TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH
BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #2: ĐÁNH GIÁ THUẬT TOÁN DÙNG KỸ THUẬT TOÁN SƠ CẤP

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Hương
Người thực hiện: Nguyễn Đỗ Quang 20520720

TP.HCM, ngày 28, tháng 9, năm 2022

Bài tập 1:

Câu a:
f(0) = 1000
f(1) = f(0)+1000*0.12
f(2) = f(1)+f(1)*0.12
...
f(n) = f(n-1) +f(n-1)*0.12
 $= \mathrm{f}(\mathrm{n}-1) * 1{,}12$

mã giả:

```
def func(n):
    if n==0: return 1000
    return func(n-1)*1.12
```

Phương trình đệ quy là: T(n)= $\begin{cases} C_1 & khi\ n=0 \\ T(n-1)\ + C_2 & khi\ n>0 \end{cases}$

Số tiền có được sau 30 năm là:

Câu b:

Phương trình đệ quy là: T(n)= $\begin{cases} C_1 & khi\ n=0\ hoặc\ n=1 \\ \mathrm{T}(\mathrm{n}-1)+\mathrm{T}(\mathrm{n}-2)+C_2 & khi\ n>1 \end{cases}$

Câu c:

Phương trình đệ quy là: $\mathrm{T}(\mathrm{n}) = \begin{cases} C_1 & khi\ n=1 \\ 2\mathrm{T}(\mathrm{n}/2)+C_2 & khi\ n>1 \end{cases}$

Câu d:
Xét
Phương trình đệ quy là: T(n)= $\begin{cases} C_1 & khi\ n=0 \\ \sum_{i=1}^{n} T(n-i)+C_2 & khi\ n>1 \end{cases}$

Câu e:

T(n)= $\begin{cases} C_1 & khi\ n=0 \\ \mathrm{T}(\mathrm{n}-1)+C_2 & khi\ n>1 \end{cases}$

Câu f:

Phương trình đệ quy là: T(n)= $\begin{cases} C_1 & khi\ n=0 \\ \mathrm{T}(\mathrm{n}-3)+C_2 & khi\ n>0 \end{cases}$

Trong đó C_2 = n*n= n^2

=>T(n)= $\begin{cases} C_1 & khi\ n=0 \\ 3\mathrm{T}(\frac{n}{2})+C_2 & khi\ n>0 \end{cases}$

Câu g:

Phương trình đệ quy là: T(n)= $\begin{cases} C_1 & khi\ n=0 \\ \sum_{i=1}^{n} T(n-i)+C_2 & khi\ n>0 \end{cases}$

Câu h:

T(n)=$\begin{cases} 1 & khi\ n = 1 \\ \mathrm{T(n-1)}\ +\ 1\ + \mathrm{T(n-1)} & khi\ n > 1 \end{cases}$

=>T(n)=$\begin{cases} 1 & khi\ n = 1 \\ 2\mathrm{T(n-1)} + 1 & khi\ n > 1 \end{cases}$

Bài tập 2:

Câu 1:

T(n) = T(n-1) + 5   T(1) = 0
= [T(n-2) + 5] + 5
= T(n-2) + 2*5
= [T(n-3) + 5] + 2*5
= T(n-3) + 3*5

=> T(n) = T(n-i) + i*5

Quá trình dừng lại khi:
n-i= 1
<=> i =n-1
<=>T(n) = T(1) + (n-1)*5 = 5n-5

Câu 2:

T(n) = T(n-1) + n   T(1) = 1
= [T(n-2) + n-1]+n
= T(n-2) + 2n -1
= [T(n-3) + (n-2)] + 2n -1
= T(n-3) + 3n -1 - 2
= [T(n-4) + (n-3)] +3n - 1 -2
=T(n-4) + 4n - 1- 2 - 3
=T(n-i) + in - $\sum_{k=1}^{i\ -1} k$

Quá trình dừng lại khi:
n-i = 1
<=>i = n-1
T(n) = T(0) + (n-1)n - $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ = 1 + $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ = $\frac{n^2+n}{2}$

câu 3:

T(n) = 3T(n-1) + 1   T(1) = 4
= 3[3T(n-2) + 1] + 1
= 9T(n-2) + 3 + 1
= 9[3T(n-3) + 1] + 3 + 1
=27T(n-3) + 9 + 3 + 1
=> T(n) = 3^iT(n-i) +$\sum_{k=0}^{i-1} 3^k$
Quá trình dừng lại khi:
n-i = 1
<=>i = n-1
T(n) = $3^{\mathrm{n}-1}$T(1)+$\sum_{k=0}^{i-1} 3^k$ (Trong đó: $\sum_{k=0}^{i-1} 3^k$=$\frac{3^{i+1}-1}{3-1}$ - 3^i=$\frac{3^i-1}{2}$)
= $43^{\mathrm{n}-1}$+$\frac{3^{n-1}-1}{2}$ = $\frac{9.3^{n-1}-1}{2}$

Câu 4:

T(n) = 2T($\frac{n}{2}$) + 1   T(1) = 1
= 2[2T($\frac{n}{4}$) + 1] + 1
=4T($\frac{n}{4}$) + 2 +1
=4[2T($\frac{n}{8}$)+1] + 2 + 1

$=8T(\frac{n}{8}) + 4 + 2 + 1$

$=>T(n) = 2^iT(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k$ (Trong đó: $\sum_{k=0}^{i-1} 2^k = 2^i - 1$)

Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{2^i} = 1$

$<=> 2^i = n$

$<=> i = \log_2 n$

$T(n) = 2^{\log_2 n} + 2^{\log_2 n} - 1 = 2n - 1$

Câu 5:

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$ $T(1) = 1$

$=2[2T(\frac{n}{4}) + \frac{n}{2}] + n$

$=4T(\frac{n}{4}) + 2n$

$=4[2T(\frac{n}{8}) + \frac{n}{4}] + 2n$

$=8T(\frac{n}{8}) + 3n$

$=>T(n) = 2^iT(\frac{n}{2^i}) + n*i$

Quá trình dừng lại khi:

$\frac{n}{2^i} = 1$

$<=> 2^i = n$

$<=> i = \log_2 n$

$T(n) = n + n*\log_2 n$

Câu 6:

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^2$ $T(1) = 1$

$=2[2T(\frac{n}{4}) + (\frac{n}{2})^2] + n^2$

$=4T(\frac{n}{4}) + \frac{1}{2}n^2 + n^2$

$=4[2T(\frac{n}{8}) + (\frac{n}{4})^2] + n^2 + n^2$

$=8T(\frac{n}{8}) + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^2 + n^2$

$=8[2T(\frac{n}{16}) + (\frac{n}{8})^2] + \frac{n^2}{2} + n^2 + n^2$

$=16T(\frac{n}{16}) + \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^2 + n^2$

$=2^iT(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{2^k}$

Trong đó: $\sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{i-1} (\frac{1}{2})^k = \frac{1-(\frac{1}{2})^{i+2}}{1-\frac{1}{2}} = 2(1 - (\frac{1}{2})^i)$

Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{2^i} = 1$

$<=> i = \log_2 n$

$T(n) = 2^iT(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^{-k}$

$= n + 2(1 - (\frac{1}{2})^{\log_2 n})$

$= n + 2 - 2\frac{1}{n}$

Câu 7:

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \log_2 n$ $T(1) = 1$

$= 2[2T(\frac{n}{4}) + \log_2 \frac{n}{2}] + \log_2 n$

$=4T(\frac{n}{4}) + 2\log_2 n - 2 + \log_2 n$

$=4[2T(\frac{n}{8}) + \log_2 \frac{n}{4}] + 2\log_2 n + \log_2 n - 2$

$=8T(\frac{n}{8}) + 4\log_2 n + 2\log_2 n + \log_2 n$ -4*2 - 2*1-1*0

$=2^i T(\frac{n}{2^i}) + (\sum_{k=0}^{i-1} 2^k)(\log_2 n) - \sum_{p=0}^{i-1} p2^p$

Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{2^i}=1$

$\iff i = \log_2 n$

$T(n) = n+(2^i - 1)(\log_2 n) - [(n-2)2^i+2]$

$=n+(n-1)(\log_2 n)-(n^2 - 2n + 2)$

Bài tập 3:

Câu 1:

$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n^2$ $\quad T(1) = 1$

$=3[3T(\frac{n}{4}) + (\frac{n}{2})^2] + n^2$

$=9T(\frac{n}{4}) + 3(\frac{n}{2})^2 + n^2$

$=9[3T(\frac{n}{8}) + (\frac{n}{4})^2] + 3(\frac{n}{2})^2 + n^2$

$=27T(\frac{n}{8}) + \frac{9n^2}{16} + \frac{3n^2}{4} + n^2$

$\Rightarrow T(n) = 3^i T(\frac{n}{2^i}) + n^2 \sum_{k=0}^{i-1} (\frac{3}{4})^k$

Trong đó: $\sum_{k=0}^{i-1} (\frac{3}{4})^k = \frac{1-(\frac{3}{4})^{i+2}}{1-\frac{3}{4}} = 4(1 - (\frac{3}{4})^i)$

Quá trình dừng lại khi:

$\frac{n}{2^i}=1$

$\iff 2^i = n$

$\iff i = \log_2 n$

$T(n) = 3^{\log_2 n} + 4n^2(1 - (\frac{3}{4})^{\log_2 n})$

Câu 2:

$T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3$ $\quad T(1) = 1$

$= 8[8T(\frac{n}{4}) + (\frac{n}{2})^3] + n^3$

$= 8^2 T(\frac{n}{4}) + n^3 + n^3$

$= 8^2 [8T(\frac{n}{8}) + (\frac{n}{4})^3] + n^3 + n^3$

$= 8^3 T(\frac{n}{8}) + n^3 + n^3 + n^3$

$= 8^i T(\frac{n}{2^i}) + i n^3$

Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{2^i} = 1$

$\iff 2^i = n$

$\iff i = \log_2 n$

$T(n) = n^3 + n^3 \log_2 n = n^3(1 + \log_2 n)$

Câu 3:

$T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + n$ $\quad T(1) = 1$

$= 4[4T(\frac{n}{9}) + \frac{n}{3}] + n$

$= 4^2 T(\frac{n}{9}) + \frac{4n}{3} + n$

$= 4^2 [4T(\frac{n}{27}) + \frac{n}{9}] + \frac{4n}{3} + n$

$= 4^3 T(\frac{n}{27}) + \frac{16n}{9} + \frac{4n}{3} + n$

$= 4^i T(\frac{n}{3^i}) + n\sum_{k=0}^{i-1} (\frac{4}{3})^k$

Trong đó: $\sum_{k=0}^{i-1} (\frac{4}{3})^k = \frac{1-(\frac{4}{3})^i}{1-\frac{4}{3}} = -3(1 - (\frac{4}{3})^i)$

Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{3^i} = 1$

$\iff 3^i = n$

<=> i = $\log_3 n$
T(n) = $4^{\log_3 n}$ -3n$(1-(\frac{4}{3})^{\log_3 n})$
Câu 4:
T(n) = 9T($\frac{n}{3}$) + n^2 T(1) = 1
= 9[9T($\frac{n}{9}$)+($\frac{n}{3}$)^2] + n^2
= 9^2T($\frac{n}{9}$)+ n^2+n^2
= 9^2[9T($\frac{n}{27}$) + ($\frac{n}{9}$)^2] +n^2+n^2
= 9^3T($\frac{n}{27}$) +n^2+n^2+n^2
= 9^iT($\frac{n}{3^i}$)+in^2
Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{3^i}$ = 1
<=> 3^i = n
<=> i = $\log_3 n$
T(n) = n^2+($\log_3 n$)n^2 = n^2(1+$\log_3 n$)

Câu 5:
T(n) = 2T($\sqrt{n}$) + 1 T(2) = 0
=2T($n^{1/2}$)+1
=2[2T($n^{1/4}$)+1]+1
=4T($n^{1/4}$) + 2 +1
=4[2T($n^{1/8}$)+1]+2+1
=8T($n^{1/8}$)+4+2+1
=2^iT($n^{1/(2^i)}$)+$\sum_{k=0}^{i-1} 2^k$
Quá trình dừng lại khi: $n^{1/(2^i)}$= 2
<=>$n^{(\frac{1}{2})^i}$=2
<=> $\log_2 n^{(\frac{1}{2})^i}$=1
<=> $(\frac{1}{2})^i \log_2 n$ = 1
<=> $\log_2 n$ = 2^i
<=> $\log_2 \log_2 n$ = i
T(n) = 2^iT($n^{1/(2^i)}$)+$\sum_{k=0}^{i-1} 2^k$ = 2^i -1 = $2^{\log_2 \log_2 n}$ - 1

Bài tập 4:

Câu 1:
T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2)
T(0) = 1
T(1) = 2

Đặt X^n = T(n)
Ta có: X^n-4X^{n-1}+3X^{n-2}=0
<=>X^2-4X+3=0
<=> $\left[\begin{matrix} X = 1 \\ X = 3 \end{matrix}\right.$
T(n) = $C_1 1^n + C_2 3^n$
Ta có: $\begin{cases} T(0) = 1 \\ T(1) = 2 \end{cases}$
<=> $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 3C_2 = 2 \end{cases}$
<=> $\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$
T(n) = $\frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}$

Câu 2:

T(n) = 4T(n-1) - 5T(n-2) +2T(n-3)
T(0) = 0
T(1) = 1
T(2) = 2

Đặt X^n = T(n)
Ta có: X^n=4X^{n-1}-5X^{n-2}+2X^{n-3}
<=>X^n-4X^{n-1}+5X^{n-2} -2X^{n-3}=0

<=>X^3-4X^2+5X^1-2=0
<=>$(X-1)^2$(X-2)
<=>$\left[\begin{array}{l} X = 1(nghiệm\ kép) \\ X = 2 \end{array}\right.$
T(n) = $C_1 2^n + C_2 1^n + C_3 n 1^n$=$C_1 2^n$+$C_2$+n$C_3$
Ta có:$\begin{cases} T(0) = 0 \\ T(1) = 1 \\ T(2) = 2 \end{cases}$
<=>$\begin{cases} T(0) = 0 \\ T(1) = 1 \\ T(2) = 2 \end{cases}$
Có $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ 4C_1 + C_2 + 2C_3 = 2 \end{cases}$
<=>$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 1 \end{cases}$
T(n) = n

Câu 3: (Recurrence relation of fibonaci sequence)
T(n) = T(n-1) + T(n-2)
T(0)=1
T(1)=1
Đặt X^n = T(n)
Ta có: X^n=X^{n-1}+X^{n-2}
<=>$X^n - X^{n-1} - X^{n-2}$ = 0
<=>$X^2 - X^1 - 1$ = 0
<=>$\left[\begin{array}{l} X = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (golden\ ratio) \\ X = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$
T(n) = $C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$+$C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$
Ta có: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \quad (\mathbf{1}) \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}C_2 = 1 \quad (\mathbf{2}) \end{cases}$
Từ (1)=> C_1 = 1-C_2 (3)
Thế (3) vào (2): $\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}(1 - C_1) = 1$
<=>C_1=1-$\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ =>$C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$
T(n) = (1-$\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

Bài tập 5:
Câu a:
T(n) = $\begin{cases} 1 \quad khi\ n = 0 \\ 2T(n-1) + 7 \quad khi\ n > 0 \end{cases}$

Hàm sinh của dãy $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng như sau:
f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} T(n)\, x^n$ = T(0)+T(1)x+T(2)x^2+...

f(x) = $\sum_{n=1}^{\infty} [2T(n-1)+7]\, x^n$ +T(0)
= $2\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n + 7\sum_{n=1}^{\infty} x^n + 1$

Đặt A = $\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n$ = x$\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1}$ =x(T(0)+T(1)x+..) =xf(x)

Đặt B = $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$

Thay A và B lại vào biểu thức có: f(x) = 2xf(x) + $7\frac{x}{1-x}$ +1
<=>(1-2x)f(x) = $\frac{6x+1}{1-x}$
<=>f(x) = $\frac{6x+1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{a}{(1-x)} + \frac{b}{1-2x}$
Ta có:(1-2x)a+(1-x)b = 6x+1
có hệ: $\begin{cases} -2a-b=6 \\ a+b=1 \end{cases}$
<=>$\begin{cases} a=-7 \\ b=8 \end{cases}$
Vậy f(x) = $\frac{-7}{(1-x)} + \frac{8}{1-2x}$
$= -7\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 8\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$
$= \sum_{n=0}^{\infty} (8.2^n - 7)x^n$
T(n) = $8.2^n - 7$

Câu b:

$$\begin{cases} T(n) = 7T(n-1) - 12T(n-2) \quad nếu\ n >= 2 \\ T(0) = 1 \\ T(1) = 2 \end{cases}$$

Hàm sinh của dãy $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng như sau:
f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} T(n)\, x^n$ = T(0)+T(1)x+T(2)x^2+...
f(x) = $\sum_{n=2}^{\infty} T(n)\, x^n$ + T(0)+T(1)x=$\sum_{n=2}^{\infty} [7T(n-1) - 12T(n-2)]\, x^n$+1+2x
= $7\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)\, x^n - 12\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)\, x^n$+1+2x

Câu c:

$$\begin{cases} T(n+1) = T(n) + 2(n+2) \quad nếu\ n >= 1 \\ T(0) = 3 \end{cases}$$

Đổi biến: T(m) = T(m-1)+2(m+1)<=>T(n)=T(n-1)+2(n+1)

Hàm sinh của dãy $\{T(n)\}_{n=0}^{\infty}$ có dạng như sau:
f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} T(n)\, x^n$ = T(0)+T(1)x+T(2)x^2+...
Ta có: f(x) = $\sum_{n=1}^{\infty} [T(n-1) + 2(n+1)]\, x^n$+T(0)
= $\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, x^n$+3
= x$\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^{n-1}$+2$(\frac{1}{(1-x)^2} - 1) + 3$
= xf(x)+$\frac{2}{(1-x)^2}$+1
<=>f(x) = $\frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{1-x}$ **(1)**
Từ công thức y=$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ta đạo hàm 2 vế:
$(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)\frac{\partial y}{\partial x} = (\frac{1}{1-x})\frac{\partial y}{\partial x}$

<=>$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$
<=>$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n} = \frac{1}{(1-x)^2}$
có ($\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n}) \frac{\partial y}{\partial x} = (\frac{1}{(1-x)^2})\frac{\partial y}{\partial x}$
<=>$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)nx^{n-1} = \frac{2(1-x)}{(1-x)^4}$
<=>$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^{n} = \frac{2}{(1-x)^3}$ **(2)**
Thế (2) vào (1) ta có f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n}$
=> Ta có T(n) = $n^2 + 3n + 3$

Bài tập 6:

$$\begin{cases} T(1) = C_1 \\ T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n \quad \text{nếu } n \geq 2 \end{cases}$$

Lần i
f(n)=an^3
với n=1 thì T(1) = C_1 f(1) = a
Chứng minh T(1) ≤ f(1)
ta có C_1 ≤ a (*)
Ta cần chứng minh T(n) ≤ f(n)
Ta có T(n) = $4T(\frac{n}{2}) + n \leq 4f(\frac{n}{2}) + n$
<=> T(n)≤ 4(a$(\frac{n}{2})^3$)+n
<=> T(n)≤ a$\frac{n^3}{2}$+n
<=> T(n)≤ an^3-a$\frac{n^3}{2}$+n (**)
Từ (*) và (**) chứng minh: $\begin{cases} C_1 \leq a \\ -a\frac{n^3}{2} + n \leq 0 \end{cases}$

lần thứ iii f(n)=an^2-bn
Với n=1 thì T(1) = C_1 và f(1)=a-b
Chứng minh T(1) ≤ f(1)
ta có C_1 ≤ a-b **(1)**
Ta cần chứng minh T(n) ≤ f(n)
Ta có T(n) = $4T(\frac{n}{2}) + n \leq 4f(\frac{n}{2}) + n$
<=> T(n) ≤ 4(a$(\frac{n}{2})^2$-b$\frac{n}{2}$)+n
<=> T(n) ≤4a$\frac{n^2}{4}$-4b$\frac{n}{2}$+n
<=> T(n) ≤an^2-bn+(-bn+n)
Để T(n)≤ f(n) thì:
-bn+n≤ 0
<=>n(1-b)≤ 0 **(2)**
Từ (1) và (2) ta chọn a và b sao cho: $\begin{cases} C_1 \leq a - b \\ n(1-b) \leq 0 \end{cases}$

Bài tập 7:

$$\begin{cases} T(1) = 1 \text{ với } n \leq 5 \\ T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + n \end{cases}$$

Đoán f(n)=O(n) = an+b
Với n=1 thì T(n=1)=1 và f(1)=a+b
chứng minh: T(1) ≤ f(1)
1 ≤ a+b thì T(1) ≤ f(1) (1)

Ta cần chứng minh T(n) ≤ f(n)

Ta có T(n) = $T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + n \ \leq \ f(\frac{n}{2}) + f(\frac{n}{4}) + n$

<=> T(n) $\leq$ a$\frac{n}{2}$+b+a$\frac{n}{4}$+b+n

<=>T(n) $\leq$ (an+b)+(-$\frac{1}{4}$an+b+n)

<=>T(n) $\leq$ f(n) + (-$\frac{1}{4}$an+b+n)$\leq$ f(n)

Để T(n)$\leq$ f(n) thì:

-$\frac{1}{4}$an+b+n $\leq$ 0 (2)

Từ (1) và (2) ta chọn a và b sao cho: $\begin{cases} 1 \ \leq \ \mathrm{a} + \mathrm{b} \\ -\frac{1}{4}\mathrm{an} + \mathrm{b} + \mathrm{n} \ \leq \ 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} b = -a + 1 \\ a = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

thế vào (2) ta có: -$\frac{1}{4}.\frac{8}{3}$.n+($-\frac{8}{3}$ +1)+n$\leq$ 0

<=>$\frac{1}{3}$n+$\leq$ $\frac{5}{3}$

<=>n$\leq$5 (thỏa yêu cầu)

T(n) = O(n)