TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH
BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #3: ĐỘ PHỨC TẠP VÀ CÁC KÍ HIỆU TIỆM CẬN

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Hương

Người thực hiện: Nguyễn Đỗ Quang 20520720

TP.HCM, ngày 19, tháng 10, năm 2022

Bài tập 1:

a) Ý nghĩa của độ phức tạp là: độ phức tạp là là một thuật ngữ được sử dụng để dễ dàng đánh giá mức độ hiệu quả của thuật toán (chủ yếu về mặt thời gian hay rõ ràng hơn là số phép toán cơ bản để thực hiện thuật toán)

b) Em đồng ý với ý kiến trên vì trong thực tế dữ liệu rất lớn, và vì thế người ta chỉ quan tâm đến bậc tăng trưởng (order of growth)

c) Có 3 kí hiệu tiệm cận chính:

+ O (tiệm cận trên hay upper bound): là hàm chặn trên của hàm thời gian thực hiện thuật toán

+ Ω (tiệm cận dưới hay lower bound): là hàm chặn dưới của hàm thời gian thực hiện thuật toán

+ θ: là hàm kẹp của hàm thời gian thực hiện thuật toán

Bài tập 2:

https://atekihcan.github.io/CLRS/01/P01-01/

https://ita.skanev.com/01/problems/01.html

	1 second	1 minute	1 hour	1 day	1 month	1 year	1 century
$\lg n$	2^{10^6}	$2^{6\cdot 10^7}$	$2^{36\cdot 10^8}$	$2^{864\cdot 10^8}$	$2^{25920\cdot 10^8}$	$2^{315360\cdot 10^8}$	$2^{31556736\cdot 10^8}$
$\sqrt{n}$	10^{12}	$36\cdot 10^{14}$	$1296\cdot 10^{16}$	$746496\cdot 10^{16}$	$6718464\cdot 10^{18}$	$994519296\cdot 10^{18}$	$995827586973696\cdot 10^{16}$
n	10^6	$6\cdot 10^7$	$36\cdot 10^8$	$864\cdot 10^8$	$2592\cdot 10^9$	$31536\cdot 10^9$	$31556736\cdot 10^8$
$n\lg n$	62746	2801417	133378058	2755147513	71870856404	797633893349	68654697441062
n^2	1000	7745	60000	293938	1609968	5615692	56175382
n^3	100	391	1532	4420	13736	31593	146677
2^n	19	25	31	36	41	44	51
$n!$	9	11	12	13	15	16	17

Cách tính:

Ta có mỗi f(n) sẽ thực hiện được tính đơn vị ms=>f(n) = t(ms)

1 second = 10^6 microseconds

Theo công thức ta có N chạy trong 1 giây:

+logn = 10^6 =>N = 2^{10^6}

+$\sqrt{n}$ = 10^{12}

+n = 10^6

+nlogn = 62746

+n^2 = 10^3

+n^3 = 10^2

+2^n = 6.log(10) = 19

+n! = 9

Bài tập 3:

a Suy luận trên là sai

Vì n^2 là hàm tiệm cận trên của $\frac{1}{2}n^2$

và n^2 là hàm tiệm cận trên của $n^2 + 1$

nhưng không có nghĩa là hàm $\frac{1}{2}n^2 = n^2 + 1$

b Xét f(n) = $7n^2$

g(n)= $n^2 - 80n$

h(n)= n^3

Chứng minh f(n) = O(g(n))

hay $\boldsymbol{7n^2 = O(n^2 - 80n)}$

$\exists c \in R^+$, $n_0 \in N$

sao cho $7n^2 \le c(n^2 - 80n)$ $\quad \forall n \ge n_0$

Giả sử chọn c=8

Ta có $n^2 - 640n \ge 0$

n	0	640
$n^2 - 640n$	+ 0 -	0 +

Vậy chọn c=8, $n_0 = 640$

=> $7n^2 \le c(n^2 - 80n)$ $\quad \forall n \ge 640$

=> $7n^2 = O(n^2 - 80n)$

Chứng minh $\boldsymbol{n^2 - 80n = O(7n^2)}$

$\exists c \in R^+$, $n_0 \in N$

hay $n^2 - 80n \le c(7n^2)$ $\quad \forall n \ge n_0$

$\forall n \ge 1$ ta có: $n^2 - 80n \le n^2 \le 7n^2$

Vậy chọn c=1, n_0=1

$n^2 - 80n \le 7n^2$ $\quad \forall n \ge 1$

=> $n^2 - 80n = O(7n^2)$

Chứng minh $\boldsymbol{n^2 - 80n = O(n^3)}$

$\exists c \in R^+$, $n_0 \in N$

hay $n^2 - 80n \le c(n^3)$ $\quad \forall n \ge n_0$

$\forall n \ge 1$ ta có: $n^2 - 80n \le n^2 \le n^3$

Vậy chọn c=1, n_0=1

$n^2 - 80n \le n^3$ $\quad \forall n \ge 1$

=> $n^2 - 80n = O(n^3)$

Chứng minh $\boldsymbol{n^3 \ne O(7n^2)}$

Giả sử: $n^3 \in O(7n^2)$

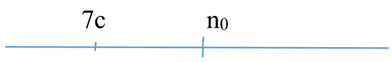
$\exists c \in R^+$, $n_0 \in N$

Ta có: $n^3 \le c(7n^2)$ $\quad \forall n \ge n_0$

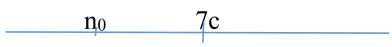
<=> $n \le 7c$ $\quad \forall n \ge n_0$(Mâu thuẫn vô lý)

Có trục số:

TH1



TH2



=> Giả sử ban đầu sai

=> $n^3 \ne O(7n^2)$

c **Chứng minh** $\boldsymbol{n^4 + n + 1 \notin O(n^2)}$

Giả sử $n^4 + n + 1 \in O(n^2)$

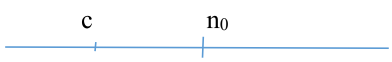
$\exists c \in R^+$, $n_0 \in N$

Ta có: $n^4 + n + 1 \le c(n^2)$ $\quad \forall n \ge n_0$

<=> $n^2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \le c$ $\quad \forall n \ge n_0$(Mâu thuẫn vô lý)

Có trục số:

TH1



TH2

Chứng minh O(n^2)$\notin$ O(n)

giả sử O(n^2)là tập con O(n)

Xét một hàm bất kì f(x) trong O(n^2) $\forall n \geq n_0$

$\exists c \in R^+$, $n_0 \in N$

Ta có: f(n)$\leq cn^2$ $\forall n \geq n_0$

<=> f(n)$\leq$cn.n $\forall n \geq n_0$

với$\forall c \in R^+$, $n_0 \in N$ thì cn luôn là một số phụ thuộc vào n

=> O(n^2) không là tập con của O(n) (1)

giả sử O(n)là tập con O(n^2)

Xét một hàm bất kì g(x) trong O(n) $\forall n \geq n_0$

$\exists d \in R^+$, $n_0 \in N$

Ta có: f(n)$\leq$dn $\forall n \geq n_0$

<=>f(n)$\leq \frac{d}{n} n^2$ $\forall n \geq n_0$

với$\forall d \in R^+$, $n_0 \in N$ thì $\frac{d}{n}$ luôn là một số phụ thuộc vào n

=> O(n) không là tập con của O(n^2)

=> O(n) không là tập con của O(n^2) (2)

Từ (1) và (2) => O(n^2)$\notin$ O(n)

Chứng minh n$\notin$O($\log_2 n$)

Giả sử n $\in$ O($\log_2 n$)

$\exists c \in R^+$, $n_0 \geq 2$ sao cho:

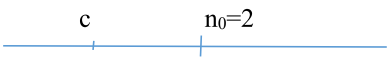
n$\leq$c$\log_2 n$ $\forall n \geq n_0$

<=> $\frac{n}{\log_2 n} \leq c$ $\forall n \geq 2$ (

($\frac{n}{\log_2 n} \geq 2$)

Có trục số:

TH1



TH2

=> $\frac{n}{\log_2 n} \leq c$ $\forall n \geq 2$ (Vô lý)

Vậy n$\notin$O($\log_2 n$)

Bài tập 4:

Group 1:

$f_1(n) = \binom{n}{100} = \frac{n!}{(n-100)!100!} = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-99)}{100!} = \frac{O(n^{100})}{100!}$

$f_2(n) = n^{100} = O(n^{100})$

$f_3(n) = 1/n = O(n^{-1})$

$f_4(n)=10^{1000}n = 10000.O(n)$

$f_5(n)$=nlogn = n*n^c(với c là số rất nhỏ) = $n^{(1+c)}$

Vậy: $f_3(n)<f_4(n)<f_5(n)<f_1(n)<f_2(n)$

Group 2:

$f_1(n) = 2^{2^{1000000}} = O(C) = O(1)$
$f_2(n) = 2^{100000n} = O(2^{100000n})$
$f_3(n) = \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$
$f_4(n) = n\sqrt{n} = n^{\frac{3}{2}} = O(n^{3/2})$

Vậy: $f_1(n)<f_4(n)<f_3(n)<f_2(n)$

Group 3:

$f_1(n) = n^{\sqrt{n}} = 2^{\log_2 n^{\sqrt{n}}} = 2^{\sqrt{n}(n^c)} = 2^{n^{(\frac{1}{2}+c)}}$
$f_2(n) = 2^n$
$f_3(n) = n^{10}2^{n/2} = 2^{\log_2 n^{10}}.2^{n/2} = 2^{10(\log_2 n)+\frac{n}{2}} = 2^{10n^c+\frac{n}{2}}$
$f_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(i+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n^2+3n}{2} = 2^{\log_2\frac{n^2+3n}{2}} = 2^{\log_2 O(n^2)} = 2^{2n^c}$

Vậy: $f_4(n)<f_1(n)<f_3(n)<f_2(n)$
(CHECK)

Group 4:
$f_1(n) = n^4\binom{n}{2} = n^4.\frac{n(n-1)}{2} = O(n^6)$
$f_2(n) = \sqrt{n}\ (logn)^4 = n^{\frac{1}{2}} + n^{(4c)} = O(n^{4c+\frac{1}{2}})$
$f_3(n) = n^{5logn} = n^{5n^c} = O(n^{5n^c})$
$f_4(n) = 4logn + loglogn = 4n^c + logn^c = 4n^c + cn^c = O(n^c)$
$f_5(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$

Vậy: $f_4(n)<f_2(n)<f_5(n)<f_1(n)<f_3(n)$

Group 5:

$f_6(n) = n^{\sqrt{n}} = 2^{logn^{\sqrt{n}}} = 2^{n^{(\frac{1}{2}+c)}}$
$f_7(n) = n^{logn} = 2^{logn^{logn}} = 2^{n^{2c}}$
$f_8(n) = 2^{n/2}$
$f_9(n) = 3^{\sqrt{n}} = 3^{\sqrt{n}} = 2^{\sqrt{n}.\log_2 3} = 2^{1.58.n^{\frac{1}{2}}}$
$f_{10}(n) = 4^{n^{1/4}} = 2^{2n^{1/4}}$

Vậy: $f_{10}(n)<f_9(n)<f_7(n)<f_6(n)<f_8(n)$

Bài tập 5:
O(c) = O(1) với C là hằng số
+Chứng minh O(1) là tập con của O(c)
Xét một hàm bất kì $f(n) \in O(1)$
suy ra $\exists b \in R^+$, $n_0 \in N$ sao cho
$f(n) \le b.1 \quad \forall n \ge n_0$
<=> $f(n) \le \frac{b}{c}.c$
$\exists (a = \frac{b}{c}) \in R^+$ $n_0 \in N$ sao cho
$f(n) \le a.c \quad \forall n \ge n_0$
Vậy $f(n) \in O(c)$
=> O(1) là tập con của O(c) (1)
+Chứng minh O(c) là tập con của O(1)
Xét một hàm bất kì $g(n) \in O(c)$
suy ra $\exists d \in R^+$, $n_0 \in N$ sao cho
$f(n) \le d.c.1 \quad \forall n \ge n_0$
$\exists (e = d.c) \in R^+$ $n_0 \in N$ sao cho
$g(n) \le e.1 \quad \forall n \ge n_0$
Vậy $g(n) \in O(1)$ (1)

=> O(c) là tập con của O(1)   (2)
Vậy từ (1) và (2) => O(c) = O(1)

Chứng minh O(Cf(n)) = O(f(n)) với C là hằng số
+Chứng minh O(cf(n)) là tập con của O(f(n))
Xét một hàm bất kì $g(n) \in O(c(f(n)))$
suy ra $\exists b \in R^+$, $n_0 \in N$ sao cho
$g(n) \leq b.c.f(n) \quad \forall n \geq n_0$
$\exists (d = b.c) \in R^+$ $n_0 \in N$ sao cho
$g(n) \leq d.f(n) \quad \forall n \geq n_0$
=> O(cf(n)) là tập con của O(f(n))   (1)
+Chứng minh O(f(n)) là tập con của O(cf(n))
Xét một hàm bất kì $k(n) \in O((f(n)))$
suy ra $\exists e \in R^+$, $n_0 \in N$ sao cho
$k(n) \leq e.f(n) \quad \forall n \geq n_0$
<=>$k(n) \leq \frac{e}{c}.(cf(n)) \quad \forall n \geq n_0$
$\exists (m = \frac{e}{c}) \in R^+$ $n_0 \in N$ sao cho
$g(n) \leq m.(cf(n)) \quad \forall n \geq n_0$
=> O(f(n)) là tập con của O(cf(n))   (2)

Vậy từ (1) và (2) =>O(Cf(n)) = O(f(n))

Chứng minh nếu $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \in O(h(n))$ thì $f(n) \in O(h(n))$
nếu $f(n) \in$ **O(g(n)) thì**
$f(n) \leq c_1.g(n) \quad \forall n \geq n_1$ (với $c_1 \in R^+$)   (1)
nếu $g(n) \in O(h(n))$ thì
$g(n) \leq c_2.h(n) \quad \forall n \geq n_2$ (với $c_2 \in R^+$)   (2)
từ (1) và (2)
=>$f(n) \leq c_1.c_2.h(n) \quad \forall n \geq \max(n_1, n_2)$
suy ra $\exists (a = c_1.c_2) \in R^+$, $(n_0 = \max(n_1, n_2)) \in N$ sao cho
=>$f(n) \leq a.h(n) \quad \forall n \geq \max(n_1, n_2)$

Vậy **$f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \in O(h(n))$ thì $f(n) \in O(h(n))$**

Chứng minh nếu $t_1(n) \in O(f(n))$ và $t_2(n) \in O(g(n))$ thì $t_1(n)+t_2(n) \in O(\max\{f(n),g(n)\})$
nếu $t_1(n) \in O(f(n))$ thì
$t_1(n) \leq c_1.f(n) \quad \forall n \geq n_1$ (với $c_1 \in R^+$)   (1)
nếu $t_1(n) \in O(g(n))$ thì
$t_2(n) \leq c_2.g(n) \quad \forall n \geq n_2$ (với $c_2 \in R^+$)   (2)
ta có: $t_1(n)+t_2(n) \leq c_1.f(n)+c_2.g(n) \leq c_1(\max\{f(n),g(n)\})+c_2(\max\{f(n),g(n)\}) \leq (c_1+c_2)(\max\{f(n),g(n)\})$
$\forall n \geq \max(n_1, n_2)$
suy ra $\exists (a = c_1 + c_2) \in R^+$, $(n_0 = \max(n_1, n_2)) \in N$ sao cho
$t_1(n)+t_2(n) \leq (\max\{f(n),g(n)\})$

Vậy nếu $t_1(n) \in O(f(n))$ và $t_2(n) \in O(g(n))$ thì $t_1(n)+t_2(n) \in O(\max\{f(n),g(n)\})$

Bài tập 6:
Nếu $t(n) \in O(g(n))$, thì $g(n) \in \Omega(t(n))$
Khi $t(n) \in O(g(n))$ => $t(n) \leq c.g(x)$ với $n \geq n_0$
Với n

Chứng minh $\theta(ag(n)) = \theta(g(n))$, khi mà a>0
Xét hàm f(n) bất kì thuộc g(n)
suy ra $\exists b_1 b_2 \in R^+$, $n_0 \in N$
sao cho $b_1 g(n) \leq f(n) \leq b_2 g(n) \quad \forall n \geq n_0$
<=> $\frac{b_1}{a}(ag(n)) \leq f(n) \leq \frac{b_2}{a}(ag(n)) \quad \forall n \geq n_0$

Vậy luôn $\exists(\frac{b_1}{a}$ và $\frac{b_2}{a})$ để $\frac{b_1}{a}(ag(n)) \le f(n) \le \frac{b_2}{a}(ag(n)) \quad \forall n \ge n_0$

$\theta(g(n))$ là tập con của $\theta(ag(n))$ (1)

Xét hàm f(n) bất kì thuộc g(n)

suy ra $\exists c_1 c_2 \in R^+$, $n_0 \in N$

sao cho $c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n) \quad \forall n \ge n_0$

Vậy luôn $\exists(c_1$ và $c_2)$ để $c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$ $\forall n \ge n_0$

$\theta(ag(n))$ là tập con của $\theta(g(n))$ (2)

Từ (1) và (2) => **$\theta(ag(n))=\theta(g(n))$, khi mà a>0**

Chứng minh: $\theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Bài tập 7:

Khẳng định Nếu $f(n) = \theta(g(n))$ và $g(n) = \theta(h(n))$, thì $h(n) = \theta(f(n))$

Khẳng định Nếu $f(n) = O(g(n))$ và $g(n) = O(h(n))$, thì $h(n) = \Omega(f(n))$

Khẳng định $n/100 = \Omega(n)$

$cn \le n/100$ với $\forall n \ge 1$

chọn c=1/100

Chọn $n_0=0$

Ta có $(1/100)n \le n/100$ với $\forall n \ge 0$

=> Khẳng định trên đúng

Khẳng định $f(n) + O(f(n)) = \theta(f(n))$

Khẳng định $2^{10n} = O(2^n)$

Khẳng định trên là **sai** vì:

Giả sử $2^{10n} \in \Omega(2^n)$

thì $c(2^n) \le 2^{10n}$ với $\forall n \ge n_0$

$c \le 2^{9n}$

<=> $\log_2 c \le 9n$

<=> $n \ge \frac{\log_2 c}{9}$

chọn $n_0 = \frac{\log_2 c}{9}$ ta có

Bất đẳng thức:

$2^n \le c(2^{10n})$ với $n \ge \frac{\log_2 c}{9}$ luôn đúng

=> $2^{10n} \in \Omega(2^n)$

Vậy rõ ràng $2^{10n} \notin O(2^n)$

h. $\log_{10} n = \theta(\log_2 n)$