Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính

Bài 1. Hệ phương trình tổng quát

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính

Bài 1. Hệ phương trình tổng quát

1.1. Định nghĩa

1.2. Hệ Cramer

1.3. Giải hệ tổng quát bằng phương pháp Gauss

1.4. Điều kiện có nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tổng quát

1.1. Định nghĩa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (I)$$

$$a_{ij},\ b_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Ma trận hệ số

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

Ma trận cột của hệ số tự do

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = (b_i)_{m\times 1} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$$

Ma trận cột của ẩn

Hệ phương trình (*I*) được viết dưới dạng ma trận là

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_j)_{n\times 1} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

$$\boxed{AX = B}$$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

- $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ được gọi là một nghiệm của hệ (I) nếu

$$\boxed{A\alpha = B}$$

- ***Quy ước***

Để cho gọn, ta viết nghiệm dưới dạng

$$\alpha = (\alpha_1;\ \alpha_2;\ldots;\ \alpha_n).$$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

VD. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$$

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

và $\alpha = (1; -1; -1; 1)$ là một nghiệm của hệ.

1.2. Hệ Cramer

1.2.1. Định nghĩa

Hệ Cramer là một hệ phương trình tuyến tính có *số phương trình bằng với số ẩn* và định thức của ma trận hệ số khác 0.

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

VD. Hệ $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x - 3y + 6z = 4 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases}$ là hệ Cramer.

Hệ $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ x + 4y - z = 2 \end{cases}$ không phải là hệ Cramer.

1.2.2. Định lý Cramer (*Quy tắc Cramer*)

Cho hệ Cramer $AX = B$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ và $\det A \neq 0$.

Hệ Cramer $AX = B$ có nghiệm duy nhất là

$$\boxed{x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)}$$

trong đó, các ma trận A_j nhận được bằng cách thay cột thứ j của ma trận A bởi cột các hệ số tự do B.

VD 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

Giải. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 4.$$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_1 = -12$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_2 = 24$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_3 = -4$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} = -3 \\ x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} = 6 \\ x_3 = \dfrac{\det A_3}{\det A} = -1 \end{cases}$$

1.2.3. Biện luận số nghiệm của hệ dạng Cramer

Cho hệ $AX = B$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ và A chứa tham số m.

- **TH 1.** Nếu $\det A \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất.
- **TH 2.** Nếu $\det A = 0$ và $\exists j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho $\det A_j \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.
- **TH 3.** Nếu $\det A = \det A_j = 0 \ (\forall j = 1, 2, \ldots, n)$

  thì hệ có thể có *vô số nghiệm hoặc vô nghiệm*.

  Khi đó, ta giải $\det A = 0$ tìm tham số m và thay vào hệ để giải trực tiếp.

VD 2. Tìm điều kiện của m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 2mx + 2y + 3z = 7 \\ mx - 3y + 6z = 4m \\ 3x - my + 9z = 11. \end{cases}$$

Giải. $\det A = \begin{vmatrix} 2m & 2 & 3 \\ m & -3 & 6 \\ 3 & -m & 9 \end{vmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2m & 2 & 3 \\ -3m & -7 & 0 \\ 3-6m & -m-6 & 0 \end{vmatrix} = 9(m^2 - 8m + 7).$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 7 \end{cases}.$

VD 3. Tìm điều kiện của m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} mx-(m+2)y=-m \\ (1-2m)x+3my=2m-1. \end{cases}$$

Giải. Ta có: $\det A = m^2-3m+2$

$$\Rightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow m=1 \vee m=2.$$

- Với $m=1$, hệ trở thành $x-3y=-1$ (vô số nghiệm).
- Với $m=2$, hệ trở thành $x-2y=-1$ (vô số nghiệm).

Suy ra không có m làm hệ vô nghiệm.
Vậy hệ có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

VD 4. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = m + 2 \\ 4x + (m+5)y + (m-3)z = m - 1 \\ 8x + 12y + (m-4)z = 8 - 2m. \end{cases}$$

Giải. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & m+5 & m-3 \\ 8 & 12 & m-4 \end{vmatrix} = 2m(m-1).$

• $m = 0$, hệ trở thành: $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ y + z = 5 \end{cases}$ (VSN).

- $m = 1$, hệ trở thành: $\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ 4x + 6y - 2z = 0 \\ 8x + 12y - 3z = 6 \end{cases}$ (VN).

- $0 \neq m \neq 1 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất.

1.3. Giải hệ tổng quát bằng phương pháp Gauss

Xét hệ $AX = B\ (I)$ với ma trận mở rộng như sau

$$\overline{A} = \left(A \middle| B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \boxed{b_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Bài 1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Để giải hệ (I) ta thực hiện các bước sau

- **Bước 1.** Lập ma trận mở rộng $\overline{A}$.
- **Bước 2.** Đưa $\overline{A}$ về bậc thang bởi các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.
- **Bước 3.** Viết lại hệ và giải ngược từ dưới lên trên.

- ***Chú ý***

Trong quá trình thực hiện bước 2, nếu:

i) có hai dòng tỉ lệ thì ta xóa đi một dòng;

ii) có dòng nào bằng *không* thì ta xóa đi dòng đó;

iii) có ít nhất một dòng ở dạng $(0 \quad \cdots \quad 0 \mid b)$ $(b \neq 0)$ thì ta kết luận hệ (I) vô nghiệm.

VD 5. Giải hệ sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \\ 3x - y + 5z = 16. \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$\overline{A} = \left(A \middle| B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 16 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_2]{d_1 \to d_1 - 2d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & -5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & 13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \to 7d_3 - 8d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & -5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 33 & 99 \end{array}\right).$$

Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ \qquad 7y - 5z = -1 \\ \qquad\qquad 33z = 99 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3. \end{cases}$$

VD 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 4t = -3 \\ 4x - 2y + 3z + 2t = -7 \\ 6x + y + 2z + 6t = -7. \end{cases}$$

Giải. Ta có: $\overline{A} = \left(A\middle|B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & 2 & -7 \\ 6 & 1 & 2 & 6 & -7 \end{array}\right).$

$$\overline{A} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_1 - d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

VD 7. Giải hệ pt $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 - 9x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + \qquad 4x_4 = -1. \end{cases}$

Giải. Ta có $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 8 & -9 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 5 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 3 & 1 & 17 \\ 1 & 3 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 8 & 6 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 3 & 1 & 17 \\ 1 & 3 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & -10 \end{array}\right).$$

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = -4 \\ \qquad\quad x_2 - 3x_3 - x_4 = -17 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$$

Đặt $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ và thế vào hệ ta được:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4\alpha - x_4 = -4 \\ \qquad\quad x_2 - 3\alpha - x_4 = -17 \\ \qquad\qquad\qquad \alpha + x_4 = -2. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm

$$(51 - 3\alpha; -19 + 2\alpha; \alpha; -2 - \alpha)(\alpha \in \mathbb{R}).$$

- ***Chú ý***

Trong trường hợp hệ có vô số nghiệm, ta gọi nghiệm chứa tham số là ***nghiệm tổng quát***.

Cho tham số giá trị cụ thể, ta được ***nghiệm riêng***.

VD 8. Giải hệ $\begin{cases} 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$

Giải. Ta có $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & -1 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -5 & 2 & 3 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2 + d_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & -1 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ \quad 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = -4. \end{cases}$$

Đặt $x_2 = a,\ x_4 = b,\ x_5 = c$ và thế vào hệ ta được:

$$\begin{cases} x_1 - a + x_3 - 2b + c = -1 \\ \quad 2a - x_3 + 3b - c = -4. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = -5 - a - b \\ x_2 = a \\ x_3 = 4 + 2a + 3b - c \ (a, b, c \in \mathbb{R}). \\ x_4 = b \end{cases}$$

1.4. Điều kiện có nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tổng quát

1.4.1. Định lý Kronecker – Capelli

Hệ phương trình tuyến tính tổng quát $\underline{A}X = B\ (I)$ *có nghiệm khi và chỉ khi* $r(A) = r(\bar{A})$

- ***Chú ý***

i) $r(A) \leq r(\bar{A})$.

ii) Nếu $r(A) = r(\bar{A}) = n$ (bằng số ẩn) thì hệ (I) có *nghiệm duy nhất*.

iii) Nếu $r(A) = r(\bar{A}) < n$ thì hệ (I) có *vô số nghiệm*, trong đó có $n - r$ ẩn tự do được lấy tùy ý.

- **Chú ý**

i) Khi tìm điều kiện của tham số để ***hệ phương trình vô nghiệm***, ta có thể tìm điều kiện để ***hệ có nghiệm***. Sau đó, ta ***kết luận ngược lại***.

ii) Nếu ma trận mở rộng $\overline{A}$ có ***các cột đầu chứa tham số*** thì ta có thể ***đổi cột*** trong ma trận A (***không được đổi với cột hệ số tự do***).

VD 9. Tìm điều kiện của m để hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + y + 2z = 2 \\ 2x + 5y + 7z = 3 \\ 3x + 4y + 5z = m^2 \end{cases}$$ có vô số nghiệm.

Giải. Ta có: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & m^2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m & 2 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & m^2 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_2 \to d_2 - 5d_1]{d_3 \to d_3 + d_1 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m & 2 \\ 0 & -3 & 2-5m & -7 \\ 0 & 0 & m+1 & m^2-1 \end{array}\right).$$

Suy ra hệ có vô số nghiệm khi:

$$r(A) = r(\overline{A}) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1=0 \\ m^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1.$$

VD 10. Tìm điều kiện của m để hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ -2x - 6y + (m-1)z = 4 \\ 4x + 12y + (3+m^2)z = m-3 \end{cases}$$ vô nghiệm.

Giải. Ta có: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & m-1 & 4 \\ 4 & 12 & m^2+3 & m-3 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m+1 & 2 \\ 0 & 0 & m^2-1 & m+1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3-m \end{array}\right).$$

- $m = 3 \Rightarrow r(A) = r(\overline{A}) = 2 \Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm.
- $m = -1 \Rightarrow r(A) = 1 < 3 = r(\overline{A}) \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho vô nghiệm khi $m \neq 3$.

VD 11. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3t = m \\ 2x + (m+4)y - z + (m+8)t = 2m+1 \\ 3x + (m+6)y + (m-4)z + (m^2+m+7)t = 2m+3. \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & m \\ 2 & m+4 & -1 & m+8 & 2m+1 \\ 3 & m+6 & m-4 & m^2+m+7 & 2m+3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & 1 & m+2 & 1 \\ 0 & 0 & m-2 & m^2-4 & 2-m \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & 1 & m+2 & 1 \\ 0 & m & m-1 & m^2+m-2 & 3-m \end{array}\right)$$

- $m = 0$: $r(A) = 2 < 3 = r(\overline{A}) \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.
- $m = 2$: $r(A) = r(\overline{A}) = 2 \Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm.
- $0 \neq m \neq 2$: $r(A) = r(\overline{A}) = 3 \Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm.

1.4.2. Điều kiện để hai hệ phương trình có nghiệm chung

Muốn tìm điều kiện của tham số để hai hệ phương trình có nghiệm chung, ta ghép chúng thành một hệ rồi đi tìm điều kiện của tham số để hệ chung đó có nghiệm.

VD 12. Tìm điều kiện của tham số m để hai hệ phương trình sau có nghiệm chung:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z + mt = 3 \\ 2x - 2y + 2z + (2m+3)t = m^2 + 6 \end{cases}$$ và

$$\begin{cases} 3x - 5y + 2mz + (2m+8)t = 2m^2 + 8 \\ x - 3y + mz + (m+3)t = m^2 + 2. \end{cases}$$

Giải. Hai hệ phương trình có nghiệm chung khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x - 3y + 2z + mt = 3 \\ 2x - 2y + 2z + (2m+3)t = m^2 + 6 \\ 3x - 5y + 2mz + (2m+8)t = 2m^2 + 8 \\ x - 3y + mz + (m+3)t = m^2 + 2. \end{cases}$$

Ta có: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & m & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 2m+3 & m^2+6 \\ 3 & -5 & 2m & 2m+8 & 2m^2+8 \\ 1 & -3 & m & m+3 & m^2+2 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & m & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 3 & m^2 \\ 0 & 4 & 2m-6 & 8-m & 2m^2-1 \\ 0 & 0 & m-2 & 3 & m^2-1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & m & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 3 & m^2 \\ 0 & 0 & 2m-4 & 5-m & m^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 & m^2-1 \end{array}\right).$$

Vậy 2 hệ đã cho có nghiệm chung khi $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2. \end{array}\right.$

Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

2.1. Định nghĩa

2.2. Nghiệm cơ bản của hệ phương trình thuần nhất

2.3. Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

2.1. Định nghĩa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (II)$$

Đặt $O = (0_i)_{m \times 1}$, hệ (II) trở thành

$$\boxed{AX = O}$$

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- ***Chú ý***

i) Do $r(A) = r(\overline{A})$ nên hệ (II) luôn có nghiệm.

ii) Đặc biệt, hệ (II) luôn có nghiệm $X_0 = (0;\, 0; \ldots;\, 0)$.

Khi đó, X_0 được gọi là *nghiệm tầm thường* của (II).

▪ *Nhận xét*

- Khi $m = n$ và $\det A = 0$ thì (II) có ***vô số nghiệm***.
- Khi $m < n$ thì (II) có ***vô số nghiệm***.

Khi $m > n$, để biện luận số nghiệm của (II) ta dùng định lý Kronecker – Capelli.

- Khi $m = n$ và $\det A \neq 0$ thì (II) có **duy nhất** ***nghiệm tầm thường***.

VD 1. Tìm điều kiện tham số m để hệ phương trình sau có duy nhất nghiệm tầm thường

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 4x + (m+5)y + (m-3)z = 0 \\ 8x + 12y + (m-4)z = 0. \end{cases}$$

Giải. Hệ có duy nhất nghiệm tầm thường khi:

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & m+5 & m-3 \\ 8 & 12 & m-4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2m(m-1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \wedge m \neq 1.$$

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

VD 2. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y + z + 2t = 0 \\ x + y - z + mt = 0 \\ x + 7y - 5z - t = 0 \\ 2x - y + (m+2)t = 0 \\ 2x + 8y - 6z + (m-1)t = 0. \end{cases}$$

Giải. Ta có: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & m \\ 1 & 7 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & m+2 \\ 2 & 8 & -6 & m-1 \end{pmatrix}$

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & m-2 \\ 0 & 9 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & m-2 \\ 0 & 12 & -8 & m-5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & m-2 \\ 0 & 0 & -2 & m-2 \\ 0 & 0 & 0 & 3-3m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $m \neq 1$: $r(A) = 4 \Rightarrow$ hệ chỉ có nghiệm tầm thường.
- $m = 1$: $r(A) = 3 \Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm.

2.2. Nghiệm cơ bản của hệ phương trình thuần nhất

VD 3. Xét hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \quad (*). \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ $(*)$ trở thành $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

Vậy hệ $(*)$ có vô số nghiệm dưới dạng

$$\begin{cases} x_1 = -2\alpha_1 - 5\alpha_2 \\ x_2 = 3\alpha_2 \\ x_3 = \alpha_1 \\ x_4 = \alpha_2 \end{cases} \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}).$$

Khi đó, ta có các khái niệm sau

1) $X = (-2\alpha_1 - 5\alpha_2;\ 3\alpha_2;\ \alpha_1;\ \alpha_2)\ \ (\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R})$

được gọi là ***nghiệm tổng quát*** của hệ $(*)$.

2) Biến đổi nghiệm tổng quát, ta được

$X = \alpha_1(-2;\ 0;\ 1;\ 0) + \alpha_2(-5;\ 3;\ 0;\ 1)\ (\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R})$

Nghiệm $X_1 = (-2;\ 0;\ 1;\ 0)$ và $X_2 = (-5;\ 3;\ 0;\ 1)$

được gọi là ***nghiệm cơ bản*** của hệ $(*)$.

3) Hệ nghiệm $\{X_1,\ X_2\}$ được gọi là

hệ nghiệm cơ bản của $(*)$.

- **Tổng quát**

Khi $r(A) = r < n$ (số ẩn) thì hệ (II) có vô số nghiệm phụ thuộc vào $n - r$ tham số $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_{n-r}$.

Ứng với $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_{n-r}$ ta có $n - r$ nghiệm cơ bản

$$X_1,\ X_2, \ldots,\ X_{n-r}.$$

Hệ nghiệm $\{X_1,\ X_2, \ldots,\ X_{n-r}\}$ được gọi là

hệ nghiệm cơ bản của (II).

Khi đó, ta có nghiệm tổng quát

$$\boxed{X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_{n-r} X_{n-r}}$$

- ***Chú ý***

Nghiệm tầm thường không phải là nghiệm cơ bản.

VD 4. Tìm nghiệm tổng quát và nghiệm cơ bản của hệ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Giải. Ta có: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -5x_2 + 11x_3 = 0. \end{cases}$

Cho $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, suy ra nghiệm tổng quát của hệ là

$$X = \left(-\frac{7}{5}\alpha;\ \frac{11}{5}\alpha;\ \alpha \right) (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Cho $x_3 = 5$, ta được nghiệm cơ bản $X_1 = (-7;\ 11;\ 5)$.

VD 5. Tìm nghiệm tổng quát và nghiệm cơ bản của hệ

$$\begin{cases} x + \ \ y - \ \ z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0. \end{cases}$$

Giải. Hệ đã cho tương đương với $x + y - z = 0$.

Ta có:

$$X = (-\alpha;\ \alpha;\ 0) + (\beta;\ 0;\ \beta) = \alpha(-1;\ 1;\ 0) + \beta(1;\ 0;\ 1).$$

Vậy hệ có hai nghiệm cơ bản là:

$$X_1 = (-1;\ 1;\ 0) \text{ và } X_2 = (1;\ 0;\ 1).$$

Suy ra nghiệm tổng quát của hệ là

$$X = (\beta - \alpha;\ \alpha;\ \beta)\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

- ***Chú ý***

Nghiệm cơ bản của hệ là không duy nhất,

Để tránh các nghiệm cơ bản ở dạng phân số,

ta có thể chọn ẩn phụ và tham số thích hợp

khi tìm nghiệm cơ bản.

2.3. Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính (tham khảo)

Xét hệ ***tuyến tính tổng quát*** và ***tuyến tính thuần nhất*** đều có vô số nghiệm như sau

$$AX = B \ (I) \text{ và } AX = O \ (II)$$

trong đó

$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ X = (x_j)_{n\times 1},\ B = (b_i)_{m\times 1},\ O = (0_i)_{m\times 1}$$

$$\text{và } r(A) = r(\overline{A}) < n.$$

Bài 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

- **Định lý**

Nếu ***X*** *là* ***nghiệm tổng quát*** *của hệ (II) và* $\boldsymbol{X_0}$ *là* ***một nghiệm riêng*** *của hệ (I) thì* $\boldsymbol{X + X_0}$ *là* ***nghiệm tổng quát*** *của hệ (I).*

VD 6. Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z - 2t = 3 \\ x - y - z + \ \ t = 1 \end{cases} \quad (*)$$

Giải. Xét hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} x + y + z - 2t = 0 \\ x - y - z + \ \ t = 0 \end{cases} \quad (**).$$

Hệ $(**)$ có hai nghiệm riêng

$$X_1 = (0;\ 1; -1;\ 0),\ X_2 = (1;\ 1;\ 2;\ 2)$$

và nghiệm tổng quát là $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2.$

Mặt khác, hệ $(*)$ có một nghiệm riêng là

$$X_0 = (0;\ 0; -5; -4).$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ $(*)$ là

$$\begin{cases} x = \alpha_2 \\ y = \alpha_1 + \alpha_2 \\ z = -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5 \\ t = 2\alpha_2 - 4 \end{cases} (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}).$$

....