TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH
BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #2: ĐÁNH GIÁ THUẬT TOÁN DÙNG KỸ THUẬT TOÁN SƠ CẤP

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Hương
Người thực hiện: Nguyễn Đỗ Quang 20520720

TP.HCM, ngày 28, tháng 9, năm 2022

Bài tập 1:

Câu a:

f(0) = 1000
f(1) = f(0)+1000*0.12
f(2) = f(1)+f(1)*0.12
...
f(n) = f(n-1) +f(n-1)*0.12
$= \mathrm{f(n-1)} * 1{,}12$

mã giả:

```
def func(n):
    if n==0: return 1000
    return func(n-1)*1.12
```

Phương trình đệ quy là: $T(n)=\begin{cases} C_1 & khi\ n=0 \\ T(n-1)\ + C_2 & khi\ n>0 \end{cases}$

Số tiền có được sau 30 năm là:

Câu b:

Phương trình đệ quy là: $T(n)=\begin{cases} C_1 & khi\ n=0\ hoặc\ n=1 \\ \mathrm{T(n-1)+T(n-2)}+C_2 & khi\ n>1 \end{cases}$

Câu c:

Phương trình đệ quy là: $\mathrm{T(n)} = \begin{cases} C_1 & khi\ n=1 \\ \mathrm{2T(n/2)}+C_2 & khi\ n>1 \end{cases}$

Câu d:

Xét

Phương trình đệ quy là: $T(n)=\begin{cases} C_1 & khi\ n=0 \\ \sum_{i=1}^{n} T(n-i)+C_2 & khi\ n>1 \end{cases}$

Câu e:

$T(n)=\begin{cases} C_1 & khi\ n=0 \\ \mathrm{T(n-1)}+C_2 & khi\ n>1 \end{cases}$

Câu f:

Phương trình đệ quy là: $T(n)=\begin{cases} C_1 & khi\ n=0 \\ \mathrm{T(n-3)}+C_2 & khi\ n>0 \end{cases}$

Trong đó C_2 = n*n=n^2

=>$T(n)=\begin{cases} C_1 & khi\ n=0 \\ 3\mathrm{T}(\frac{n}{2})+C_2 & khi\ n>0 \end{cases}$

Câu g:

Phương trình đệ quy là: $T(n)=\begin{cases} C_1 & khi\ n=0 \\ \sum_{i=1}^{n} T(n-i)+C_2 & khi\ n>0 \end{cases}$

Câu h:

T(n)=$\begin{cases} 1 & khi\ n = 1 \\ \mathrm{T(n-1)} + 1 + \mathrm{T(n-1)} & khi\ n > 1 \end{cases}$

=>T(n)=$\begin{cases} 1 & khi\ n = 1 \\ 2\mathrm{T(n-1)} + 1 & khi\ n > 1 \end{cases}$

Bài tập 2:

Câu 1:

T(n) = T(n-1) + 5 T(1) = 0
= [T(n-2) + 5] + 5
= T(n-2) + 2*5
= [T(n-3) + 5] + 2*5
= T(n-3) + 3*5

=> T(n) = T(n-i) + i*5

Quá trình dừng lại khi:
n-i= 1
<=> i =n-1
<=>T(n) = T(1) + (n-1)*5 = 5n-5

Câu 2:

T(n) = T(n-1) + n T(1) = 1
= [T(n-2) + n-1]+n
= T(n-2) + 2n -1
= [T(n-3) + (n-2)] + 2n -1
= T(n-3) + 3n -1 - 2
= [T(n-4) + (n-3)] +3n - 1 -2
=T(n-4) + 4n - 1- 2 - 3
=T(n-i) + in - $\sum_{k=1}^{i-1} k$
Quá trình dừng lại khi:
n-i = 1
<=>i = n-1
T(n) = T(0) + (n-1)n - $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ = 1 + $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ = $\frac{n^2+n}{2}$

câu 3:

T(n) = 3T(n-1) + 1 T(1) = 4
= 3[3T(n-2) + 1] + 1
= 9T(n-2) + 3 + 1
= 9[3T(n-3) + 1] + 3 + 1
=27T(n-3) + 9 + 3 + 1
=> T(n) = 3^iT(n-i) +$\sum_{k=0}^{i-1} 3^k$
Quá trình dừng lại khi:
n-i = 1
<=>i = n-1
T(n) = 3^{n-1}T(1)+$\sum_{k=0}^{i-1} 3^k$ (Trong đó: $\sum_{k=0}^{i-1} 3^k = \frac{3^{i+1}-1}{3-1}$ - $3^i = \frac{3^i-1}{2}$)
= $43^{n-1} + \frac{3^{n-1}-1}{2}$ = $\frac{9.3^{n-1}-1}{2}$

Câu 4:

T(n) = 2T($\frac{n}{2}$) + 1 T(1) = 1
= 2[2T($\frac{n}{4}$) + 1] + 1
=4T($\frac{n}{4}$) + 2 +1
=4[2T($\frac{n}{8}$)+1] + 2 + 1

=8T($\frac{n}{8}$) + 4 +2 +1

=>T(n) = 2^iT($\frac{n}{2^i}$) + $\sum_{k=0}^{i-1} 2^k$ (Trong đó:$\sum_{k=0}^{i-1} 2^k$=2^i-1)

Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{2^i}$=1

<=>2^i = n

<=> i = $\log_2 n$

T(n) = $2^{\log_2 n}$+$2^{\log_2 n}$-1 = 2n-1

Câu 5:

T(n) = 2T($\frac{n}{2}$) + n T(1) = 1

=2[2T($\frac{n}{4}$)+$\frac{n}{2}$] + n

=4T($\frac{n}{4}$) + 2n

=4[2T($\frac{n}{8}$)+$\frac{n}{4}$] + 2n

=8T($\frac{n}{8}$) +3n

=>T(n) = 2^iT($\frac{n}{2^i}$) + n*i

Quá trình dừng lại khi:

$\frac{n}{2^i}$ = 1

<=>2^i= n

<=>i = $\log_2 n$

T(n) = n+n*$\log_2 n$

Câu 6:

T(n) = 2T($\frac{n}{2}$) + n^2 T(1) = 1

=2[2T($\frac{n}{4}$) +$(\frac{n}{2})^2$] + n^2

=4T($\frac{n}{4}$) + $\frac{1}{2}n^2$+n^2

=4[2T($\frac{n}{8}$)+$(\frac{n}{4})^2$]+ n^2+n^2

=8T($\frac{n}{8}$) + $\frac{1}{4}n^2$+$\frac{1}{2}n^2$+n^2

=8[2T($\frac{n}{16}$)+$(\frac{n}{8})^2$] +$\frac{n^2}{2}$+n^2+n^2

=16T($\frac{n}{16}$) +$\frac{1}{8}n^2$+$\frac{1}{4}n^2$+$\frac{1}{2}n^2$+n^2

=2^iT($\frac{n}{2^i}$)+$\sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{2^k}$

Trong đó: $\sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{2^k}$ = $\sum_{k=0}^{i-1}(\frac{1}{2})^k$ =$\frac{1-(\frac{1}{2})^{i+2}}{1-\frac{1}{2}}$ =2$(1-(\frac{1}{2})^i)$

Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{2^i}$=1

<=>i = $\log_2 n$

T(n) = 2^iT($\frac{n}{2^i}$)+$\sum_{k=0}^{i-1} 2^{-k}$

= n+2$(1-(\frac{1}{2})^{\log_2 n})$

=n+2-2$\frac{1}{n}$

Câu 7:

T(n) = 2T($\frac{n}{2}$) + $\log_2 n$ T(1) = 1

= 2[2T($\frac{n}{4}$) + $\log_2\frac{n}{2}$] + $\log_2 n$

=4T($\frac{n}{4}$) + 2$\log_2 n$ - 2 + $\log_2 n$

=4[2T($\frac{n}{8}$) + $\log_2\frac{n}{4}$] + 2$\log_2 n$ + $\log_2 n$ -2

$=8T(\frac{n}{8}) + 4\log_2 n + 2\log_2 n + \log_2 n - 4*2 - 2*1 - 1*0$

$=2^i T(\frac{n}{2^i}) + (\sum_{k=0}^{i-1} 2^k)(\log_2 n) - \sum_{p=0}^{i-1} p2^p$

Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{2^i}=1$

$\Leftrightarrow i = \log_2 n$

$T(n) = n+(2^i - 1)(\log_2 n) - [(n-2)2^i+2]$

$=n+(n-1)(\log_2 n)-(n^2 - 2n + 2)$

Bài tập 3:

Câu 1:

$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n^2$ $\qquad T(1) = 1$

$=3[3T(\frac{n}{4}) +(\frac{n}{2})^2] + n^2$

$=9T(\frac{n}{4}) + 3(\frac{n}{2})^2+n^2$

$=9[3T(\frac{n}{8}) +(\frac{n}{4})^2]+ 3(\frac{n}{2})^2+n^2$

$=27T(\frac{n}{8}) + \frac{9n^2}{16} + \frac{3n^2}{4} +n^2$

$\Rightarrow T(n) = 3^i T(\frac{n}{2^i})+n^2 \sum_{k=0}^{i-1} (\frac{3}{4})^k$

Trong đó: $\sum_{k=0}^{i-1} (\frac{3}{4})^k=\frac{1-(\frac{3}{4})^{i+2}}{1-\frac{3}{4}}=4(1 - (\frac{3}{4})^i)$

Quá trình dừng lại khi:

$\frac{n}{2^i}=1$

$\Leftrightarrow 2^i= n$

$\Leftrightarrow i = \log_2 n$

$T(n) = 3^{\log_2 n}+4n^2(1 - (\frac{3}{4})^{\log_2 n})$

Câu 2:

$T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3$ $\qquad T(1) = 1$

$= 8[8T(\frac{n}{4}) + (\frac{n}{2})^3]+n^3$

$= 8^2 T(\frac{n}{4}) + n^3 + n^3$

$= 8^2 [8T(\frac{n}{8})+(\frac{n}{4})^3]+n^3+ n^3$

$= 8^3T(\frac{n}{8}) + n^3 + n^3 + n^3$

$= 8^i T(\frac{n}{2^i}) + in^3$

Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{2^i} = 1$

$\Leftrightarrow 2^i = n$

$\Leftrightarrow i = \log_2 n$

$T(n) = n^3+n^3 \log_2 n = n^3(1+\log_2 n)$

Câu 3:

$T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + n$ $\qquad T(1) = 1$

$= 4[4T(\frac{n}{9}) + \frac{n}{3}] + n$

$= 4^2T(\frac{n}{9}) + \frac{4n}{3} + n$

$= 4^2[4T(\frac{n}{27})+\frac{n}{9}] + \frac{4n}{3} + n$

$= 4^3T(\frac{n}{27}) + \frac{16n}{9} + \frac{4n}{3} + n$

$= 4^i T(\frac{n}{3^i}) + n\sum_{k=0}^{i-1} (\frac{4}{3})^k$

Trong đó: $\sum_{k=0}^{i-1} (\frac{4}{3})^k = \frac{1-(\frac{4}{3})^i}{1-\frac{4}{3}} = -3(1 - (\frac{4}{3})^i)$

Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{3^i} = 1$

$\Leftrightarrow 3^i = n$

<=> i = $\log_3 n$

T(n) = $4^{\log_3 n}$ -3n$(1-(\frac{4}{3})^{\log_3 n})$

Câu 4:

T(n) = 9T($\frac{n}{3}$) + n^2 T(1) = 1

= 9[9T($\frac{n}{9}$)+($\frac{n}{3}$)^2] + n^2

= 9^2T($\frac{n}{9}$)+ n^2+n^2

= 9^2[9T($\frac{n}{27}$) + ($\frac{n}{9}$)^2] +n^2+n^2

= 9^3T($\frac{n}{27}$) +n^2+n^2+n^2

= 9^iT($\frac{n}{3^i}$)+in^2

Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{3^i}$ = 1

<=> 3^i = n

<=> i = $\log_3 n$

T(n) = n^2+($\log_3 n$)n^2 = n^2(1+$\log_3 n$)

Câu 5:

T(n) = 2T($\sqrt{n}$) + 1 T(2) = 0

=2T($n^{1/2}$)+1

=2[2T($n^{1/4}$)+1]+1

=4T($n^{1/4}$) + 2 +1

=4[2T($n^{1/8}$)+1]+2+1

=8T($n^{1/8}$)+4+2+1

=2^iT($n^{1/(2^i)}$)+$\sum_{k=0}^{i-1} 2^k$

Quá trình dừng lại khi: $n^{1/(2^i)}$= 2

<=>$n^{(\frac{1}{2})^i}$=2

<=> $\log_2 n^{(\frac{1}{2})^i}$=1

<=> $(\frac{1}{2})^i \log_2 n$ = 1

<=> $\log_2 n$ = 2^i

<=> $\log_2 \log_2 n$ = i

T(n) = 2^iT($n^{1/(2^i)}$)+$\sum_{k=0}^{i-1} 2^k$ = 2^i -1 = $2^{\log_2 \log_2 n}$ - 1

Bài tập 4:

Câu 1:

T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2)

T(0) = 1

T(1) = 2

Đặt X^n = T(n)

Ta có: X^n-4X^{n-1}+3X^{n-2}=0

<=>X^2-4X+3=0

<=> $\left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 3 \end{array}\right.$

T(n) = $C_1 1^n + C_2 3^n$

Ta có: $\begin{cases} T(0) = 1 \\ T(1) = 2 \end{cases}$

<=> $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 3C_2 = 2 \end{cases}$

<=> $\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

T(n) = $\frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}$

Câu 2:

T(n) = 4T(n-1) - 5T(n-2) +2T(n-3)
T(0) = 0
T(1) = 1
T(2) = 2

Đặt X^n = T(n)
Ta có: X^n=4X^{n-1}-5X^{n-2}+2X^{n-3}
<=>X^n-4X^{n-1}+5X^{n-2} -2X^{n-3}=0

<=>X^3-4X^2+5X^1-2=0
<=>$(X-1)^2$(X-2)
<=>$\left[\begin{array}{c} X = 1 (nghiệm\ kép) \\ X = 2 \end{array}\right.$
T(n) = $C_1 2^n + C_2 1^n$ +$C_3 n 1^n$=$C_1 2^n$+C_2+nC_3
Ta có: $\begin{cases} T(0) = 0 \\ T(1) = 1 \\ T(2) = 2 \end{cases}$
<=>$\begin{cases} T(0) = 0 \\ T(1) = 1 \\ T(2) = 2 \end{cases}$
Có $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ 4C_1 + C_2 + 2C_3 = 2 \end{cases}$
<=>$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 1 \end{cases}$

T(n) = n

Câu 3: (Recurrence relation of fibonaci sequence)
T(n) = T(n-1) + T(n-2)
T(0)=1
T(1)=1
Đặt X^n = T(n)
Ta có: X^n=X^{n-1}+X^{n-2}
<=>$X^n - X^{n-1} - X^{n-2}$ = 0
<=>$X^2 - X^1 - 1$ = 0
<=>$\left[\begin{array}{c} X = \frac{1+\sqrt{5}}{2} (golden\ ratio) \\ X = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$
T(n) = $C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$+$C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$
Ta có: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \quad (\mathbf{1}) \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}C_2 = 1 \quad (\mathbf{2}) \end{cases}$
Từ (1)=> C_1 = 1-C_2 (3)
Thế (3) vào (2): $\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}(1 - C_1) = 1$
<=>C_1=1-$\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ =>C_2 = $\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$
T(n) = (1-$\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

Bài tập 5:
Câu a:
T(n) = $\begin{cases} 1 \quad khi\ n = 0 \\ 2T(n-1) + 7 \quad khi\ n > 0 \end{cases}$

Hàm sinh của dãy $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng như sau:

f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} T(n)\, x^n$ = T(0)+T(1)x+T(2)x^2+...

f(x) = $\sum_{n=1}^{\infty} [2T(n-1)+7]\, x^n$ +T(0)

= 2$\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^n$+7$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$+1

Đặt A = $\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^n$ = x$\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^{n-1}$ =x(T(0)+T(1)x+..) =xf(x)

Đặt B = $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$=$\frac{1}{1-x}$-1= $\frac{x}{1-x}$

Thay A và B lại vào biểu thức có: f(x) = 2xf(x) + 7$\frac{x}{1-x}$ +1

<=>(1-2x)f(x) = $\frac{6x+1}{1-x}$

<=>f(x) = $\frac{6x+1}{(1-x)(1-2x)}$ = $\frac{a}{(1-x)}$ + $\frac{b}{1-2x}$

Ta có:(1-2x)a+(1-x)b = 6x+1

có hệ: $\begin{cases} -2a-b=6 \\ a+b=1 \end{cases}$

<=>$\begin{cases} a=-7 \\ b=8 \end{cases}$

Vậy f(x) = $\frac{-7}{(1-x)}$ + $\frac{8}{1-2x}$

=-7$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$+8$\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

=$\sum_{n=0}^{\infty} (8.2^n-7)\, x^n$

T(n) = 8.2^n-7

Câu b:

$$\begin{cases} T(n) = 7T(n-1) - 12T(n-2) \quad nếu\ n >= 2 \\ T(0) = 1 \\ T(1) = 2 \end{cases}$$

Hàm sinh của dãy $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng như sau:

f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} T(n)\, x^n$ = T(0)+T(1)x+T(2)x^2+...

f(x) = $\sum_{n=2}^{\infty} T(n)\, x^n$ + T(0)+T(1)x=$\sum_{n=2}^{\infty} [7T(n-1)-12T(n-2)]\, x^n$+1+2x

= $7\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)\, x^n-12\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)\, x^n$+1+2x

Đặt A = $\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)\, x^n$ = x$\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^{n-1}$ =x(T(1)x+..) =x(f(x)-T(0))=x(f(x)-1)

Đặt B = $\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)\, x^n$ = $x^2\sum_{n=1}^{\infty} T(n-2)\, x^{n-2}$ =x(T(0)+T(1)x+..) =x(f(x)-T(0))=x^2f(x)

Thay A và B lại vào biểu thức có: f(x)=7x(f(x)-1) - 12x^2f(x) + 1 + 2x

<=.>f(x) = $\frac{-5x+1}{(1-3x)(1-4x)}$

<=> f(x) = $\frac{-(1-3x)+2(1-4x)}{(1-3x)(1-4x)}$ = $\frac{-1}{(1-4x)}$ +$\frac{2}{(1-3x)}$ = -$\sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n$+2$\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$

=> T(n) = 2.3^n-4^n

Câu c:

$$\begin{cases} T(n+1) = T(n) + 2(n+2) \quad nếu\ n >= 1 \\ T(0) = 3 \end{cases}$$

Đổi biến: T(m) = T(m-1)+2(m+1)<=>T(n)=T(n-1)+2(n+1)

Hàm sinh của dãy $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng như sau:

f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} T(n)\, x^n$ = T(0)+T(1)x+T(2)x^2+...

Ta có: f(x) = $\sum_{n=1}^{\infty} [T(n-1)+2(n+1)\,]\, x^n$+T(0)

= $\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^n$+2$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, x^n$+3

= x$\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^{n-1}$+2($\frac{1}{(1-x)^2} - 1) + 3$

= xf(x)+$\frac{2}{(1-x)^2}$+1

<=>f(x) = $\frac{2}{(1-x)^3}$+$\frac{1}{1-x}$ **(1)**

Từ công thức y=$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ta đạo hàm 2 vế:

($\sum_{n=0}^{\infty} x^n) \frac{\partial y}{\partial x}$=($\frac{1}{1-x}) \frac{\partial y}{\partial x}$

<=>$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$=$\frac{1}{(1-x)^2}$

<=>$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$=$\frac{1}{(1-x)^2}$

có ($\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n) \frac{\partial y}{\partial x}$=($\frac{1}{(1-x)^2})\frac{\partial y}{\partial x}$

<=>$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)nx^{n-1}$=$\frac{2(1-x)}{(1-x)^4}$

<=>$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}$ **(2)**

Thế (2) vào (1) ta có f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

=> Ta có T(n) = $n^2 + 3n + 3$

Bài tập 6:

$$\begin{cases} T(1) = C_1 \\ T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n \quad \text{nếu } n \geq 2 \end{cases}$$

Lần i

f(n)=an^3

với n=1 thì T(1) = C_1 f(1) = a

Chứng minh T(1) ≤ f(1)

ta có C_1 ≤ a (*)

Ta cần chứng minh T(n) ≤ f(n)

Ta có T(n) = $4T(\frac{n}{2}) + n \leq 4f(\frac{n}{2}) + n$

<=> T(n)≤ 4(a($\frac{n}{2})^3$)+n

<=> T(n)≤ a$\frac{n^3}{2}$+n

<=> T(n)≤ an^3-a$\frac{n^3}{2}$+n (**)

Từ (*) và (**) chứng minh:$\begin{cases} C_1 \leq \text{a} \\ -\text{a}\frac{n^3}{2} + \text{n} \leq 0 \end{cases}$

Lần thứ iii f(n)=an^2-bn

Với n=1 thì T(1) = C_1 và f(1)=a-b

Chứng minh T(1) ≤ f(1)

ta có C_1 ≤ a-b **(1)**

Ta cần chứng minh T(n) ≤ f(n)

Ta có T(n) = $4T(\frac{n}{2}) + n \leq 4f(\frac{n}{2}) + n$

<=> T(n) ≤ 4(a($\frac{n}{2})^2$-b$\frac{n}{2}$)+n

<=> T(n) ≤4a$\frac{n^2}{4}$-4b$\frac{n}{2}$+n

<=> T(n) ≤an^2-bn+(-bn+n)

Để T(n)≤ f(n) thì:

-bn+n≤ 0

<=>n(1-b)≤ 0 **(2)**

Từ (1) và (2) ta chọn a và b sao cho:$\begin{cases} C_1 \leq \text{a} - \text{b} \\ \text{n}(1 - \text{b}) \leq 0 \end{cases}$

Bài tập 7:

$$\begin{cases} T(1) = 1 \text{ với } n \leq 5 \\ T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + n \end{cases}$$

Đoán f(n)=O(n) = an+b

Với n=1 thì T(n=1)=1 và f(1)=a+b

chứng minh: T(1) ≤ f(1)

1 ≤ a+b thì T(1) ≤ f(1) (1)

Ta cần chứng minh T(n) ≤ f(n)

Ta có T(n) = $T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + n \leq f(\frac{n}{2}) + f(\frac{n}{4}) + n$

<=> T(n) ≤ $a\frac{n}{2}$+b+$a\frac{n}{4}$+b+n

<=>T(n) ≤ (an+b)+($-\frac{1}{4}$an+b+n)

<=>T(n) ≤ f(n) + ($-\frac{1}{4}$an+b+n)≤ f(n)

Để T(n)≤ f(n) thì:

$-\frac{1}{4}$an+b+n ≤ 0 (2)

Từ (1) và (2) ta chọn a và b sao cho: $\begin{cases} 1 \leq a + b \\ -\frac{1}{4}an + b + n \leq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} b = -a + 1 \\ a = \frac{8}{3} \end{cases}$$

thế vào (2) ta có: $-\frac{1}{4}.\frac{8}{3}$.n+($-\frac{8}{3}$ +1)+n≤ 0

<=>$\frac{1}{3}$n+≤ $\frac{5}{3}$

<=>n≤5 (thỏa yêu cầu)

T(n) = O(n)