ESILV

4eme année

Année universitaire 2018-2019

Examen : « Actuarial Mathematics »

Durée : 2 heures

Laurent IMBERT

Remarques : AUCUN DOCUMENT N'EST ADMIS, CALCULATRICE COLLEGE AUTORISEE.

Question de culture générale (4 points)

1) Racontez l'histoire de George Soros avec l'attaque spéculative de la livre sterling et expliquez ces conséquences.
2) Présentez les principaux objectifs de la FED et de la BCE.
3) Citez des exemples d'hyper inflation en expliquant les causes et des conséquences sur l'économie.
4) Présentez rapidement la crise de 1929.
5) Présentez rapidement les CDO synthétiques et son rôle dans la crise des subprimes.

Exercice 1 (3 points)

Un stellage (*straddle*) est une option européenne construite sur un sous-jacent *S* synthétisée par l'achat simultanée d'un call et d'un put sur *S* de même maturité et de même prix d'exercice *K*.

1) Déterminer le pay-off de cette option et tracer son graphe. Donner sa prime à $t = 0$ en fonction des paramètres habituels des formules de Black-Scholes $(\sigma, K, S_0, r, T, d_1, d_2)$ et de la répartition N de la loi normale standard. Donner en particulier la formule pour $K = S_0$.

2) On suppose $S_0 = 30€ = K$, $T = 3$ *mois*, $\sigma = 30\%$ et $r = 5\%$ (taux annuels). Déterminer la prime de ce stellage.

3) Déterminer les gains et les pertes maximales que peut enregistrer un trader qui aurait acheté ce stellage. Quelle est la stratégie d'une telle option ?

Exercice 2 (4 points)

La solution analytique dans le cas d'une option d'achat de l'équation différentielle de Black-Scholes-Merton est : $C = S \times N(d_1) - E \times e^{-r\tau} N(d_2)$

Où *N* représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et où

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

On reprend les notations usuelles du cours des formules de Black-Scholes avec E=K (le prix d'exercice fixé de l'option).

1) Redémontrer la relation de parité et déterminer le prix d'un put à partir d'un prix d'un call.

2) Montrer l'égalité $S_t N'(d_1) = K e^{-r(T-t)} N'(d_2)$

3) En déduire que la valeur du delta d'un call européen peut s'écrire $\Delta_{call} = N(d_1)$.

4) Donner une formule analogue pour le delta d'un put, puis montrer que $\Delta_{call} - \Delta_{put} = 1$.

5) Le gamma d'une option $f = f(t, s)$ est la dérivée seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, S_t)$ .Calculer le gamma d'un call et d'un put européens. Montrer que les prix de ces options sont des fonctions convexes du sous-jacent.

Exercice 3 (3 points)

Un particulier souscrit un crédit à un taux de 2% de 200 000€ à remboursement annuel d'une durée de 5 ans. Toutes les anuités sont constantes sauf celle de la 1ere année qui est minorée de 20 000€. L'assurance décès coute 1000€ chaque année à partir de la première année. Il y a des frais de garantie de 4000€ non remboursables et 2000€ au titre de frais de dossier.

1) Calculer le montant de l'annuité constante de ce crédit en tenant compte du fait que la 1ère anuité est minorée de 20 000 €.
2) Ecrire le tableau d'amortissement de ce crédit avec les colonnes suivantes : Echéances (totales), Intérêts, frais divers+assurance, amortissement et CRD.
3) Ecrire l'équation développée de ce crédit permettant de déterminer le TEG (noté X).

Exercice 4 (2,5 points)

1) Calculer le prix d'une obligation 3 ans, coupon 6% dont le rendement est 7%.
2) Calculer la duration, la convexité et la variation de cette obligation.
3) Utiliser ce résultat pour estimer de rendement du titre si le prix est de 0,99

Exercice 5 : Calcul actuariel (3,5 points)

Dans cet exercice, on considère 2 obligations A et B dont les caractéristiques figurent dans le tableau ci-dessous :

Obligation	Maturité (ans)	Coupon	Prix
A	10	5%	1
B	12	6%	0,97

3.1 En utilisant la variation, calculer une valeur approchée du rendement actuariel de B (aidez-vous de l'annexe).

3.2 On considère un portefeuille composé de 50€ nominal de titre A et 100€ nominal de titre B. Calculer une approximation au premier ordre du rendement actuariel de ce portefeuille.

Annexe : Développement limité au premier ordre (avec f est dérivable) de f(x) en x= x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$$