)							

L'achat de l'option d'achat C_3, OUT : E= 110, S= 100 , C_3 = 7,97.

3. Les stratégies spéculatives

3.1 Les stratégies simples

Exercice : Déterminez les rendements de l'option d'achat dans les cas suivants :

Cours S	70	90	100	110	120	130	160
Valeur option	0	0	0	10	20	30	60
Résultat invest	-12,99	-12,99	-12,99	-2,99	7,01	17,01	47,01
Rendt option (%)	-100	-100	-100	-23	54	131	362

L'achat de l'option d'achat C_2, AT : S=E = 100, C_2 = 12,99.

Cours S	70	90	100	110	120	130	160
Valeur option	0	0	0	0	10	20	50
Résultat invest	-7,97	-7,97	-7,97	-7,97	2,03	12,03	42,03
Rendt option (%)	-100	-100	-100	-100	25	151	527

L'achat de l'option d'achat C_3, OUT : E= 110, S= 100 , C_3 = 7,97.

3. Les stratégies spéculatives

3.1 Les stratégies simples

Exemple : Les données sont les mêmes que dans l'exemple 2, soient : S =100, σ = 20%, τ = 1, R = 10%.
Il résulte par la formule de Black and Scholes :

Pour $E_1 = 90$, $P_1 = 1{,}49$ $(S_C(P_1) = 88{,}51)$
Pour $E_2 = 100$, $P_2 = 3{,}90$ $(S_C(P_2) = 96{,}10)$
Pour $E_3 = 110$, $P_3 = 7{,}96$ $(S_C(P_3) = 102{,}04)$

Cours S	70	80	90	100	110	120
Valeur option	20	10	0	0	0	0
Résultat invest	18,51	8,51	-1,49	-1,49	-1,49	-1,49
Rendt option	1242,8%	571%	-100%	-100%	-100%	-100%
Rendt action	-30%	-20%	-10%	0	10%	20%

L'achat de l'option de vente P_1, OUT : S = 100, E = 90 et $P_1 = 1{,}49$.

Exemple Rendt Option :

$$\frac{8{,}51}{-1{,}49} = 571\%$$

3. Les stratégies spéculatives

3.1 Les stratégies simples

Exercice : Déterminez les rendements de l'option de vente dans les cas suivants :

Cours S	50	70	80	90	100	110	120
Valeur option							
Résultat invest							
Rendt option (%)							

L'achat de l'option de vente P_2, AT : S=E = 100, P_2 = 3,90.

Cours S	50	70	80	90	100	110	120
Valeur option							
Résultat invest							
Rendt option (%)							

L'achat de l'option de vente P_3, IN : S=100, E=110, P_3 = 7,96.

3. Les stratégies spéculatives

3.1 Les stratégies simples

Exercice : Déterminez les rendements de l'option de vente dans les cas suivants :

Cours S	50	70	80	90	100	110	120
Valeur option	50	30	20	10	0	0	0
Résultat invest	46,1	26,1	16,1	6,1	-3,9	-3,9	-3,9
Rendt option (%)	1182	669	413	156	-100	-100	-100

L'achat de l'option de vente P_2, AT : S=E = 100, P_2 = 3,90.

Cours S	50	70	80	90	100	110	120
Valeur option	60	40	30	20	10	0	0
Résultat invest	52,04	32,04	22,04	12,04	2,04	-7,96	-7,96
Rendt option (%)	653	403	277	151	26	-100	-100

L'achat de l'option de vente P_3, IN : S=100, E=110, P_3 = 7,96.

3. Les stratégies spéculatives

3.2 Les stratégies d’écart

Une stratégie d’écart utilise deux options ou plus du même type (deux options d’achat ou deux options de vente). Si les prix d’exercice varient, il s’agit d’un écart vertical. Si les échéances changent, il s’agit d’un écart horizontal.

3.2.1 Les écarts verticaux

Une stratégie d’écart vertical (spread trading strategy) suppose l’achat et la vente d’une option d’achat portant sur le même sous-jacent, ayant la même échéance mais avec des prix d’exercice différents. On parle d’écart vertical haussier (Bull spread) et d’écart vertical baissier (Bear spread).

3.2.1 Les écarts verticaux

L’écart vertical haussier

Un investisseur construit un écart vertical haussier s’il anticipe une hausse modérée du sous-jacent. Il peut être construit avec deux options d’achat (du même sous-jacent et de même maturité). Il achète C_1 et vend C_2 sous la contrainte $E_1 < E_2$ ($C_1 > C_2$). Il résulte à l’échéance :

	$S < E_1$	$E_1 < S < E_2$	$E_2 < S$
Achat C_1	0	$S - E_1$	$S - E_1$
Vente C_2	0	0	$-S + E_2$
Total position	0	$S - E_1$	$E_2 - E_1$
Invest initial	$-(C_1 - C_2)$	$-(C_1 - C_2)$	$-(C_1 - C_2)$
Résultat net	$-(C_1 - C_2)$	$S - E_1 - (C_1 - C_2)$	$E_2 - E_1 - (C_1 - C_2)$

Récapitulatif à l’échéance

Rappel : $C = \max(0\,; S_T - E)$

3.2.1 Les écarts verticaux

Exemple : Les données sont S = 35, σ = 0,3 , τ = 0, 75 , R = 0, 03.

La stratégie comprend :
Achat de C_1 (E_1= 40, C_1 = 2, 12)
Vente de C_2 (E_2 =50, C_2 = 0, 70)

Dans cet exemple, les deux options sont «OUT the money». L'investissement initial est de 1,42. S_c est le seuil critique ou point mort de la stratégie.

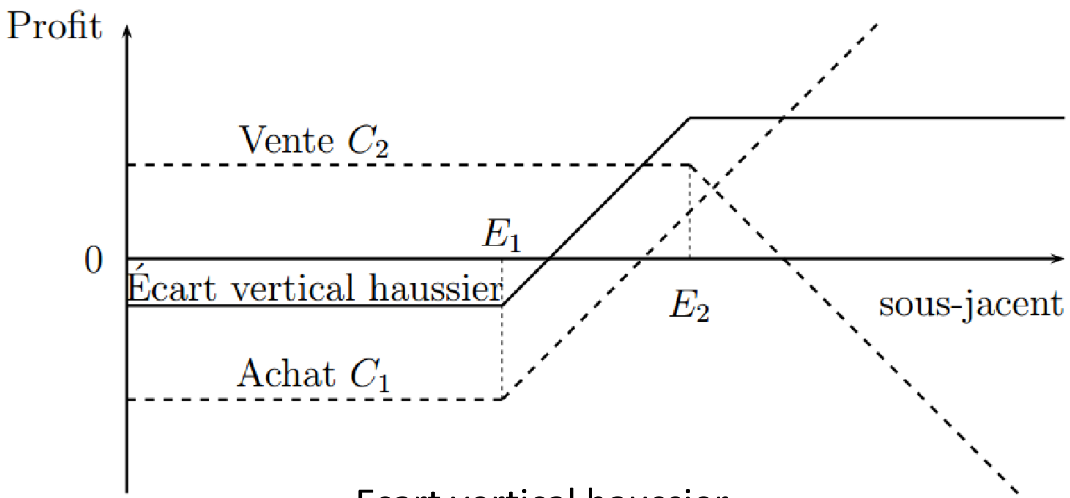
S	30	35	40	45	50	55	60	S_C
Achat C_1	-2.12	-2.12	-2.12	2,88	7,88	12,88	17,88	42,12
Vente C_2	0,70	0,70	0,70	0,70	0,70	-4,30	-9,30	50,70
Résultat net	-1,42	-1,42	-1,42	2,18	7,18	8,58	8,58	
Rendement %	-100	-100	-100	53	405	504	504	41,42

Exemple chiffré de l'écart vertical haussier

3.2.1 Les écarts verticaux

Exemple : L'écart a un seuil critique égal à $E_1 + (C_1 - C_2) = 40 + 1,42 = 41,42$.

En comparant avec l'achat simple d'un call C_1, on a un rendement bien différent pour S = 50. Le rendement du call est de 7, 88/2, 12 − 1 soit 270% tandis que le rendement de l'écart haussier est ici de 405%.



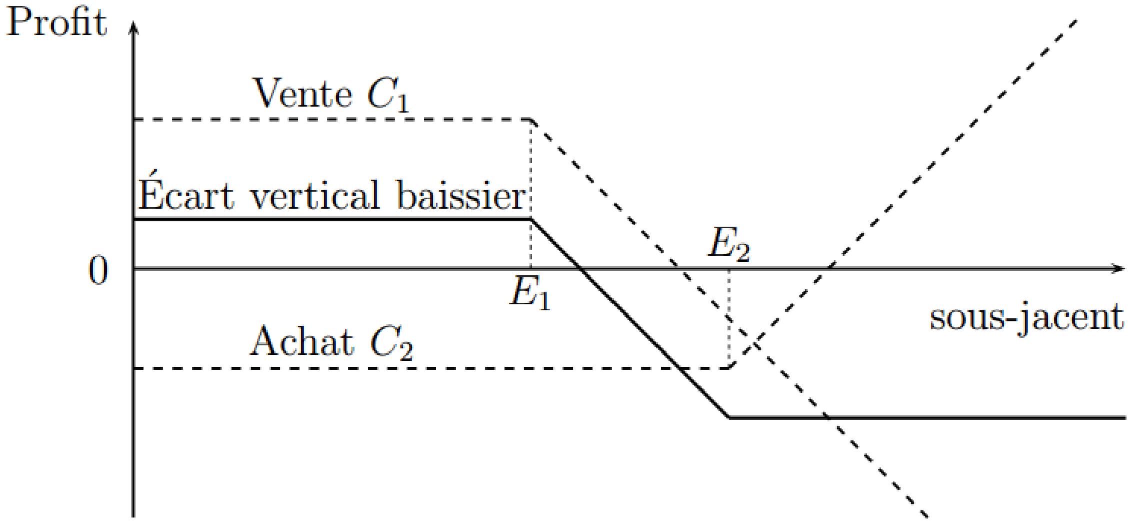
Ecart vertical haussier

3.2.1 Les écarts verticaux

L'écart vertical baissier

Par opposition à l'écart vertical haussier, l'écart vertical baissier anticipe une baisse modérée du sous-jacent. Dans le cas des options d'achat, l'investisseur vend l'option la plus chère et achète la moins chère.

Exemple chiffré de l'écart vertical baissier :



L'écart vertical baissier

3.2.1 Les écarts verticaux

L'écart vertical baissier

Exemple : Les données sont $S = 42$, $\sigma = 0, 3$, $\tau = 0, 75$, $R = 0{,}03$.

La stratégie comprend :

Vente de C_1 ($E_1 = 40$, $C_1 = 5{,}78$)
Achat de C_2 ($E_2 = 50$, $C_2 = 2{,}03$)
L'investissement initial est négatif : $C_2 - C_1 = -3{,}75$

S	30	40	45	50	55	60	S_C
Vente C_1	5,78	5,78	0,78	-4,22	-9,22	-19,22	45,78
Achat C_2	-2,03	-2,03	-2,03	-2,03	2,97	12,97	52,03
Résultat net	3,75	3,75	-1,25	-6.25	-6,25	-6,25	43,75

Exemple chiffré de l'écart vertical baissier

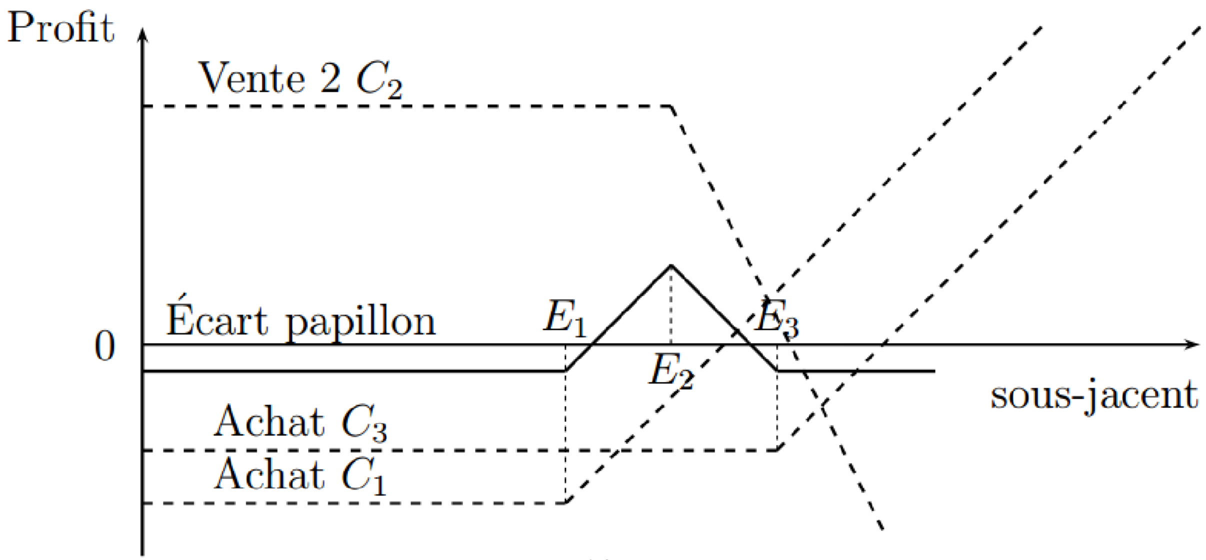
3.2.1 Les écarts verticaux

L'écart papillon

Un écart papillon (butterfly spread) anticipe une faible variation du sous-jacent. C'est la somme d'un écart vertical haussier et d'un écart vertical baissier.

C'est une stratégie appropriée pour un investisseur qui pense que des grandes variations du sous-jacent sont peu probables.

Cette stratégie nécessite un faible investissement initial.



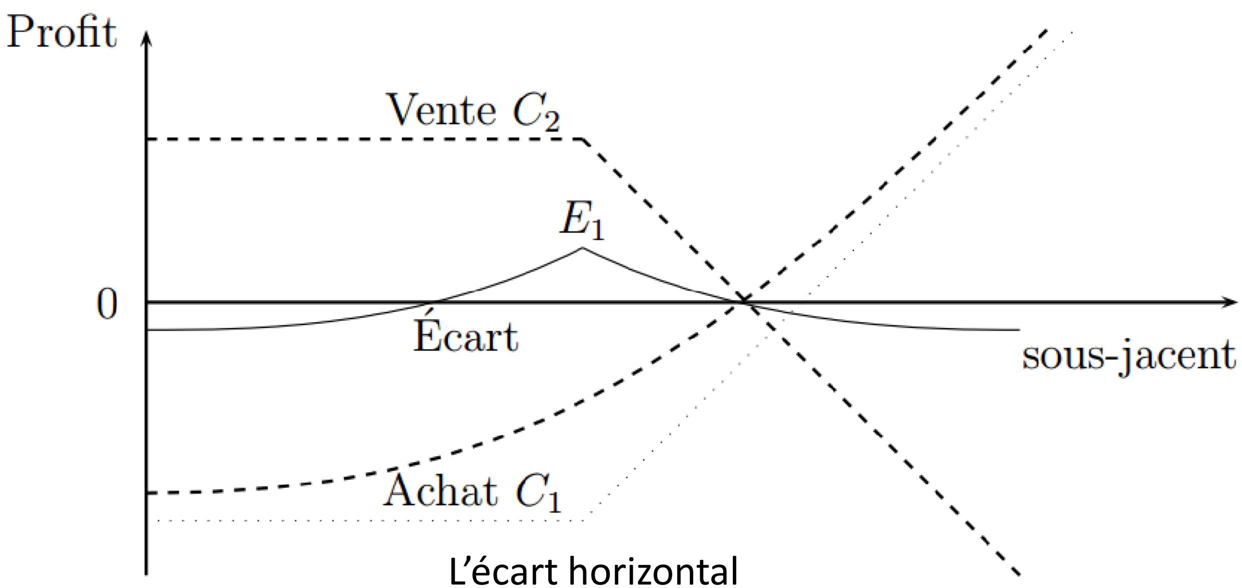
L'écart papillon

L'opérateur achète une option d'achat, en vend deux autres à un prix d'exercice supérieur, et achète une dernière à un prix d'exercice encore supérieur. Ces quatre options d'achat ont le même titre sous-jacent et la même échéance.

3.2 Les stratégies d’écart

3.2.2 Les écarts horizontaux

Lorsque ce sont les échéances qui changent dans une stratégie d’écart, il s’agit d’un écart horizontal (calendar spread). Avec des options d’achat, un écart horizontal débiteur combine l’achat de l’option à échéance la plus lointaine et la vente de l’option à l’échéance la plus courte.



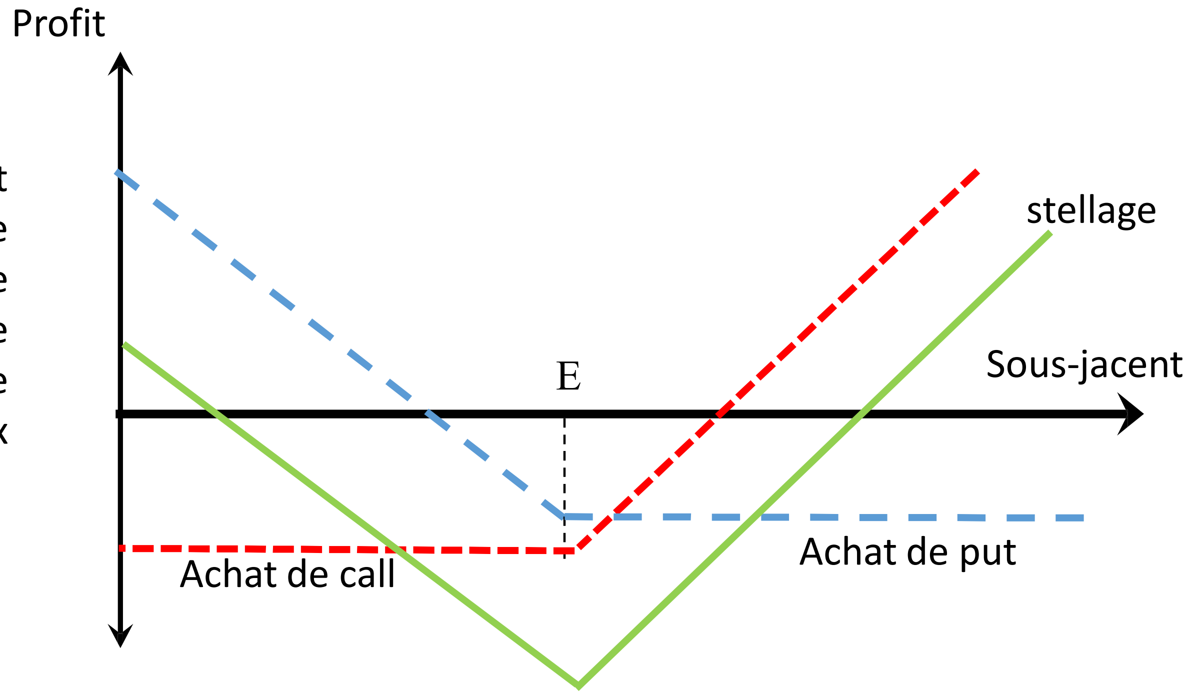
L’écart horizontal

3.3 Les stratégies combinées

Une stratégie combinée utilise à la fois des options d'achat et des options de vente. Nous considérons les stellages, les strangles et les ratio.

3.3.1 Les stellages

Un stellage (straddles) combine une option d'achat et une option de vente de même échéance, de même sous jacent et de même prix d'exercice (E). Cette stratégie anticipe une forte variation du cours que ce soit à la hausse ou à la baisse. La perte maximale intervient si à l'échéance le prix spot est égal au prix d'exercice.

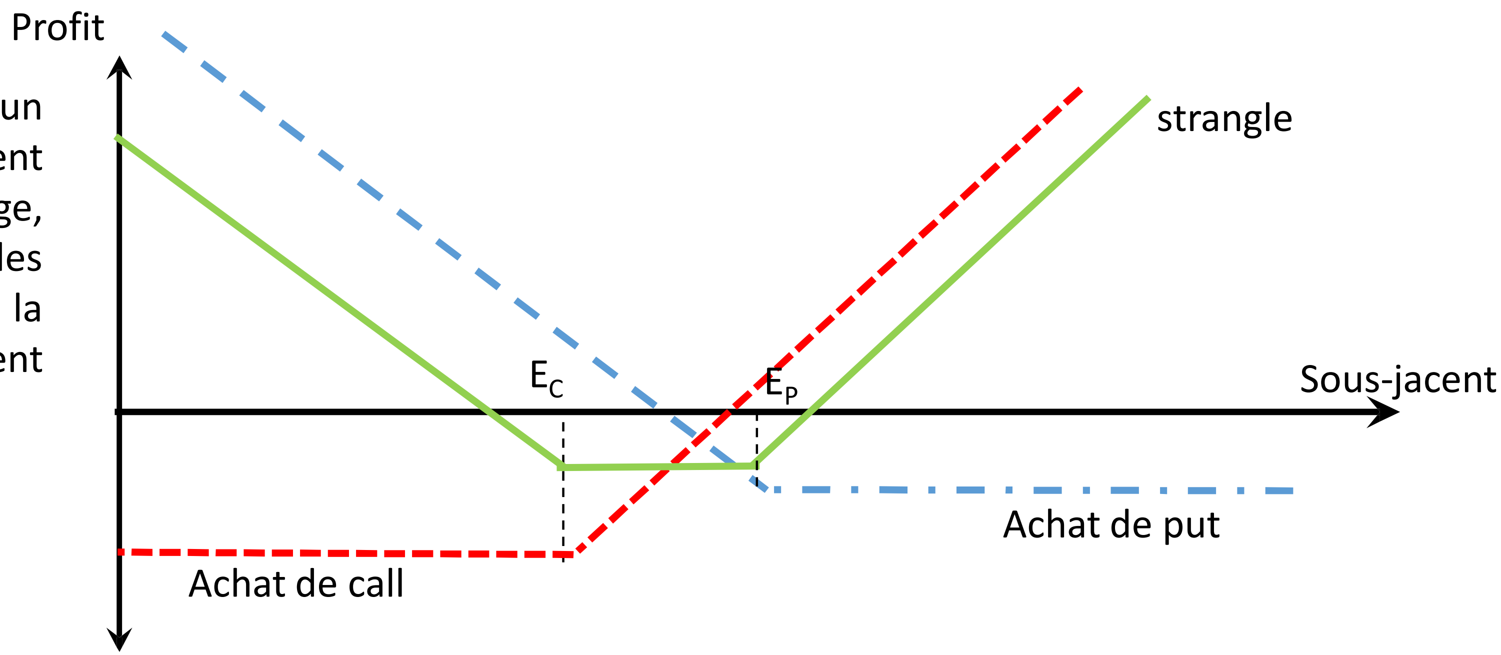


3.3 Les stratégies combinées

3.3.2 Les strangles

Un strangle est la somme d'une option d'achat et d'une option de vente de même échéance, de même sous-jancent mais de prix d'exercice différent. Le strangle anticipe une très forte variation de la valeur du sous-jacent.

Le strangle nécessite un moins grand investissement au départ, que le stellage, mais il faut être sûr que les variations attendues à la hausse ou à la baisse soient très fortes.



3.3 Les stratégies combinées

3.3.3 Les ratios

Un ratio est la somme d'un écart vertical et d'une stratégie élémentaire.
Un ratio peut être par exemple constitué d'un écart vertical haussier et de la vente d'une option d'achat. Ce ratio est composé de l'achat d'une option d'achat C_1 et de la vente de deux options d'achat C_2 , l'investissement initial est alors de $C_1 - 2C_2$. Il résulte à l'échéance :

S	$S < E_1$	$E_1 < S < E_2$	$S > E_2$
Achat de C_1 Vente de $2C_2$ Total	0 0 0	$S - E_1$ 0 $S - E_1$	$S - E_1$ $-2(S - E_2)$ $-S + 2E_2 - E_1$
Résultat final	$-(C_1 - 2C_2)$	$S - E_1 - (C_1 - 2C_2)$	$-S + 2E_2 - E_1$ $-(C_1 - 2C_2)$

Résultat à l'échéance d'un ratio

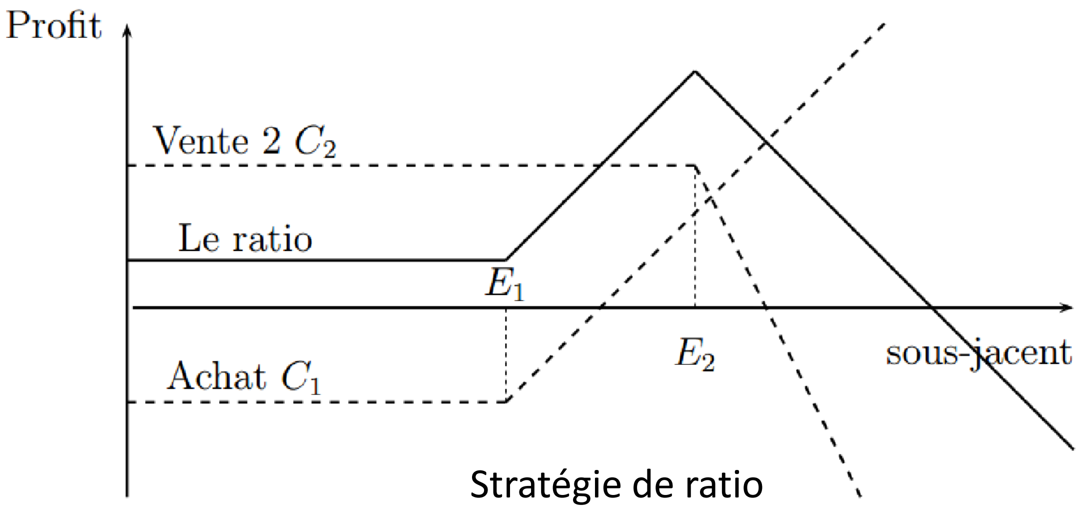
3.3 Les stratégies combinées

3.3.3 Les ratios

Exemple

On réalise la somme de deux écarts verticaux haussiers et la vente d'une option d'achat. Les données sont :

- Achat de $2C_1$ (E_1 = 250, σ = 20%, τ = 0,5 , R = 10%, S = 260€)
- Vente de $3C_2$ (E_2= 270, σ = 20%, τ = 0,5 , R = 10%, S = 260€)



Stratégie de ratio

3.3 Les stratégies combinées

3.3.3 Les ratios

Il en résulte d'après la formule de Black and Scholes que C_1 = 27, 29 et C_2 = 15,77.
L'investissement initial est égal à 2,07 = $2C_1 - 3C_2$.

S	240	250	253,63	260	270	280	290
Achat de $2C_1$	-54,58	-54,58	-47,31	-34,58	-14,58	5,42	25,42
Vente de $3C_2$	47,31	47,31	47,31	47,31	47,31	17,31	-12,69
Ratio	-7,27	-7,27	0	12,73	32,73	22,73	12,73
Rendement %	-100	-100	0	-175	450	312	175

TD : Les options négociables sur action

Exercice 1 : Le prix d'une option négociable sur action

Une option vaut 6,01€ et a un delta de -0,30 et un gamma de 0,01 :

1. Précisez s'il s'agit d'une option d'achat ou de vente.
2. Cette option est-elle « IN, AT, ou OUT the money » ?
3. Le sous-jacent augmente subitement de 2,00€. Réaliser une nouvelle estimation des prix des options avec les informations disponibles. Donner une estimation du nouveau prix de l'option.

TD : Les options négociables sur action

Exercice 1 : correction

1. Le delta de cette option est négatif, c'est donc une option vente.

2. Gamma=0,01<0,5 => cette option est « OUT the money ».

3. Pour un développement de Taylor on a :

$$P(S+\varepsilon) = P(S) + \varepsilon \frac{dP}{dS} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d^2P}{dS^2}$$

$$\Rightarrow P(S+2) = 6{,}01 + 2 \times (-0{,}30) + \frac{2^2}{2} \times 0{,}01 = 5{,}43$$

TD : Les options négociables sur action

Exercice 2 : Les stratégies spéculatives

L'achat d'un écart papillon peut être réalisé avec des options de vente. Les prix du marché pour les trois options de vente sont les suivantes :

Prix d'exercice	Prix du put
55	5
60	7
65	10

Construire l'écart papillon.

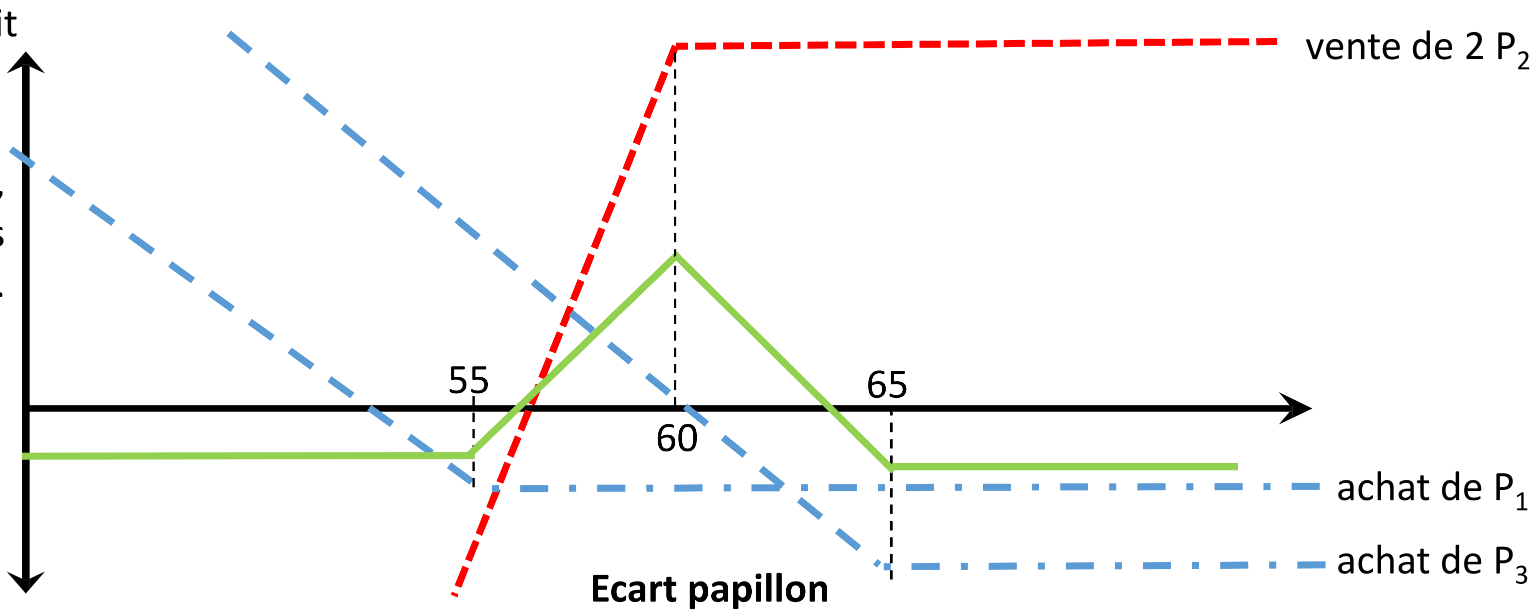
TD : Les options négociables sur action

Exercice 2 : correction

Un écart papillon est la somme d'un écart vertical haussier et d'un écart vertical baissier.

Ecart vertical haussier avec des Puts : achat de P_1 ,vente de P_2 , avec $E_1 < E_2$.
Ecart vertical baissier avec des Puts : vente de P_2 , achat de P_3 , avec $E_2 < E_3$.
Conclusion : achat de P_1 (prix d'exercice 55) ,vente de 2 P_2 (prix d'exercice 60), achat de P_3 (prix d'exercice 65).

Avec un écart papillon, on anticipe des faibles variations du sous-jacent.



Bibliographie

Cours sur « Introduction aux mathématiques financières », Aymric Kamega, 2014
Cours sur « La gestion du risque de taux d'intérêt », Finance internationale, Y. Simon & D. Lautier
Cours sur « Les Produits et les stratégies de taux », Frédéric Leroy
Cours sur « Les Options Négociables sur Action, Evaluation et Gestion », Martial Phélippé-Guinvarc'h
Cours sur « Mathématiques pour la finance », Renaud Bourlès