TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH
BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

<u>HOMEWORK #3</u>: ĐỘ PHỨC TẠP VÀ CÁC KÍ HIỆU TIỆM CẬN

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Hương
Người thực hiện: Nguyễn Đỗ Quang 20520720

TP.HCM, ngày 19, tháng 10, năm 2022

<u>Bài tập 1:</u>

a) Ý nghĩa của độ phức tạp là: độ phức tạp là là một thuật ngữ được sử dụng để dễ dàng đánh giá mức độ hiệu quả của thuật toán (chủ yếu về mặt thời gian hay rõ ràng hơn là số phép toán cơ bản để thực hiện thuật toán)
b) Em đồng ý với ý kiến trên vì trong thực tế dữ liệu rất lớn, và vì thế người ta chỉ quan tâm tốc độ tăng của hàm số (hay bậc tăng trưởng (order of growth)) (VD: n,n^2,n^3,nlogn,....)
c) Có 3 kí hiệu tiệm cận chính:
+ O (tiệm cận trên hay upper bound): là tập hợp các hàm chặn trên của hàm thời gian thực hiện thuật toán
+ Ω (tiệm cận dưới hay lower bound): là tập hợp các hàm chặn dưới của hàm thời gian thực hiện thuật toán
+ θ: là tập hợp các hàm kẹp giữa hàm thời gian thực hiện thuật toán

<u>Bài tập 2:</u>

	1 second	**1 minute**	**1 hour**	**1 day**	**1 month**	**1 year**	**1 century**
$\lg n$	2^{10^6}	$2^{6\cdot10^7}$	$2^{36\cdot10^8}$	$2^{864\cdot10^8}$	$2^{25920\cdot10^8}$	$2^{315360\cdot10^8}$	$2^{31556736\cdot10^8}$
$\sqrt{n}$	10^{12}	$36\cdot10^{14}$	$1296\cdot10^{16}$	$746496\cdot10^{16}$	$6718464\cdot10^{18}$	$994519296\cdot10^{18}$	$995827586973696\cdot10^{16}$
n	10^6	$6\cdot10^7$	$36\cdot10^8$	$864\cdot10^8$	$2592\cdot10^9$	$31536\cdot10^9$	$31556736\cdot10^8$
$n\lg n$	62746	2801417	133378058	2755147513	71870856404	797633893349	68654697441062
n^2	1000	7745	60000	293938	1609968	5615692	56175382
n^3	100	391	1532	4420	13736	31593	146677
2^n	19	25	31	36	41	44	51
$n!$	9	11	12	13	15	16	17

Cách tính:
Ta có mỗi f(n) sẽ thực hiện được tính đơn vị ms=>f(n) = t(ms)
1 second = 10^6 microseconds
Theo công thức ta có N chạy trong 1 giây:
+logn = 10^6 =>n= 2^{10^6}
+$\sqrt{n}$ = 10^6 =>n = 10^{12}
+n = 10^6 =>n = 10^6
+nlogn= 10^6 =>n = 62746
+n^2 = 10^6 =>n = 10^3
+n^3= 10^6 =>n = 10^2
+2^n = 10^6 =>n = 6.log(10) = 19
+n!= 10^6 =>n = 9

Bài tập 3:

a. Suy luận trên là sai

Vì $\frac{1}{2}n^2$ là hàm thuộc tập hợp các hàm có tiệm cận trên là O(n^2)

và n^2 là hàm thuộc tập hợp các hàm có tiệm cận trên là O(n^2)

nhưng không có nghĩa là hàm $\frac{1}{2}n^2 = n^2 + 1$

b. Xét f(n) = $7n^2$

g(n)= $n^2 - 80n$

h(n)= n^3

Chứng minh f(n) = O(g(n))

hay $\boldsymbol{7n^2 = O(n^2 - 80n)}$

$\exists c \in R^+$, $n_0 \in N$

sao cho $7n^2 \le c(n^2 - 80n)$ $\quad \forall n \ge n_0$

Giả sử chọn c=8

Ta có $n^2 - 640n \ge 0$

n	0	640
$n^2 - 640n$	+ 0 -	0 +

Vậy chọn c=8, n_0 = 640

=> $7n^2 \le c(n^2 - 80n)$ $\quad \forall n \ge 640$

=> $\boldsymbol{7n^2 = O(n^2 - 80n)}$

Chứng minh $\boldsymbol{n^2 - 80n = O(7n^2)}$

$\exists c \in R^+$, $n_0 \in N$

hay $n^2 - 80n \le c(7n^2)$ $\quad \forall n \ge n_0$

$\forall n \ge 1$ ta có: $n^2 - 80n \le n^2 \le 7n^2$

Vậy chọn c=1, n_0=1

$n^2 - 80n \le 7n^2$ $\quad \forall n \ge 1$

=> $\boldsymbol{n^2 - 80n = O(7n^2)}$

Chứng minh $\boldsymbol{n^2 - 80n = O(n^3)}$

$\exists c \in R^+$, $n_0 \in N$

hay $n^2 - 80n \le c(n^3)$ $\quad \forall n \ge n_0$

$\forall n \ge 1$ ta có: $n^2 - 80n \le n^2 \le n^3$

Vậy chọn c=1, n_0=1

$n^2 - 80n \le n^3$ $\quad \forall n \ge 1$

=> $\boldsymbol{n^2 - 80n = O(n^3)}$

Chứng minh $\boldsymbol{n^3 \ne O(7n^2)}$

Giả sử: $n^3 \in O(7n^2)$

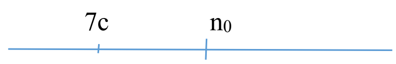
$\exists c \in R^+$, $n_0 \in N$

Ta có: $n^3 \le c(7n^2)$ $\quad \forall n \ge n_0$

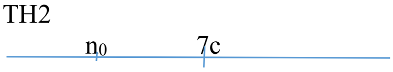
<=> $n \le 7c$ $\quad \forall n \ge n_0$(Mâu thuẫn vô lý)

Có trục số:

TH1



TH2



=> Giả sử ban đầu sai

=> $\boldsymbol{n^3 \ne O(7n^2)}$

c. Chứng minh $n^4 + n + 1 \notin O(n^2)$

Giả sử $n^4 + n + 1 \in O(n^2)$

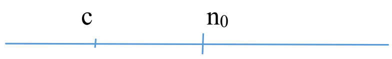
$\exists c \in R^+$, $n_0 \in N$

Ta có: $n^4 + n + 1 \leq c(n^2)$ $\forall n \geq n_0$

<=> $n^2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq c$ $\forall n \geq n_0$(Mâu thuẫn vô lý)

Có trục số:

TH1



TH2

Vậy $n^4 + n + 1 \notin O(n^2)$

Chứng minh $O(n^2) \notin O(n)$

giả sử $O(n^2)$là tập con $O(n)$

Xét một hàm bất kì f(x) trong $O(n^2)$ $\forall n \geq n_0$

$\exists c \in R^+$, $n_0 \in N$

Ta có: $f(n) \leq cn^2$ $\forall n \geq n_0$

<=> $f(n) \leq cn.n$ $\forall n \geq n_0$

với$\forall c \in R^+$, $n_0 \in N$ thì cn luôn là một số phụ thuộc vào n

=> $O(n^2)$ không là tập con của $O(n)$ (1)

giả sử O(n)là tập con $O(n^2)$

Xét một hàm bất kì g(x) trong O(n) $\forall n \geq n_0$

$\exists d \in R^+$, $n_0 \in N$

Ta có: $f(n) \leq dn$ $\forall n \geq n_0$

<=>$f(n) \leq \frac{d}{n} n^2$ $\forall n \geq n_0$

với$\forall d \in R^+$, $n_0 \in N$ thì $\frac{d}{n}$ luôn là một số phụ thuộc vào n

=> O(n) không là tập con của $O(n^2)$ (2)

Từ (1) và (2) => $O(n^2) \notin O(n)$

Chứng minh $n \notin O(\log_2 n)$

Giả sử $n \in O(\log_2 n)$

$\exists c \in R^+$, $n_0 \geq 2$ sao cho:

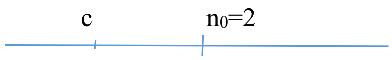
$n \leq c\log_2 n$ $\forall n \geq n_0$

<=> $\frac{n}{\log_2 n} \leq c$ $\forall n \geq 2$ (

($\frac{n}{\log_2 n} \geq 2$)

Có trục số:

TH1



TH2

=> $\frac{n}{\log_2 n} \leq c$ $\forall n \geq 2$ (Vô lý)

Vậy $n \notin O(\log_2 n)$

<u>Bài tập 4:</u> (có c là số rất nhỏ)

Group 1:

$f_1(n) = \binom{n}{100} = \frac{n!}{(n-100)!100!} = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-99)}{100!} = \frac{O(n^{100})}{100!}$

$f_2(n) = n^{100} = O(n^{100})$

$f_3(n) = 1/n = O(n^{-1})$

$f_4(n)=10^{1000}n = 10000.O(n)$

$f_5(n)=nlogn = n*O(n^c) = O(n^{(1+c)})$

Vậy: $f_3(n)<f_4(n)<f_5(n)<f_1(n)<f_2(n)$

Group 2:

$f_1(n) = 2^{2^{1000000}} = O(C) = O(1)$

$f_2(n) = 2^{100000n} = O(2^{100000n})$

$f_3(n) =\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2} =O(n^2)$

$f_4(n)= n\sqrt{n} = n^{\frac{3}{2}}= O(n^{3/2})$

Vậy: $f_1(n)<f_4(n)<f_3(n)<f_2(n)$

Group 3:

$f_1(n) = n^{\sqrt{n}} = 2^{\log_2 n^{\sqrt{n}}} = 2^{\sqrt{n}O(n^c)} = 2^{O(n^{(\frac{1}{2}+c)})}$

$f_2(n) = 2^n$

$f_3(n) = n^{10}2^{n/2} =2^{\log_2 n^{10}}.2^{n/2}=2^{10(\log_2 n)+\frac{n}{2}}=2^{O(10n^c+\frac{n}{2})}$

$f_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(i+1)= \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n^2+3n}{2} =2^{\log_2 \frac{n^2+3n}{2}}=2^{\log_2 O(n^2)}=2^{O(2n^c)}$

Vậy: $f_4(n)<f_1(n)<f_3(n)<f_2(n)$

Group 4:

$f_1(n) = n^4\binom{n}{2} =n^4.\frac{n(n-1)}{2} =O(n^6)$

$f_2(n) = \sqrt{n}\ (logn)^4 = n^{\frac{1}{2}} +n^{(4c)} =O(n^{4c+\frac{1}{2}})$

$f_3(n) = n^{5logn} = n^{5n^c}= O(n^{5n^c})$

$f_4(n) = 4logn + loglogn = 4n^c + logn^c = 4n^c+cn^c =O(n^c)$

$f_5(n) = \sum_{i=1}^{n} i= \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$

Vậy: $f_4(n)<f_2(n)<f_5(n)<f_1(n)<f_3(n)$

Group 5:

$f_6(n) = n^{\sqrt{n}} = 2^{logn^{\sqrt{n}}} =2^{O(n^{(\frac{1}{2}+c)})}$

$f_7(n) = n^{logn} = 2^{logn^{logn}} = 2^{O(n^{2c})}$

$f_8(n) = 2^{n/2}$

$f_9(n) = 3^{\sqrt{n}} = 3^{\sqrt{n}}=2^{\sqrt{n}.\log_2 3}=2^{1.58.n^{\frac{1}{2}}}$

$f_{10}(n) = 4^{n^{1/4}}=2^{2n^{1/4}}$

Vậy: $f_{10}(n)<f_9(n)<f_7(n)<f_6(n)<f_8(n)$

Bài tập 5:

O(c) = O(1) với C là hằng số
+Chứng minh O(1) là tập con của O(c)
Xét một hàm bất kì f(n) ∈ O(1)
suy ra $\exists b \in R^+$, $n_0 \in N$ sao cho
$f(n) \le b.1 \quad \forall n \ge n_0$
<=> $f(n) \le \frac{b}{c}.c$
$\exists(a = \frac{b}{c}) \in R^+$ $n_0 \in N$ sao cho
$f(n) \le a.c \quad \forall n \ge n_0$
Vậy f(n) ∈ O(c)
=> O(1) là tập con của O(c)   (1)
+Chứng minh O(c) là tập con của O(1)
Xét một hàm bất kì g(n) ∈ O(c)
suy ra $\exists d \in R^+$, $n_0 \in N$ sao cho
$f(n) \le d.c.1 \quad \forall n \ge n_0$
$\exists(e = d.c) \in R^+$ $n_0 \in N$ sao cho
$g(n) \le e.1 \quad \forall n \ge n_0$
Vậy g(n) ∈ O(1)   (1)
=> O(c) là tập con của O(1)   (2)
Vậy từ (1) và (2) => O(c) = O(1)

Chứng minh O(Cf(n)) = O(f(n)) với C là hằng số
+Chứng minh O(cf(n)) là tập con của O(f(n))
Xét một hàm bất kì g(n) ∈ O(c(f(n)))
suy ra $\exists b \in R^+$, $n_0 \in N$ sao cho
$g(n) \le b.c.f(n) \quad \forall n \ge n_0$
$\exists(d = b.c) \in R^+$ $n_0 \in N$ sao cho
$g(n) \le d.f(n) \quad \forall n \ge n_0$
=> O(cf(n)) là tập con của O(f(n))   (1)
+Chứng minh O(f(n)) là tập con của O(cf(n))
Xét một hàm bất kì k(n) ∈ O((f(n)))
suy ra $\exists e \in R^+$, $n_0 \in N$ sao cho
$k(n) \le e.f(n) \quad \forall n \ge n_0$
<=>$k(n) \le \frac{e}{c}.(cf(n)) \quad \forall n \ge n_0$
$\exists(m = \frac{e}{c}) \in R^+$ $n_0 \in N$ sao cho
$g(n) \le m.(cf(n)) \quad \forall n \ge n_0$
=> O(f(n)) là tập con của O(cf(n))   (2)

Vậy từ (1) và (2) =>O(Cf(n)) = O(f(n))

Chứng minh nếu f(n)∈O(g(n)) và g(n) ∈ O(h(n)) thì f(n)∈O(h(n))
nếu f(n)∈**O(g(n)) thì**
$f(n) \le c_1.g(n) \quad \forall n \ge n_1$ (với $c_1 \in R^+$)   (1)
nếu g(n) ∈ O(h(n)) thì
$g(n) \le c_2.h(n) \quad \forall n \ge n_2$ (với $c_2 \in R^+$)   (2)
từ (1) và (2)
=>$f(n) \le c_1.c_2.h(n) \quad \forall n \ge max(n_1, n_2)$
suy ra $\exists(a = c_1.c_2) \in R^+$, ($n_0$=max($n_1$,$n_2$)) ∈ N sao cho
=>$f(n) \le a.h(n) \quad \forall n \ge max(n_1, n_2)$

Vậy f(n)∈O(g(n)) và g(n) ∈ O(h(n)) thì f(n)∈O(h(n))

Chứng minh nếu $t_1(n) \in O(f(n))$ và $t_2(n) \in O(g(n))$ thì $t_1(n)+t_2(n) \in O(\max\{f(n),g(n)\})$

nếu $t_1(n) \in O(f(n))$ thì

$t_1(n) \le c_1.f(n) \quad \forall n \ge n_1$ (với $c_1 \in R^+$) (1)

nếu $t_1(n) \in O(g(n))$ thì

$t_2(n) \le c_2.g(n) \quad \forall n \ge n_2$ (với $c_2 \in R^+$) (2)

ta có: $t_1(n)+t_2(n) \le c_1.f(n)+c_2.g(n) \le c_1(\max\{f(n),g(n)\})+c_2(\max\{f(n),g(n)\}) \le (c_1+c_2)(\max\{f(n),g(n)\})$

$\forall n \ge \max(n_1, n_2)$

suy ra $\exists (a = c_1 + c_2) \in R^+$, $(n_0=\max(n_1,n_2)) \in N$ sao cho

$t_1(n)+t_2(n) \le (\max\{f(n),g(n)\})$

Vậy nếu $t_1(n) \in O(f(n))$ và $t_2(n) \in O(g(n))$ thì $t_1(n)+t_2(n) \in O(\max\{f(n),g(n)\})$

<u>Bài tập 6:</u>

Nếu $t(n) \in O(g(n))$, thì $g(n) \in \Omega(t(n))$

$\exists c \in R^+$ $n_0 \in N$ sao cho

Khi $t(n) \in O(g(n)) \Rightarrow t(n) \le c.g(x)$ với $n \ge n_0$

nếu $t(n) \in O(g(n))$ thì

$t(n) \le c.g(n) \quad \forall n \ge n$ (với $c \in R^+$)

$\Rightarrow \frac{1}{c}t(n) \le .g(n) \quad \forall n \ge n$

Luôn $\exists \frac{1}{c} \in R^+$ $n_0 \in N$ sao cho

$\frac{1}{c}t(n) \le .g(n) \quad \forall n \ge n$ (với $c \in R^+$)

Vậy nếu $t(n) \in O(g(n))$, thì $g(n) \in \Omega(t(n))$

Chứng minh $\theta(ag(n))=\theta(g(n))$, khi mà $a>0$

Xét hàm $f(n)$ bất kì thuộc $g(n)$

suy ra $\exists b_1 b_2 \in R^+$, $n_0 \in N$

sao cho $b_1 g(n) \le f(n) \le b_2 g(n) \; \forall n \ge n_0$

$\Leftrightarrow \frac{b_1}{a}(ag(n)) \le f(n) \le \frac{b_2}{a}(ag(n)) \quad \forall n \ge n_0$

Vậy luôn $\exists(\frac{b_1}{a}$ và $\frac{b_2}{a})$ để $\frac{b_1}{a}(ag(n)) \le f(n) \le \frac{b_2}{a}(ag(n)) \; \forall n \ge n_0$

$\theta(g(n))$ là tập con của $\theta(ag(n))$ (1)

Xét hàm $f(n)$ bất kì thuộc $g(n)$

suy ra $\exists c_1 c_2 \in R^+$, $n_0 \in N$

sao cho $c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n) \; \forall n \ge n_0$

Vậy luôn $\exists(c_1$ và $c_2)$ để $c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n) \quad \forall n \ge n_0$

$\theta(ag(n))$ là tập con của $\theta(g(n))$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \theta(ag(n))=\theta(g(n))$, khi mà $a>0$

Chứng minh: $\theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Xét một hàm bất kì $f(n) \in O(g(n))$

suy ra $\exists b \in R^+$, $n_0 \in N$ sao cho

$f(n) \le b.g(n) \quad \forall n \ge n_0$ (1)

Xét một hàm bất kì $f(n) \in \Omega(g(n))$

suy ra $\exists c \in R^+$, $n_0 \in N$ sao cho

$c.g(n) \le f(n) \quad \forall n \ge n_0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$c.g(n) \le f(n) \le b.g(n)$ (với $c, b \in R^+$)

Vậy $\theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Chứng minh: $\max\{f(n),g(n)\} = \theta(f(n)+g(n))$

Ta cần chứng minh $a(f(n)+g(n)) \le \max\{f(n),g(n)\} \le b(f(n)+g(n))$ ($\exists a, b \in R^+$, $n_0 \in N$)

Ta có $\max\{f(n),g(n)\} \le (f(n)+g(n)) \quad \forall n \ge n_0$ (1)

Ta cũng có: $f(n) + g(n) \le 2\max\{f(n),g(n)\}$

<=>$\frac{1}{2}$(f(n) +g(n) ≤ max{f(n),g(n)} $\forall n \geq n_0$ (2)
Từ (1) và (2): $\frac{1}{2}$(f(n) +g(n) ≤ max{f(n),g(n)}≤(f(n)+g(n)) $\forall n \geq n_0$
Vậy max{f(n),g(n)} = θ(f(n)+g(n))

Chứng minh: f(n)+g(n) = θ(max{f(n),g(n)})
Ta có max{f(n),g(n)}≤ f(n) +g(n) ≤ max{f(n),g(n)} +max{f(n),g(n) $\forall n \geq n_0$
<=> max{f(n),g(n)}≤ f(n) +g(n) ≤ 2max{f(n),g(n)} $\forall n \geq n_0$ (luôn đúng)
Vậy f(n)+g(n) = θ(max{f(n),g(n)})

<u>Bài tập 7:</u>

Khẳng định Nếu f(n) = θ(g(n)) và g(n) = θ(h(n)), thì h(n) = θ(f(n))
Nếu f(n) = θ(g(n)) ta có:
$\exists a_1, a_2 \in R^+$ $n_0 \in N$ sao cho
a_1.g(n) ≤ f(n)≤ a_2.g(n) $\forall n \geq n_1$ (1)
Nếu g(n) = θ(h(n)) ta có:
$\exists b_1, b_2 \in R^+$ $n_0 \in N$ sao cho
b_1.h(n) ≤ g(n)≤ b_2.h(n) $\forall n \geq n_2$ (2)
Từ (1) và (2) ta có:
$a_1.b_1$.h(n) ≤ f(n)≤ $a_2.b_2$.h(n) $\forall n_0$=max{n_1,n_2}
Vậy nếu f(n) = θ(g(n)) và g(n) = θ(h(n)), thì h(n) = θ(f(n))

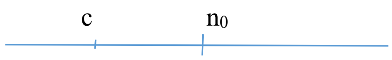
Khẳng định Nếu f(n) = O(g(n)) và g(n) = O(h(n)), thì h(n) = Ω(f(n))
Khẳng định trên đúng vì:
Nếu f(n) = O(g(n)) ta có:
$\exists a \in R^+$ $n_1 \in N$ sao cho
f(n)≤ a.g(n) $\forall n \geq n_1$ (1)
Nếu g(n) = O(h(n)) ta có:
$\exists b \in R^+$ $n_2 \in N$ sao cho
g(n)≤ b.h(n) $\forall n \geq n_2$ (2)
Từ (1) và (2) ta có:
f(n)≤ a.b.h(n) $\forall n \geq n_0$(n_0=max{n_1,n_2})
<=>$\frac{1}{a.b}$f(n)≤h(n) $\forall n \geq n_0$
Vậy Nếu f(n) = O(g(n)) và g(n) = O(h(n)), thì h(n) = Ω(f(n))

Khẳng định nếu f(n) = O(g(n)) và g(n) = O(f(n)), thì f(n)=g(n)
Khẳng định trên là sai vì:
Nếu f(n) = O(g(n)) ta có:
$\exists a \in R^+$ $n_1 \in N$ sao cho
f(n)≤ a.g(n) $\forall n \geq n_1$ (1)
Nếu g(n) = O(f(n)) ta có:
$\exists b \in R^+$ $n_2 \in N$ sao cho
g(n)≤ b.f(n) $\forall n \geq n_2$ (2)
Có f(n)≤ a.g(n) ≤ a. b. f(n)
<=>f(n)≤ a. b. f(n)
Dấu "=" chỉ xảy ra khi a=b=1
nên khẳng định **f(n) = O(g(n)) và g(n) = O(f(n)), thì f(n)=g(n) không phải lúc nào cũng đúng**

Khẳng định n/100 = Ω(n)
cn≤n/100   với $\forall n \geq 1$
chọn c=1/100 ($\exists c \in R^+$)
Chọn n_0=0
Ta có (1/100)n≤n/100   với $\forall n \geq 0$
=> ***Khẳng định trên đúng***

Khẳng định f(n) + O(f(n)) = $\boldsymbol{\theta}$(f(n))
Khẳng định trên đúng vì:
Giả xử f(n) + O(f(n)) = θ(f(n)) thì:
Xét một hàm bất kì g(n) ∈ O(f(n)) (1)
thì f(n) + g(n) = h(n) (với một số hàm h(n) ∈ O(f(n))) (2)
Từ (1) ta có ∃c ∈R^+ n_1 ∈ N sao cho:
g(n)≤ $\mathrm{c.f(n)}$ ∀n≥n_1
<=>f(n)+ g(n)≤ $\mathrm{c.f(n)+f(n)}$ ∀n≥n_1
<=>f(n)+ g(n)≤ $\mathrm{(c+1)f(n)}$ ∀n≥n_1 (3)
Từ (2) và (3) ta có:
h(n)≤ $\mathrm{(c+1)f(n)}$ ∀n≥n_1
Vậy ∃$\mathrm{a=c+1}$ ∈R^+ n_1 ∈ N sao cho:
h(n)≤ $\mathrm{(c+1)f(n)}$ ∀n≥n_1
=> h(n) ∈ O(f(n))
Vậy khẳng định trên đúng

Khẳng định 2^{10n} = O(2^n)
Khẳng định trên là sai vì:
Cách 1:
Giả sử 2^{10n} = O(2^n)
∃c ∈R^+
Ta có: $2^{10n} \le c2^n$ với ∀n≥n_0
<=> $2^{9n} \le c$ với ∀n≥n_0 (vô lý)
Có trục số:
TH1



TH2

=> ***Khẳng định trên là sai***

Cách 2:
Khẳng định trên là **sai** vì:
Giả sử 2^{10n} ∈ Ω(2^n)
thì $c(2^n) \le 2^{10n}$ với ∀n≥n_0
c ≤ 2^{9n}
<=> $\log_2 c$ ≤ 9n
<=> n ≥ $\frac{\log_2 c}{9}$
chọn n_0 = $\frac{\log_2 c}{9}$ ta có
Bất đẳng thức:
$2^n \le c(2^{10n})$ với n≥$\frac{\log_2 c}{9}$ luôn đúng
=> 2^{10n} ∈ Ω(2^n)
Vậy rõ ràng 2^{10n} ∉ O(2^n)

Khẳng định $\boldsymbol{\log_{10} n = \theta(\log_2 n)}$
Khẳng định trên là đúng vì:
Giả sử nếu $\log_{10} n = \theta(\log_2 n)$
∃$\mathrm{a,b}$ ∈R^+,n_0 ∈ N sao cho
$\mathrm{a}.\log_2 n \le \log_{10} n \le b.\log_2 n$ ∀n≥n_0

Xét $\log_{10} n \le b.\log_2 n$ ∀n≥n_0
Ta có $\frac{\log_{10} n}{\log_2 n}$ ≤ b ∀n≥n_0 ≥2

$\forall n \geq n_0$ thì $\frac{\log_{10} n}{\log_2 n} \leq 1$ (Do $\log_{10} n \leq \log_2 n$, $\forall$n)

vậy $\exists b=1$ *thì* $log_{10} n \leq b.log_2 n$ $\quad\forall n \geq n_0 \geq 2$ *(1)*

Xét $a.\log_2 n \leq \log_{10} n$ $\quad\forall n \geq n_0 \geq 2$

Ta có $a \leq \frac{\log_{10} n}{\log_2 n}$ $\quad\forall n \geq n_0 \geq 2$

Ta lại có $n \geq 2$

Vậy $\frac{\log_{10} 2}{\log_2 2} \leq \frac{\log_{10} n}{\log_2 n}$

<=>$\log_{10} 2 \leq \frac{\log_{10} n}{\log_2 n}$

vậy $\exists a=log_{10} 2$ *thì* $a.log_2 n \leq log_{10} n$ $\quad\forall n \geq n_0 \geq 2$ *(2)*

Từ (1) và (2) => $\boldsymbol{log_{10} n = \theta(log_2 n)}$

<u>Bài tập 8:</u>

Khẳng định f(n)∈ O(n) =>$\boldsymbol{2^{f(n)} \in O(2^n)}$

Khi f(n)∈ O(n)

ta có $\exists c \in R^+, n_0 \in N$ sao cho

$f(n) \leq cn$

<=>$2^{f(n)} \leq 2^{cn}$

$\exists c = 1 \in R^+, n_0 \in N$

Ta có: $2^{f(n)} \leq 1.2^n$

Vậy $2^{f(n)} \in O(2^n)$

Vậy f(n)∈ O(n) =>$\boldsymbol{2^{f(n)} \in O(2^n)}$