TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH
BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #2: ĐÁNH GIÁ THUẬT TOÁN DÙNG KỸ THUẬT TOÁN SƠ CẤP

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Hương
Người thực hiện: Nguyễn Đỗ Quang 20520720
TP.HCM, ngày 28, tháng 9, năm 2022

https://www.cs.cornell.edu/courses/cs3110/2014sp/recitations/21/solving-recurrences.html

Bài tập 1:

Câu a:
f(0) = 1000
f(1) = f(0)+1000*0.12
f(2) = f(1)+f(1)*0.12
...
f(n) = f(n-1) +f(n-1)*0.12
= $\mathrm{f}(\mathrm{n}-1) * 1{,}12$

Phương trình đệ quy là: $\begin{cases} C_1 & khi\ n = 0 \\ T(n-1)\ + C_2 & khi\ n > 0 \end{cases}$

Số tiền có được sau 30 năm là:

Câu b:
Phương trình đệ quy là: $\begin{cases} C_1 & khi\ n = 0\ hoặc\ n = 1 \\ \mathrm{f}(\mathrm{n}-1) + \mathrm{f}(\mathrm{n}-2) + C_2 & khi\ n > 1 \end{cases}$

Câu c:
Phương trình đệ quy là: $\begin{cases} C_1 & khi\ n = 1 \\ 2\mathrm{g}(\mathrm{n}/2) + C_2 & khi\ n > 1 \end{cases}$

Câu d:
Xét
Phương trình đệ quy là: $\begin{cases} C_1 & khi\ n = 1 \\ 2\mathrm{g}(\mathrm{n}/2) + C_2 & khi\ n > 1 \end{cases}$

Bài tập 2:
Câu 1:
T(n) = T(n-1) + 5 T(1) = 0
= [T(n-2) + 5] + 5
= T(n-2) + 2*5
= [T(n-3) + 5] + 2*5
= T(n-3) + 3*5

=> T(n) = T(n-i) + i*5

Quá trình dừng lại khi:
n-i= 1
<=> i =n-1
<=>T(n) = T(1) + (n-1)*5 = 5n-5
Câu 2:
T(n) = T(n-1) + n T(1) = 1
= [T(n-2) + n-1]+n
= T(n-2) + 2n -1
= [T(n-3) + (n-2)] + 2n -1
= T(n-3) + 3n -1 - 2
= [T(n-4) + (n-3)] +3n - 1 -2
=T(n-4) + 4n - 1- 2 - 3

$=T(n-i) + in - \sum_{i=1}^{n-1} i$

Quá trình dừng lại khi:

n-i = 1

<=>i = n-1

$T(n) = T(0) + (n-1)n - \frac{n(n-1)}{2} = 1 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2-n+2}{2}$

câu 3:

$T(n) = 3T(n-1) + 1$ $\quad T(1) = 4$

$= 3[3T(n-2) + 1] + 1$

$= 9T(n-2) + 3 + 1$

$= 9[3T(n-3) + 1] + 3 + 1$

$=27T(n-3) + 9 + 3 + 1$

$=> T(n) = 3^i T(n-i) + \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1}$

Câu 4:

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1$ $\quad T(1) = 1$

$= 2[2T(\frac{n}{4}) + 1] + 1$

$=4T(\frac{n}{4}) + 2 + 1$

$=4[2T(\frac{n}{8})+1] + 2 + 1$

$=8T(\frac{n}{8}) + 4 + 2 + 1$

$=>T(n) = 2^i T(\frac{n}{2^i}) + \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}$

Câu 5:

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$ $\quad T(1) = 1$

$=2[2T(\frac{n}{4})+\frac{n}{2}] + n$

$=4T(\frac{n}{4}) + 2n$

$=4[2T(\frac{n}{8})+\frac{n}{4}] + 2n$

$=8T(\frac{n}{8}) + 3n$

$=>T(n) = 2^i T(\frac{n}{2^i}) + n*i$

Quá trình dừng lại khi:

$\frac{n}{2^i} = 1$

$<=>2^i = n$

$<=>i = \log_2 n$

$T(n) = n+n*\log_2 n$

Câu 6:

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^2$ $\quad T(1) = 1$

$=2[2T(\frac{n}{4}) + (\frac{n}{2})^2 \ ] + n^2$

$=4T(\frac{n}{4}) + n^2+n^2$

$=4[2T(\frac{n}{8})+(\frac{n}{4})^2 \ ]+ n^2+n^2$

$=8T(\frac{n}{8}) + \frac{n^2}{2} \ n^2+n^2$

$=8[2T(\frac{n}{16})+(\frac{n}{8})^2] +\frac{n^2}{2}+n^2+n^2$

$=16T(\frac{n}{16})+\frac{n^2}{4}+\frac{n^2}{2}+n^2+n^2$

$=2^i T(\frac{n}{2^i}) + n^2 + n^2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...)$

Câu 7:

T(n) = $2T(\frac{n}{2}) + \log_2 n$ T(1) = 1

$= 2[2T(\frac{n}{4}) + \log_2 \frac{n}{2}] + \log_2 n$

$=4T(\frac{n}{4}) + 2\log_2 n - 2 + \log_2 n$

$=4[2T(\frac{n}{8}) + \log_2 \frac{n}{4}] + 2\log_2 n + \log_2 n - 2$

$=8T(\frac{n}{8}) + 4\log_2 n + 2\log_2 n + \log_2 n - 4*2 - 2*1$

Bài tập 3:

Câu 1:

T(n) = $3T(\frac{n}{2}) + n^2$ T(1) = 1

$=3[3T(\frac{n}{4}) + (\frac{n}{2})^2] + n^2$

$=9T(\frac{n}{4}) + 3(\frac{n}{2})^2 + n^2$

$=9[3T(\frac{n}{8}) + (\frac{n}{4})^2] + 3(\frac{n}{2})^2 + n^2$

$=27T(\frac{n}{8}) + 9(\frac{n}{4})^2 + 3(\frac{n}{2})^2 + n^2$

=> T(n) = $3^i T(\frac{n}{2^i}) + n^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{3^{i-1}}{2^{2i-2}}$

Quá trình dừng lại khi:

$\frac{n}{2^i}=1$

<=>2^i= n

<=>i = $\log_2 n$

T(n) = $3^{\log_2 n} + n^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{3^{\log_2 n - 1}}{2^{2(\log_2 n) - 2}}$

Câu 2:

Bài tập 4:

Câu 1:

T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2)

T(0) = 1

T(1) = 2

Đặt X^2 = T(n)

Ta có: $X^n - 4X^{n-1} + 3X^{n-2} = 0$

<=>X^2-4X+3=0

<=> $\begin{matrix} X = 1 \\ X = 3 \end{matrix}$

T(n) = $C_1 1^n + C_2 3^n$

Ta có: $\begin{cases} T(0) = 1 \\ T(1) = 2 \end{cases}$

<=> $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 3C_2 = 2 \end{cases}$

<=> $\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

T(n) = T(n) = $\frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}$

Câu 2:

T(n) = 4T(n-1) - 5T(n-2) +2T(n-3)
T(0) = 0
T(1) = 1
T(2) = 2

Đặt X^2 = T(n)

Bài tập 5:
Câu a:

T(n) = $\begin{cases} 1 & khi\ n = 0 \\ 2T(n-1) + 7 & khi\ n > 0 \end{cases}$

Hàm sinh của dãy $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng như sau:
f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} T(n)\, x^n$ = T(0)+T(1)x+T(2)x^2+...

f(x) = $\sum_{n=1}^{\infty} [2T(n-1) + 7]\, x^n$+T(0)
= 2$\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^n$+7$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$+1

Đặt A = $\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^n$ = x$\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^{n-1}$ =x(T(0)+T(1)x+..) =xf(x)

Đặt B = $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$=$\frac{1}{1-x}$-1= $\frac{x}{1-x}$

Thay A và B lại vào biểu thức có: f(x) = 2xf(x) + 7$\frac{x}{1-x}$ +1
<=>(1-2x)f(x) = $\frac{6x+1}{1-x}$
<=>f(x) = $\frac{6x+1}{(1-x)(1-2x)}$ = $\frac{a}{(1-x)}$ + $\frac{b}{1-2x}$
Ta có:(1-2x)a+(1-x)b = 6x+1
có hệ: $\begin{cases} -2a - b = 6 \\ a + b = 1 \end{cases}$
<=>$\begin{cases} a = -7 \\ b = 8 \end{cases}$
Vậy f(x) = $\frac{-7}{(1-x)}$ + $\frac{8}{1-2x}$
=-7$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$+8$\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$
=$\sum_{n=0}^{\infty} (8.2^n - 7)\, x^n$
T(n) = $8.2^n - 7$

Câu b:
b$\begin{cases} T(n) = 7T(n-1) - 12T(n-2) \quad nếu\ n >= 2 \\ T(0) = 1 \\ T(1) = 2 \end{cases}$