

Môn thi: Phân tích và thiết kế thuật toán
Mã môn/lớp: CS112
Thời gian làm bài: 90 phút
(Sinh viên được sử dụng tài liệu)

ĐỀ 1

Câu 1 (2 điểm): Ký hiệu tiệm cận

- a) Chứng minh: $\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$ với α là hằng số thực dương, Θ là Big-Theta.
- b) Với mỗi nhóm hàm bên dưới, hãy sắp xếp các hàm số theo thứ tự tăng dần của “order of growth”. Ký hiệu: \log là log cơ số 2, $\binom{n}{k}$ là tổ hợp chập k của n

Group 1: $f_1(n) = n^4 \binom{n}{2}$ $f_2(n) = \sqrt{n}(\log n)^4$ $f_3(n) = n^{5 \log n}$ $f_4(n) = 4 \log n + \log \log n$ $f_5(n) = \sum_{i=1}^n i$	Group 2: $f_6(n) = n^{\sqrt{n}}$ $f_7(n) = n^{\log n}$ $f_8(n) = 2^{n/2}$ $f_9(n) = 3^{\sqrt{n}}$ $f_{10}(n) = 4^{n^{1/4}}$
--	---

Câu 2 (3 điểm): Phân tích thuật toán

- a) Đếm số phép gán, số phép so sánh được thực hiện trong đoạn chương trình sau, suy ra độ phức tạp thuật toán.

```
sum = 0; i=1; idx=-1;
while (i<=n)
{
    j=1;
    while(j<=n)
    {
        if( (i==j) && (i+j==n+1) )
            idx=i;
        sum=sum+a[i][j];
        j++;
    }
    i++;
}
if(idx !=-1)
    sum=sum-a[idx][idx];
```

- b) Xét “Bài toán nhân 2 số nguyên dương lớn có n chữ số”, với n có thể lên đến hàng chục hay hàng trăm chữ số, áp dụng kỹ thuật Chia để trị ta có một cách giải như sau:

Chia 2 số nguyên X, Y (có n chữ số) thành các số nguyên lớn có $n/2$ chữ số: $X = A \cdot 10^{n/2} + B$ và $Y = C \cdot 10^{n/2} + D$. Ví dụ: $X = 1288$ thì $X = 12 \cdot 10^{n/2} + 88$

Khi đó, $X \cdot Y = AC \cdot 10^n + [(A-B)(D-C) + AC + BD] \cdot 10^{n/2} + BD$ (*)

Với mỗi số có $n/2$ chữ số, chúng ta lại tiếp tục phân tích theo cách trên, quá trình phân tích sẽ dẫn đến bài toán cơ sở là nhân các số nguyên chỉ gồm một chữ số mà ta dễ dàng thực hiện. Việc tổng hợp kết quả chính là thực hiện các phép toán theo công thức (*).

Hãy đánh giá độ phức tạp của giải thuật đệ quy áp dụng kỹ thuật Chia để trị như trên, bằng cách thực hiện các yêu cầu sau: 1) Thành lập phương trình đệ quy (kèm giải thích ngắn gọn cách thành lập); 2) Giải phương trình dùng **phương pháp truy hồi (còn gọi là thay thế)** hoặc **phương pháp đoán nghiệm**. SV không cần trình bày (mã giả) thuật toán.

Câu 3 (2.5 điểm): Thiết kế thuật toán

Bài toán “Tìm các dãy con **tăng** có tổng cho trước” được mô tả như sau: Cho một dãy số nguyên dương $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ và một số nguyên dương M . Tìm tất cả các dãy con tăng của dãy a (có ràng buộc bảo toàn tính thứ tự trước sau giữa các phần tử trong dãy) sao cho tổng của các phần tử trong dãy con bằng M . Ví dụ, cho dãy $(7, 1, 4, 3, 5, 6)$ và $M = 11$, các dãy con thỏa mãn ràng buộc là: $(1, 4, 6)$; $(5, 6)$. Hãy thiết kế một thuật toán để giải bài toán trên. Thuật toán phải được trình bày dưới dạng mã giả, có chú thích và minh họa qua ví dụ cho người đọc dễ hiểu.

Câu 4 (2.5 điểm): Sinh viên chọn làm 1 trong 2 câu sau: 4a hoặc 4b

a) Cho bài toán “Tìm chuỗi con chung dài nhất (Longest common subsequence)” được mô tả như sau: Cho 2 chuỗi $X = \langle x_1 x_2 \dots x_m \rangle$ và $Y = \langle y_1 y_2 \dots y_n \rangle$. Tìm chuỗi con chung dài nhất (LCS) của X và Y . Chuỗi con của một chuỗi nhận được từ chuỗi ấy bằng cách xóa đi một số phần tử. Trình bày ý tưởng giải bài toán trên bằng phương pháp “**Quy hoạch động**” và áp dụng để giải trường hợp cụ thể sau: Tìm chuỗi con chung dài nhất của 2 chuỗi $X = \langle a d c d b a \rangle$ và $Y = \langle b d c a b b a \rangle$.

b) Cho bài toán “Nhân chuỗi ma trận (Matrix Chain Multiplication)” được mô tả như sau: Cho 1 chuỗi ma trận $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$, với A_i có kích thước là $p_{i-1} \times p_i$. Ta muốn tính tích $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Hãy xác định thứ tự nhân các ma trận sao cho số phép nhân (giữa hai số) được sử dụng là ít nhất. Trình bày ý tưởng giải bài toán trên bằng phương pháp “**Quy hoạch động**” và áp dụng để giải trường hợp cụ thể sau: Nhân 4 ma trận ABCD với các ma trận có kích thước lần lượt là $A: 4 \times 5$, $B: 5 \times 3$, C là 3×5 , $D: 5 \times 4$.

Trình bày ý tưởng gồm các bước: 1) Phân tích đặc trưng “Optimal substructure”; 2) Xác định phương trình quy hoạch động; 3) Tạo bảng lưu trữ kết quả của các bài toán con khi giải lần đầu; 4) Xác định lời giải của bài toán ban đầu.

HẾT