A. PHẦN MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Toán học là một trong những môn học cơ bản mang tính trừu tượng, khái quát, nhưng mô hình ứng dụng của nó rất rộng rãi và gần gũi trong mọi lĩnh vực của đời sống xã hội, trong khoa học và ứng dụng.

Bộ môn đại số tuyến tính nâng cao được xuất phát từ môn đại số tuyến tính, là một trong những môn khó của chương trình giảng dạy chuyên ngành toán, và là một môn học có tác dụng rất lớn trong việc rèn luyện tư duy logic và khả năng sáng tạo cho người học.

Đại số tuyến tính nâng cao là môn học quan trọng đối với sinh viên ngành Toán cũng như sinh viên ngành kỹ thuật khác. Nó có ứng dụng to lớn vào đời sống xã hội. Chính vì lẽ đó mà môn Đại số tuyến tính trở thành một môn thi quan trọng trong các kì thi Olympic Toán hằng năm ở nước ta và một số nước trên thế giới. Đại số tuyến tính nâng cao là học phần tạo cho tôi nhiều hứng thú khi học. Đại số tuyến tính nâng cao gồm nhiều vấn đề nhưng tôi đặc biệt quan tâm đến các vấn đề liên quan đến ma trận. Được sự gợi ý của Giáo viên hướng dẫn tôi đã chọn đề tài: **"Một số phương pháp tính lũy thừa bậc cao của ma trận vuông."**

2. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu lý thuyết về ma trận

Nghiên cứu một số phương pháp tính lũy thừa bậc cao của ma trận vuông

3. Phương pháp nghiên cứu

Thu thập tài liệu từ giáo trình, sách, vở, các trang web online.

Phân tích, tổng hợp, sắp xếp lại một cách thích hợp.

Trao đổi với Giáo viên hướng dẫn.

4. Nội dung nghiên cứu

Đề tài gồm 2 chương

Chương 1: Các kiến thức cơ sở áp dụng khi thực hiện các phép toán trên ma trận được nhắc đến trong đề tài.

Chương 2: Nội dung của chương cũng là nội dung chính của đề tài. Trong chương này chúng tôi phân loại được một cách tương đối phương pháp tính lũy thừa bậc cao của ma trận vuông.

2.1 Phương pháp tính trực tiếp

2.2 Phương pháp quy nạp toán học

2.3 Sử dụng nhị thức Newton

2.4 Chéo hóa ma trận

2.5 Sử dụng định lí Caley-Hamilton

2.6 Đưa về dạng chuẩn Jordan

B. PHẦN NỘI DUNG

Chương 1: MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ SỞ

1.1. Định nghĩa ma trận

1.1.1 Định nghĩa

Một bảng gồm mn số a_{ij} thuộc trường K viết như sau

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là một ma trận kiểu (m, n). Mỗi số a_{ij} được gọi là một thành phần của ma trận. Các số a_{i1}, a_{i2},…, a_{in} lập thành dòng thứ i; các số a_{1j}, a_{2j},…, a_{mj} lập thành cột thứ j của ma trận.

Ta thường kí hiệu ma trận bởi các chữ A, B,…

Hay kí hiệu đơn giản bởi A = $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ trong đó i=1,2,…,m chỉ số dòng và j=1,2,…,n chỉ số cột.

Ma trận vuông

Trong trường hợp số dòng và số cột của hai ma trận bằng nhau thì ta có khái niệm *ma trận vuông*. Ký hiệu tập các ma trận vuông là M(n; K), với n là cấp của ma trận vuông.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Trong ma trận vuông các phần tử $a_{11},a_{22},...,a_{nn}$ là các phần tử nằm trên đường chéo chính, các phần tử $a_{n1},a_{(n-1)2},...,a_{1n}$ là các phần tử nằm trên đường chéo phụ.

Ví dụ

$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ là ma trận vuông cấp hai

$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 7\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp 3.

Phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận A là 1; 4. Phần tử nằm trên đường chó chính của ma trận B là 1, 5, 9.

Ma trận dòng, ma trận cột

Nếu m = 1 thì ma trận chỉ có một dòng, được gọi là *ma trận dòng*. Tương tự, nếu n = 1 thì ta có ma trận chỉ có một cột, được gọi là *ma trận cột*.

Ma trận dòng và ma trận cột thường được gọi là *vectơ dòng* và *vectơ cột.*

Một số thuộc trường K được gọi là ma trận một dòng, một cột.

Ví dụ

Ma trận dòng: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$

Ma trận cột $B=\begin{bmatrix}1\\ 5\\ 7\end{bmatrix}$

1.1.2 Một số dạng ma trận đặc biệt

a) Ma trận không

Ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là *ma trận không*. Ta dùng số θ để biểu thị cho mọi ma trận không cấp m x n.

Ví dụ

Ma trận θ cấp 2x3: $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

b) Ma trận chéo

Ma trận vuông có các phần tử ngoài đường chéo chính đều bằng 0 và các phần tử trên đường chéo chính khác không được gọi là *ma trận chéo (hay ma trận đường chéo)*. Ma trận chéo cấp n có dạng

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \left(a_{ii} \neq 0, \forall i : \overline{1,n}\right)$$

Ví dụ

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Nhận xét. Ma trận đường chéo thường được ký hiệu bởi $\text{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$ với các phần tử trên đường chéo chính là $a_1, a_2, ..., a_n$

c) Ma trận đơn vị

Trong $Mat_n(K)$, ma trận

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad (a_{ij}) = \delta_{ij} = \left[\begin{array}{l} 0\ khi\ i \neq j \\ 1\ khi\ i = j \end{array}\right.$$

có tính chất:

IA = A = AI, với mọi A $\in Mat_n(K)$.

Ma trận I được gọi là ma trận đơn vị.

Ở đây δ_{ij} được gọi là kí hiệu Kronecker nó bằng 0 khi i $\neq$ j và bằng 1 khi i = j.

d) Ma trận bậc thang

Ma trận A được gọi là ma trận bậc thang nếu dòng k bằng 0 thì dòng k + 1 cũng bằng 0 hoặc phần tử khác 0 đầu tiên ở cột h và phần tử đầu tiên ở cột k thì h < k

Ví dụ

Ma trận $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 12 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận bậc thang có ba dòng khác 0.

e) Ma trận tam giác

Ma trận có các phần tử ở trên (hoặc dưới) đường chéo chính bằng 0 được gọi là *ma trận tam giác* nghĩa là $a_{ij} = 0$ với mọi j < i hoặc với mọi i < j, tức có dạng:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ trong đó $a_{ij} = 0$ khi i > j được gọi là *ma trận tam giác trên.*

Ví dụ

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ là ma trận tam giác trên

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & ... & 0 \\ b_{21} & b_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{bmatrix}$ trong đó $b_{ij} = 0$ khi i < j được gọi là *ma trận tam giác dưới.*

Ví dụ

$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận tam giác dưới.

Nhận xét. Ma trận tam giác trên và ma trận tam giác dưới được gọi chung là *ma trận tam giác.*

f) Ma trận chuyển vị

Định nghĩa. Giả sử ta có ma trận

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

thì ma trận $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ được gọi là ma trận chuyển vị của ma trận A

được kí hiệu bởi A^T. A^T là ma trận kiểu (n, m)

Như vậy, A^T là ma trận nhận được bằng cách đổi dòng của ma trận A thành cột

Ví dụ

Ma trận $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ thì ma trận chuyển vị của ma trận A là

$$A^T=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Định lý. *Cho các ma trận $A,B\in M_{m\text{x}n}(K)$. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

$\left(A^T\right)^T = A$.

$A^T = B^T \Leftrightarrow A = B$

g) Ma trận đối xứng – Ma trận phản đối xứng

Nếu ma trận vuông A thỏa $A^T = A$ thì ta nói A là *ma trận đối xứng*.

Nếu A là ma trận đối xứng thì $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = \overline{1,n}$

Ví dụ

Ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ là một ma trận đối xứng cấp 3.

Ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận đối xứng cấp 4.

Nếu ma trận vuông A thỏa $A^T = -A$ thì *A ma trận phản đối xứng*.

Nếu A là ma trận phản xứng thì $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j = \overline{1,n}$, từ đây suy ra $a_{ii} = 0$ (các phần tử trên đường chéo chính bằng 0).

Ví dụ

Ma trận $B=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & -5 & 1 \\ -3 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận phản đối xứng.

Nếu A là ma trận đối xứng thì $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = \overline{1,n}$

1.2. Các tính chất của các phép toán trên ma trận

Với $A, B, C \in M_{m\text{x}n}(K)$ *và* $\lambda, \mu \in K$ *ta có:*

$A + B = B + A$

$(A + B) + C = A + (B + C)$

$\theta + A = A + \theta = A$

$A + (-A) = (-A) + A = \theta$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

$A(B+C) = AB + AC$

$A(BC) = (AB)C$

$(AB)^T = B^T A^T$

$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

$(A^T)^T = A$

$A^T = B^T \Leftrightarrow A = B$

$(aA)^T = a(A)^T$

1.3. Ma trận bậc cao

Định nghĩa. Cho ma trận A, *lũy thừa bậc k* của ma trận A là: $A^k = \underbrace{A.A...A}_{k\ \text{lần}}$

Cụ thể, $A^0 = I_n;\ A^1 = A;\ A^2 = A.A;\ ...;\ A^k = A^{k-1}.A$

Nhận xét. Có những ma trận khác ma trận không nhưng lũy thừa k lần với $k \in \mathbb{N}$ sẽ thành ma trận không.

Một ma trận $A \in M(n, K)$ thỏa tính chất tồn tại một số $k \in \mathbb{N}$, sao cho $A^k = 0$ thì khi đó ma trận A được gọi là *ma trận lũy linh*.

Một ma trận $A \in M(n;K)$ thỏa tính chất $A^2 = 0$ thì khi đó ma trận A được gọi là *ma trận lũy đẳng.*

Tính chất

Cho $A \in M(n;K)$ và $r, s \in \mathbb{N}$**,** khi đó:

$(0)^r = 0;$

$(I_n)^r = I_n$

$A^{r+s} = A^r.A^s$

$A^{rs} = (A^r)^s$

1.4. Chéo hóa ma trận

Định nghĩa. Ma trận vuông $A=(a_{ij})$ cấp n được gọi là ma trận chéo nếu $a_{ij}=0$ với i ≠ j; tức có dạng

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ta nói ma trận A chéo hóa được nếu nó đồng dạng với một ma trận chéo.

Nhận xét. Ma trận vuông A chéo hóa được nếu tồn tại một ma trận khả nghịch P và một ma trận đường chéo B để $A=PB\,P^{-1}$

Định lí 1. Ma trận vuông A chéo hóa được khi và chỉ khi A là ma trận của một phép biến đổi tuyến tính có một hệ vectơ riêng là cơ sở của không gian

Chứng minh

Coi A như ma trận của một phép biến đổi tuyến tính f : V → V đối với một cơ sở (ε) nào đó. A chéo hóa được khi và chỉ khi có một ma trận P sao cho

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & k_n \end{pmatrix}$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi có một cơ sở (ε') của V mà P là ma trận chuyển từ (ε) sang (ε') và B là ma trận của f đối với cơ sở (ε'). Khi đó mọi vectơ $\vec{\varepsilon}_i'$ của cơ sở (ε') đều thỏa mãn đẳng thức

$$f(\vec{\varepsilon}_i')=k_i\,\vec{\varepsilon}_i',\ i=1,...,n\ ;$$

tức là hệ cơ sở (ε') gồm những vectơ riêng của f

Hệ quả. Nếu đa thức đặc trưng $|A-kI|$ có n nghiệm phân biệt thì ma trận A chéo hóa được.

Định lí 2. Cho A là ma trận vuông cấp n trên K. Giả sử $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ là các giá trị riêng phân biệt của A và S_i là cơ sở của không gian vecto riêng $E_A(\lambda_i)$ với mọi i=1,2,…,n. khi đó $S=S_1\cup S_2\cup...\cup S_r$ độc lập tuyến tính trong K^n và A chéo hóa được nếu và chỉ nếu S chứa n vecto

Chứng minh

Giả sử $S_i = \{u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{ik}\}$ với $k\lambda_i = \dim_k E_A(\lambda_i)$ $(i = \overline{1,n})$

Muốn chứng minh S độc lập tuyến tính, ta giả sử:

$$\underbrace{a_{11}u_{11} + a_{12}u_{12} + ... + a_{ik_1}u_{ik_1}}_{u_1} + ... + \underbrace{a_{r1}u_{r1} + a_{r2}u_{r2} + ... + a_{rk_r}u_{rk_r}}_{u_r} = 0$$

Chú ý rằng $u_i = a_{i1}u_{i1} + a_{i2}u_{i2} + ... + a_{ik_i}u_{ik_i} \in E_A(\lambda_i)$ do đó u_i là vector riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ_i hoặc $u_i = 0$.

Do tập các vectơ riêng ứng với các giá trị riêng phân biệt là độc lập tuyến tính nên từ đẳng thức $u_1 + u_2 + ... + u_r = 0$ ta suy ra $u_i = 0$ với mọi i = 1, 2, …, r.

Do đó, $a_{i1}u_{i1} + a_{i2}u_{i2} + ... + a_{ik_i}u_{ik_i} = 0$.

Vì S_i là cơ sở của $E_A(\lambda_i)$ nên $a_{ij} = 0$ với mọi i = 1, 2, …r và j = 1, 2, …, k_i.

Vậy $S = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_r$ độc lập tuyến tính trong K^n.

Nếu S chứa n vector riêng độc lập tuyến tính. Nhóm các vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ_i vào S_i.

Chú ý rằng $S_i \cap S_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$.

Từ đó suy ra, $S = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_r$ chứa n vectơ riêng của ma trận *A*.

1.5. Dạng chuẩn tắc Jordan

Dạng chuẩn Jordan có thể được xem là dạng ma trận biểu diễn đơn giản nhất của một toán tử tuyến tính.

Định nghĩa. Ma trận đồng hành của đa thức

$$g = t^m + c_{m-1}t^{m-1} + ... + c_1 t + c_0$$

là ma trận

$$J_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{m-1} \end{pmatrix}$$

Ta cũng gọi nó là ô Jordan.

Nếu g là một đa thức bất khả qui bậc m và p là một số tự nhiên, thì ta nói ma trận vuông cấp mp có dạng ma trận khối sau đây là khối Jordan liên kết với g^p:

$$J_{g^p} = \begin{pmatrix} J_g & 0 & \dots & 0 & 0 \\ O_{1m} & J_g & \dots & 0 & 0 \\ 0 & O_{1m} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_g & 0 \\ 0 & 0 & \dots & O_{1m} & J_g \end{pmatrix}$$

trong đó 0 là các ma trận vuông θ cấp m và O_{1m} là ma trận vuông cấp m chỉ có phần tử (1, m) bằng 1, còn lại là toàn 0.

Định nghĩa. Ta nói ma trận vuông A là ma trận Jordan nếu nó là ma trận đường chéo khối $A = diag(A_1, A_2, ..., A_s)$, trong đó mỗi ma trận vuông A_i trên đường chéo là một khối Jordan liên kết với lũy thừa của một đa thức bất khả qui.

Định nghĩa. Ta gọi ma trận Jordan đồng dạng với ma trận vuông A là dạng chuẩn tắc Jordan của A

Định lí. Cho f là toán tử tuyến tính tùy ý. Giả sử đa thức cực tiểu của nó có dạng $g_f = g_1^{p_1} ... g_r^{p_r}$ trong đó $p_1, ..., p_r \geq 1$ và $g_1, ..., g_r$ là những đa thức bất khả qui khác nhau. Khi đó, f có ma trận biểu diễn là ma trận Jordan. Hơn nữa, mọi ma trận vuông A đều có dạng chuẩn tắc Jordan và dạng chuẩn tắc Jordan xác định duy nhất, nếu không kể thứ tự các khôi Jordan. Cụ thể nếu kí hiệu S_{ik} là số các khối

Jordan của đa thức $g_i^k\,(i=\overline{1.r}, 1\le k\le p_i)$ xuất hiện trong dạng chuẩn Jordan thì:

$$S_{ik}=\frac{1}{\deg g_i}\left[rank g_i^{k-1}(A)-2rank g_i^k(A)+rank g_i^{k+1}(A)\right]$$

Ví dụ

Các ma trận chéo (nói riêng: ma trận không, ma trận đơn vị) đều là các ma trận chuẩn tắc Jordan.

Ma trận

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$ là một ma trận chuẩn tắc Jordan.

CHƯƠNG 2: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH LŨY THỪA BẬC CAO CỦA MA TRẬN VUÔNG

2.1. Phương pháp tính trực tiếp

Phân tích ma trận về các ma trận đặc biệt như ma trận đơn vị, ma trận không

Cho ma trận $A \in M(m, K)$

Mệnh đề. Với 2 số n, k nguyên dương thì tồn tại duy nhất 2 số nguyên dương q và r sao cho $n = kq + r$, $\left(0 \le r \le k\right)$

Tính $A^n = (A^k)^q A^r$

Tìm k sao cho $\left[\begin{array}{l} A^k = 0 \\ A^k = \pm I \end{array}\right.$

$$\Rightarrow A^n = (A^k)^q A^r = \left[\begin{array}{l} \quad 0 \\ (\pm I)^q A^r \end{array}\right.$$

Ví dụ 1. Tính $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2014}$

Giải

Đặt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Ta thấy $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Lại có 2014 = 4.503 + 2

$$\Rightarrow A^{2014} = (A^4)^{503} A^2 = (I)^{503} A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 2. Trong $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ cho $A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{1} \end{pmatrix}$, tính A^{2014}

Giải

Ta có $A^3 = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^{2014} = (A^3)^{671} A = A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

Ví dụ 3. Tìm tất cả ma trận $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sao cho $A^n=\begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Giải

Ta thấy $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ là một ma trận cần tìm.

Vì $A^n=\begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}$ đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow A^n=\begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}$ đúng với n = 2

Khi đó ta có: $A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=a^2 \\ b(a+d)=b^2 \\ c(a+d)=c^2 \\ bc+d^2=d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc=0 \\ b(a+d-b)=0 \\ c(a+d-c)=0 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $c \neq 0$

Từ hệ phương trình ta có: $\begin{cases} b=0 \\ a+d-c=0 \end{cases}$

Từ đẳng thức

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ c(a+d) & d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ ac(a+d)+d^2c & d^3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow c^3=ac(a+d)+d^2c$

Từ $a+d-c=0$ ta có $c=a+d$ thay vào phương trình trên ta được:
$(a+d)^3=a(a+d)+d^2(a+d) \Rightarrow ad=0$

Nếu $a=0$ ta có $\begin{cases} b=0 \\ d=c\neq 0 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{pmatrix}, c\neq 0$

Nếu $d=0$ ta có $\begin{cases} b=d=0 \\ a=c\neq 0 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} c & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, c\neq 0$

Trường hợp 2: $b \neq 0$

Tương tự trường hợp 1 ta có: $A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix}, b\neq 0$ hoặc $A=\begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b\neq 0$

Trường hợp 3: $b=c=0$

$\Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

Thử lại 5 trường hợp đều thỏa

Vậy các ma trận cần tìm là

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} c & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Ví dụ 4. Cho ma trận

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tính $A^n, n\in \mathbb{N}^*$

Giải

Ta thấy $A^4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nên $\Rightarrow A^n=0, \forall n\geq 4$

Vậy $A^n=\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, n=2 \\ 0, n\geq 4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, n=3 \end{cases}$

2.2. Phương pháp quy nạp toán học

Bước 1: Tính các lũy thừa $A^2,\ A^3,\ A^4,\ldots$

Bước 2: Dự đoán công thức tổng quát A^n

Bước 3: Sử dụng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh công thức đã dự đoán ở bước 2.

Ví dụ 1. Cho $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, tính A^n

Giải

Ta có $A^2=\begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & \dfrac{b\left(a^2-c^2\right)}{a-c} \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$

Dự đoán $A^n=\begin{pmatrix} a^n & \dfrac{b\left(a^n-c^n\right)}{a-c} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$

Chứng minh công thức bằng quy nạp toán học

Với n = 2, ta có $A^2=\begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & \dfrac{b\left(a^2-c^2\right)}{a-c} \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$, (đúng)

Giả sử công thức đúng với n = k, ($k\in N^*$), tức là $A^k=\begin{pmatrix} a^k & \dfrac{b\left(a^k-c^k\right)}{a-c} \\ 0 & c^k \end{pmatrix}$

Ta chứng minh công thức đúng với n = k + 1, ($k\in \mathbb{N}^*$), nghĩa là:

$$A^{k+1}=\begin{pmatrix} a^{k+1} & \dfrac{b\left(a^{k+1}-c^{k+1}\right)}{a-c} \\ 0 & c^{k+1} \end{pmatrix}$$

Thật vậy, ta có:

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix} a^k & \dfrac{b\left(a^k-c^k\right)}{a-c} \\ 0 & c^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa^k & a^kb+\dfrac{bc\left(a^k-c^k\right)}{a-c} \\ 0 & cc^k \end{pmatrix}$$

Vậy $A^n=\begin{pmatrix} a^n & \dfrac{b\left(a^n-c^n\right)}{a-c} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$

Ví dụ 2. Cho $A=\begin{pmatrix}2&0&3&-7\\0&2&8&4\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$. Tính $A^n, \forall n\in \mathbb{N}^*$

Giải

Đặt $B=\begin{pmatrix}3&-7\\8&4\end{pmatrix}$ $\quad I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad 0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}2I&B\\0&2I\end{pmatrix}$

Ta thấy: $\quad A^2=\begin{pmatrix}2^2I&2.2B\\0&2^2I\end{pmatrix}$ $\quad A^3=\begin{pmatrix}2^3I&2^2.3B\\0&2^3I\end{pmatrix}$

Dự đoán: $A^n=\begin{pmatrix}2^nI&2^{n-1}.nB\\0&2^nI\end{pmatrix}$

Ta chứng minh công thức dự đoán bằng quy nạp toán học

Với n = 1. Ta có $A=\begin{pmatrix}2I&B\\0&2I\end{pmatrix}$, (đúng)

Giả sử công thức đúng với n = k ($k\in \mathbb{N}^*$), tức $A^k=\begin{pmatrix}2^kI&2^{k-1}.kB\\0&2^kI\end{pmatrix}$

Ta chứng minh công thức đúng với n = k + 1, ($k\in \mathbb{N}^*$), nghĩa là:

$$A^{k+1}=\begin{pmatrix}2^{k+1}I&2^k(k+1)B\\0&2^{k+1}I\end{pmatrix}$$

Thật vậy, ta có

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix}2^kI&2^{k-1}kB\\0&2^kI\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2I&B\\0&2I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{k+1}I&2^k(k+1)B\\0&2^{k+1}I\end{pmatrix}$$

Vậy $A^n=\begin{pmatrix}2^nI&2^{n-1}.nB\\0&2^nI\end{pmatrix}$, $\forall n\in \mathbb{N}^*$

Hay $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3n2^{n-1} & -7n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 8n2^{n-1} & 4n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Ví dụ 3. Cho $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, tính A^{2014}

Giải

Ta có $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} \cos 3x & -\sin 3x \\ \sin 3x & \cos 3x \end{pmatrix}$ $\quad A^4 = \begin{pmatrix} \cos 4x & -\sin 4x \\ \sin 4x & \cos 4x \end{pmatrix}$

Dự đoán $A^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$, $\forall n \in ¥^*$

Chứng minh bằng quy nạp

Với n = 1 $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ (đúng)

Giả sử công thức đúng với n = k, ($k \in ¥^*$)

Tức là $A^k = \begin{pmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{pmatrix}$

Ta chứng minh công thức đúng với n = k + 1 ($k \in ¥^*$)

Nghĩa là $A^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos(k+1)x & -\sin(k+1)x \\ \sin(k+1)x & \cos(k+1)x \end{pmatrix}$

Thật vậy $A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos kx.\cos x - \sin kx.\sin x & -\cos kx.\sin x - \sin kx.\cos x \\ \sin kx.\cos x + \cos kx.\sin x & \cos kx.\cos x - \sin kx \sin x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(k+1)x & -\sin(k+1)x \\ \sin(k+1)x & \cos(k+1)x \end{pmatrix}$$

Vậy $A^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$

Ví dụ 4. Cho ma trận

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, tính A^n với n nguyên dương

Giải

Ta tính được $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dự đoán $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Chứng minh công thức dự đoán bằng quy nạp toán học

$n = 1$, công thức đúng

Giả sử công thức đúng với $n = k, k \in \mathbb{N}^*$, tức là

Ta có $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \dfrac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Chứng minh công thức củng đúng với $n = k + 1$, tức là chứng minh

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \dfrac{(k+1)(k+2)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Thật vậy

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix}1 & k & \frac{k(k+1)}{2}\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & k+1 & \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Vậy $A^n=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n(n+1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\forall n\in \mathbb{N}^*$

2.3. Sử dụng nhị thức Newton

Giả sử A là ma trận vuông cấp k, tính lũy thừa bậc n của ma trận A với n nguyên dương.

Bước 1 : Phân tích A = B + C, trong đó BC = CB

(B, C là các ma trận tính lũy thừa dễ dàng)

Bước 2: Sử dụng công thức $A^n=(B+C)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB^{n-k}C^k$

Chú ý. Ma trận $\begin{pmatrix}a & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a & 0 & \ldots & 0\\ . & . & . & \ldots & .\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a\end{pmatrix}=aI_n$, giao hoán với mọi ma trận vuông cùng cấp.

Ví dụ 1. Tìm vết của ma trận $A^n, n\in \mathbb{N}^*$, biết $A=\begin{pmatrix}-1 & a & a\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

Giải

Ta thấy $A=-I_3+B$

Với $B=\begin{pmatrix}0 & a & a\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Ta có $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix}$ $\quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nên $B^k = 0, \forall k \geq 3$

Khi đó $A^n = (-I_3 + B)^n = C_n^o(-1)^n I_3 + C_n^1(-1)^{n-1}B + C_n^2(-1)^{n-2}B^2 + ... + C_n^n B^n$

$= C_n^o(-1)^n I_3 + C_n^1(-1)^{n-1}B + C_n^2(-1)^{n-2}B^2$

$$= (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -na & -na \\ -n & 1+\dfrac{n(n-1)a}{2} & \dfrac{n(n-1)a}{2} \\ n & \dfrac{-n(n-1)a}{2} & 1-\dfrac{n(n-1)a}{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow tr(A) = 3(-1)^n$

Ví dụ 2. Tìm tổng các phần tử trên đường chéo phụ của ma trận A^n, biết

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Giải

Ta có $A = 3I_3 + B$ với $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nên $B^k = 0, \forall k \geq 3$

Khi đó $A^n = (3I_3 + B)^n = C_n^o 3^n I_3 + C_n^1 3^{n-1}B + C_n^2 3^{n-2}B^2 + ... + C_n^n B^n$

$= C_n^o 3^n I_3 + C_n^1 3^{n-1}B + C_n^2 3^{n-2}B^2$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 3^n - 2.3^{n-1}C_n^1 + 4.3^{n-2}C_n^2 & 3^{n-1}C_n^1 + 4.3^{n-2}C_n^2 & 3^{n-1}C_n^1 \\ -2.3^{n-1}C_n^1 + 4.3^{n-2}C_n^2 & 3^n + 3^{n-1}C_n^1 - 4.3^{n-2}C_n^2 & 3^{n-1}C_n^1 \\ 2.3^{n-1}C_n^1 + 4.3^{n-2}C_n^2 & -3^{n-1}C_n^1 - 4.3^{n-2}C_n^2 & 3^{n-1}C_n^1 + 3^n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Tổng các phần tử trên đường chéo phụ là $4.3^{n-1}C_n^1 + 3^n$

Ví dụ 3. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, tính $A^n, n \in \mathbb{N}^*$

Giải

ta có $A = I_3 + B$ với $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ta có $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

nên $B^k = 0, \forall k \geq 3$

Khi đó $A^n = (I_3 + B)^n = C_b^0 1^n I_3 + C_n^1 1^{n-1} B + C_n^2 1^{n-2} B^2 + ... + C_n^n B^n$

$$= C_n^0 I_3 + C_n^1 B + C_n^2 B^2 = \begin{pmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 \\ 0 & 1 & C_n^1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 4. Cho ma trận

$A = \begin{pmatrix} 2006 & 1 & -2006 \\ 2005 & 2 & -2006 \\ 2005 & 1 & -2005 \end{pmatrix}$, xác định tổng các phần tử trên đường chéo chính của ma trận $S = I + A + A^2 + ... + A^{2006}$.

Giải

Ta có $A = I_3 + B$ với $B = \begin{pmatrix} 2005 & 1 & -2006 \\ 2005 & 1 & -2006 \\ 2005 & 1 & -2006 \end{pmatrix}$

Ta tính được $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nên $\Rightarrow B^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \forall k \geq 2$

$A^n = (I_3 + B)^n = I_3 + C_n^1 B = I_3 + nB, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Khi đó $S = I + A + A^2 + ... + A^{2006}$

$= I + (I + B) + (I + 2B) + ... + (I + 2006B)$
$= 2007I + (1 + 2 + ... + 2006)B = 2007I + Tr(1003.2007B)$
$= 2007Tr(I) + 1003.2007Tr(B) = 3.2007 + 0 = 6021$

2.4. Chéo hóa ma trận

Lý thuyết chéo hóa ma trận được ứng dụng khá nhiều trong việc giải quyết các bài toán liên quan đến ma trận.

Chú ý: Phương pháp này được dùng khi A là ma trận chéo hóa được hoặc A có thể tách thành $A = PBP^{-1}$ (B là ma trận tính lũy thừa dễ dàng).

Phương pháp

Bước 1: Chéo hóa ma trận A.

$A = PBP^{-1}$ trong đó B là ma trận dạng chéo và P là ma trận làm chéo hóa A

Bước 2 : Tính lũy thừa của A theo công thức

$A^n = PB^nP^{-1}$

Thuật toán chéo hóa ma trận A cấp n

Cho ma trận $A \in M_n(\mathrm{K})$. Để chéo hóa ma trận A (nếu có thể) ta có thuật toán chéo hóa như sau

Bước 1: Lập và giải phương trình đặc trưng của A

$$f(\lambda) = |A - \lambda I_n| = 0 \quad (1)$$

(1) Vô nghiệm thì A không chéo hóa được
(1) Có nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ với số bội tương ứng $k_1, k_2, ..., k_r$

Bước 2: Nếu $k_1 + k_2 + ... + k_r \neq n$ thì A không chéo hóa được

Nếu $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$ thì chuyển sang bước 3

Bước 3: Với mỗi giá trị riêng λ_i ta tính được $r(A - \lambda I_n) = r_i$ (lúc đó $\dim E(\lambda_i) = n - r_i$ với mọi $i = 1,2,...,r$)

+ Nếu tồn tại ít nhất λ_i mà $\dim E(\lambda_i) < n_i$ thì A không chéo hóa được.

+ Nếu $\dim E(\lambda_i) = n_i$ với mọi $i = 1,2,...,r$ thì A chéo hóa được.

Với mọi λ_i, tìm một cơ sở của không gian con riêng $E(\lambda_i)$, với mọi $i = 1,2,...,r$. Sau đó lập ma trận P mà các cột lần lượt là các vectơ cơ sở của không gian con riêng $E(\lambda_i)$ thì P là ma trận làm chéo hóa. Khi đó $B = P^{-1}AP$ là ma trận chéo mà các phần tử trên đường chéo chính lần lượt là các giá trị riêng của A (giá trị riêng λ_i sẽ xuất hiện n_i lần, $i=1,2,\ldots,r$)

Ma trận dạng chéo (hay ma trận đồng dạng) của A là:

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},\ \lambda_i(i=\overline{1,n})$$

Hiển nhiên, ta được: $A=PBP^{-1}$

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta chứng minh

$A^n=PB^nP^{-1}$, $(n\in N^*)$

Dễ thấy, $B^n=\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$, $(n\in N^*)$

Ví dụ 1. Cho ma trận $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Tính A^k, $k\in \mathbb{N}^*$

Giải

Gọi λ là giá trị riêng của A và $\alpha=(x_1,x_2)$ là vectơ riêng tương ứng với λ, λ thỏa: $|A-\lambda I|=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=1 \\ \lambda=2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ A chéo hóa được

$\Rightarrow$ Ma trận dạng chéo $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Thay lần lượt λ_1,λ_2 vào $[A-\lambda I]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0$

Ta có các vectơ riêng dạng tổng quát: $\alpha_1 = (a, a)$ và $\alpha_2 = (0, b)$ $(a, b \in \mathbb{R}^*)$

Cho a = b = 1 $\Rightarrow \alpha_1 = (1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1)$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vậy $A^k = PB^kP^{-1}$

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-2^k & 2^k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-2^k & 2^k \end{pmatrix}, \ (k \in \mathbb{N}^*)$$

Ví dụ 2. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

chứng minh rằng $A^n \notin n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Giải

Ta có thể chứng minh bằng quy nạp.

Ở đây, ta áp dụng phương pháp chéo hóa ma trận để chứng minh.

Gọi λ là giá trị riêng của A và $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ là vectơ riêng tương ứng với λ

Giải phương trình đặc trưng A: $|A - \lambda I| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \end{array}\right.$$

$\lambda = 0 \Rightarrow$ vectơ riêng $\alpha_1 = (1, 1, -2)$

$\lambda = 1 \Rightarrow$ vectơ riêng $\alpha_2 = (1, 0, -1)$, $\alpha_3 = (0, 1, 0)$

$\Rightarrow$ A chéo hóa được

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Và $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Như vậy $A^n = PB^nP^{-1} = PBP^{-1}$ (vì $B^n = B$)

Vậy $A^n \notin n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (đpcm).

Ví dụ 3. Cho ma trận

$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, tính $A^n (n \in \mathbb{N}^*)$

Giải

Gọi λ là giá trị riêng của A và $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ là vectơ riêng ứng với λ, λ thỏa: $|A - \lambda I| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = -4 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ A chéo hóa được

$\Rightarrow$ ma trận dạng chéo $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Các vectơ riêng tương ứng $\alpha_1 = (a, 0, 3a) = a(1, 0, 3)$

$\alpha_2 = (-3b, -2b, b) = b(-3, -2, 1)$

$\alpha_3 = (-3c, 5c, c) = c(-3, 5, 1), (a, b, c \in \mathbb{R}^*)$

Hệ vectơ độc lập tuyến tính.

Ta đặt $P=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có $B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PBP^{-1} \Rightarrow A^n = PB^nP^{-1}$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-7}{20} & \frac{-3}{10} & \frac{9}{20} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{10} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-7}{20} + \frac{9}{4}3^n - \frac{9}{10}(-4)^n & \frac{3}{10} + \frac{3}{2}3^n - \frac{6}{5}(-4)^n & \frac{3}{10} - \frac{3}{14}3^n - \frac{3}{35}(-4)^n \\ \frac{-3}{2}3^n + \frac{3}{2}(-4)^n & -3^n + 2(-4)^n & \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}(-4)^n \\ \frac{-21}{20} + \frac{3}{4}3^n + \frac{3}{10}(-4)^n & \frac{-9}{10} + \frac{1}{2}3^n + \frac{2}{5}(-4)^n & \frac{27}{20} - \frac{1}{4}3^n - \frac{1}{10}(-4)^n \end{pmatrix}$$

Ví dụ 4. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$$, tính A^{2014}

Giải

Gọi λ là giá trị riêng của A và $\alpha = (x_1, x_2)$ là vectơ riêng tương ứng với λ, λ thỏa: $|A - \lambda I| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) - \lambda & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ A chéo hóa được

$\Rightarrow$ Ma trận dạng chéo $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$

Các vectơ riêng tương ứng là $\alpha_1 = (2 - i, 1), \alpha_1 = (2 + i, 1)$

Ta đặt $P = \begin{pmatrix} 2-i & 2+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có $B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PBP^{-1} \Rightarrow A^n = PB^nP^{-1}$

Lại có $B=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B^{2014}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}$

Khi đó $A^{2014}=PB^{2014}P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\sqrt{3} & \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

2.5. Sử dụng định lí Caley-Hamilton

Định lí. Cho A là ma trận vuông cấp n. Đa thức đặc trưng của A bậc n là định thức $P_{(A)}(\lambda)=|A-\lambda I_n|$. Khi đó $P_{(A)}(A)=0$

Chứng minh

$+|A-\lambda I_n|=0\Rightarrow P_{(A)}(\lambda)=0\Rightarrow P_{(A)}(A)=0$

$+|A-\lambda I_n|\neq 0\Rightarrow A-\lambda I_n$ khả nghịch và $(A-\lambda I_n)^{-1}=\dfrac{1}{|A-\lambda I_n|}D=\dfrac{1}{P_{(A)}(\lambda)}D$

Với D là ma trận phụ hợp của ma trận $A-\lambda I_n$

Ta có $(A-\lambda I_n)^{-1}(A-\lambda I_n)=I_n\Rightarrow\dfrac{1}{P_{(A)}(\lambda)}D(A-\lambda I_n)=I_n$

Vì ma trận D có các phần tử là đa thức của λ có bậc nhỏ hơn n nên ta có thể viết D dưới dạng $D=D_{n-1}\lambda^{n-1}+D_{n-2}\lambda^{n-2}+...+D_1\lambda+D_0$ (*)

Trong đó $D_0,D_1,...,D_{n-1}$ là các ma trận vuông cấp n với phần tử trong trường K.

Giả sử $P_{(A)}(\lambda)=(-1)^n(a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0)$ (**)

Thay (*), (**) vào (1) ta được

$$\begin{cases} AD_0 = (-1)^n a_0 I_n \\ AD_1 - D_0 = (-1)^n a_1 I_n \\ \ldots \\ AD_{n-1} - D_{n-2} = (-1)^n a_{n-1} I_n \\ -D_{n-1} = (-1)^n a_n I_n \end{cases}$$

Nhân các đẳng thức trên lần lượt với $I_n, A, \ldots, A^n$

$$\begin{cases} AD_0 = (-1)^n a_0 I_n \\ A^2 D_1 - AD_0 = (-1)^n a_1 A \\ \ldots \\ A^n D_{n-1} - A^{n-1} D_{n-2} = (-1)^n a_{n-1} I A^{n-1} \\ -A^n D_{n-1} = (-1)^n a_n A^n \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta được

$$(-1)^n a_0 I_n + (-1)^n a_1 A + \ldots + (-1)^n a_{n-1} A^{n-1} + (-1)^n a_n A^n$$
$$= AD_0 + A^2 D_1 - AD_0 + \ldots + A^n D_{n-1} - A^n D_{n-2} + A^n D_{n-1}$$
$$= 0$$
$$\Rightarrow P_{(A)}(A) = 0$$

Vậy ta được đpcm

Phương pháp

Cho $f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$, tính $f(A)$ với A là ma trận vuông cấp k.

Bước 1: Lập đa thức đặc trưng của A và tìm các giá trị riêng của A. Giả sử A có λ_i giá trị riêng tương ứng với bội $\alpha_i, i = \overline{1,r}$

Khi đó: $P_{(A)}(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{\alpha_r}$

Bước 2: Lấy $f(\lambda)$ chia cho $P_{(A)}(\lambda)$ giả sử được thương $Q(\lambda)$ dư $R(\lambda)$

Khi đó: $f(\lambda) = P_{(A)}(\lambda)\, Q(\lambda) + R(\lambda)$

$\Rightarrow f(A) = P(A)Q(A) + R(A) = R(A)$

Vì theo định lí Caley-Hamilton $P_{(A)}(A) = 0$

Cách tìm đa thức dư $R(\lambda)$

Ta có: $0 \le \deg R(\lambda) \le n-1$

Giả sử $R(\lambda) = b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + b_1\lambda + b_0$

Các hệ số $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ là nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} f(\lambda_i) = R(\lambda_i),\ i = \overline{1,r} \\ f^{j_1}(\lambda_i) = R^{j_1}(\lambda_i),\ j_1 = \overline{1,\alpha_1 - 1} \\ \quad\ldots \\ f^{j_r}(\lambda_r) = R^{j_r}(\lambda_r),\ j_r = \overline{1,\alpha_r - 1} \end{cases}$$

Lưu ý. Cách tìm A^k là trường hợp đặc biệt của tính $f(A)$

Với $f(\lambda) = \lambda^k \Rightarrow A^k = f(A)$

Ví dụ 1. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, tính $f(A)$ biết

$f(x) = 2009x^{2009} - 2008x^{2008} + \ldots + x$

Giải

Đa thức đặc trưng của A: $P_A(x) = -x^2(x-1)$

Lấy $f(x)$ chia cho $P_{(A)}(x)$ giả sử được thương $Q(x)$ và dư $R(x)$

Khi đó $f(x) = P_{(A)}(x)Q(x) + R(x)$

Giả sử $R(x) = ax^2 + bx + c$, với $a, b, c \in \mathbb{R}$

Ta có

$$\begin{cases} f(0) = R(0) \\ f(1) = R(1) \\ f'(0) = R'(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 1005 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1004 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Suy ra $R(x) = 1004x^2 + x$

Theo định lí Caley-Hamilton $P_{(A)}(A) = 0$

Do đó $f(A) = R(A) = 1004A^2 + A = \begin{pmatrix} 3016 & -3017 & 1006 \\ 3017 & -3019 & 1007 \\ 3018 & -3021 & 1008 \end{pmatrix}$

Ví dụ 2. Cho $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$. Tính A^n với $n\in ¥^*$

Giải

Đa thức đặc trưng của A: $P_{(A)}(t) = (t+2)^2$

Xét $f(t) = t^n$.

Giả sử, $f(t) = P_{(A)}(t)\ S(t) + at + b$ (1)

Khi đó, $A^n = aA + bI$

Từ (1) thay t = -2, ta được $(-2)^n = -2a + b$ (2)

Đạo hàm 2 vế của (1) rồi thay t = -2, ta được $n(-2)^{n-1} = a$ (3)

Từ (2),(3) $\Rightarrow b = (1-n)(-2)^n$

Vậy $A^n = n(-2)^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 5\end{pmatrix} + (1-n)(-2)^n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Ví dụ 3. Cho $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$, tính A^n với $n\in N^*$

Giải

Đa thức đặc trưng của A: $P_{(A)}(t) = (2-t)^3$

Xét $f(t) = t^n$ với $n\geq 3$

Giả sử, $f(t) = P_{(A)}(t)S(t) + at^2 + bt + c$ (1)

Khi đó $f(A) = A^n = aA^2 + bA + cI$

Từ (1), thay t = 2 $\Rightarrow 2^n = 4a + 2b + c$ (2)

Đạo hàm 2 vế của (1), thay t = 2 $\Rightarrow n2^{n-1} = 4a + b$ (3)

Đạo hàm 2 vế của (1) thêm 1 lần nữa, thay t = 2 ta được:

$n(n-1)2^{n-1} = 2a$ (4)

Từ (2), (3) và (4)

$$\Rightarrow \begin{cases} a = n(n-1)2^{n-2} \\ b = n(3-2n)2^{n-1} \\ c = 2^n - 2n(2-n)2^{n-1} \end{cases}$$

$$A^n = n(n-1)2^{n-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 + n(3-2n)2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 2^n - 2n(2-n)2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trường hợp đặc biệt

Đối với ma trận vuông cấp 2

Định lí. Cho A là ma trận vuông cấp n. Đa thức đặc trưng của A bậc n là định thức

$f(\lambda) = |A - \lambda E|$ (E là ma trận đơn vị cấp 2)

Khi A là ma trận vuông cấp 2, ta thu được kết quả sau

Mệnh đề: Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Khi đó ta có

$$A^2 - (a+d)A + (ab-bc)E = 0 \quad (1)$$

Chứng minh: Theo định lí Caley-Hamilton ta có

$$f_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \lambda - a & \lambda - b \\ \lambda - c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - (\lambda - b)(\lambda - c)$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

Thay $\lambda = A$ và $1 = E$, ta được:

$f_A(\lambda) = |A - \lambda E| = A^2 - (a+d)A + (ab-bc)E$ (đpcm)

Phương pháp 1

Từ (1) $\Rightarrow A^2 = (a+d)A + (ab-bc)E$ (*)

Từ đó ta thu được

$$A^3 = AA^2 = A\left[(a+d)A - (ad-bc)E\right] = (a+d)A^2 - (ad-bc)A$$

$$A^4 = AA^3 = A\left[(a+d)A^2 - (ad-bc)A\right] = (a+d)A^3 - (ad-bc)A^2$$

Từ đây, phép tính lũy thừa bậc n của ma trận được đưa về tính lũy thừa bậc (n – 1) và chuyển dần về phép nhân 1 số với ma trận.

Ví dụ 1. Cho $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, tính A^2, A^3

Giải

Áp dụng công thức (*), ta được:

$$A^2=5A-6E=5\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 10\\ -5 & 14\end{pmatrix}$$

$$A^3=5A^2-6A=5\begin{pmatrix}-1 & 10\\ -5 & 14\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 38\\ -19 & 46\end{pmatrix}$$

Từ nhận xét ở trên ta có thể nghĩ đến việc tính A^n (n=1,2,…). Khi gặp loại bài toán này, phương pháp quen thuộc mà ta nghĩ đến chính là phương pháp quy nạp toán học. Nội dung của phương pháp này là tính một số hạng ban đầu, dự đoán số hạng tổng quát và chứng minh dự đoán bằng quy nạp.

Ví dụ 2. Cho $A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$. Tính A^n

Giải

Áp dụng công thức (*) , ta được :

$$A^2=(a+b)A-abE=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=(a+b)A^2-abA=\begin{pmatrix}a^3 & 0\\ 0 & b^3\end{pmatrix}$$

Dự đoán: $A^n=\begin{pmatrix}a^n & 0\\ 0 & b^n\end{pmatrix}$

Ta có: $A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}a^n & 0\\ 0 & b^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{n+1} & 0\\ 0 & b^{n+1}\end{pmatrix}$

Vậy dự đoán đúng $\forall n\in \mathbb{N}^*$

Nhận xét. Trong ví dụ trên vì A là ma trận đặc biệt nên ta có thể dự đoán được A^n. Trong một sô trường hợp để dự đoán được A^n là rất khó.

Phương pháp 2

Ta thấy rằng đa thức đặc trưng của A là đa thức bậc 2, vì vậy có thể phân tích (1) thành dạng $(A-\alpha E)(A-\beta E)=0$

Trường hợp $\alpha \neq \beta$ *(2 nghiệm phân biệt)*

Khi đó từ $(A-\alpha E)(A-\beta E)=0$

$\Rightarrow (A-\alpha E)A=(A-\alpha E)\beta$

Bằng quy nạp toán học, ta chứng minh được

$(A-\alpha E)A^n=(A-\alpha E)\beta^n$ (i)

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$(A-\beta E)A^n=(A-\alpha E)\alpha^n$ (ii)

Lấy (ii) - (i): $(\alpha-\beta)A^n=(\alpha^n-\beta^n)A-(\alpha^n\beta-\alpha\beta^n)E$

$$\Rightarrow A^n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A-\frac{\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}{\alpha-\beta}E$$

Hay $A^n=\begin{pmatrix} \dfrac{\beta^n(\alpha-a)+\alpha^n(a-\beta)}{\alpha-\beta} & \dfrac{b(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta} \\ \dfrac{c(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta} & \dfrac{\beta^n(\alpha-d)+\alpha^n(d-\beta)}{\alpha-\beta} \end{pmatrix}$

Ví dụ 1. Cho $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, Tính A^n

Giải

Theo định lí Caley-Hamilton, ta có: $A^2-5A+6E=0$

$\Rightarrow (A-2E)(A-3E)=0$

$\Rightarrow A(A-2E)=3(A-2E)$

Bằng quy nạp toán học ta dễ dàng chứng minh được

$A^n(A-2E)=3^n(A-2E)$

$\Rightarrow A^{n+1}-2A^n=3^n(A-2E)$ (1)

Mặt khác $(A-2E)(A-3E)=0 \Rightarrow A(A-3E)=2(A-3E)$

Lập luận tương tự, ta có:

$A^n(A-3E)=2^n(A-3E)$

$\Rightarrow A^{n+1} - 3A^n = 2^n(A - 3E)$ (2)

Lấy (1) - (2), ta được:

$A^n = (3^n - 2^n)A - (2.3^n - 3.2^n)E$

Hay $A^n = \begin{pmatrix} 2.3^n - 3.2^n & -2(3^n - 2^n) \\ 3^n - 2^n & -3 + 2^{n+1} \end{pmatrix}$

Trường hợp $\alpha = \beta$ *(nghiệm kép)*

Phương trình đặc trưng trở thành $(A - \alpha E)^2 = 0$

Đặt $A - \alpha E = B \Rightarrow A = \alpha E + B$ với $B^2 = 0$

Áp dụng khai triển nhị thức Newton

$A^n = (\alpha E)^n + C_n^1(\alpha E)^{n-1}B + C_n^2(\alpha E)^{n-2}B^2 + ... + B^n$

Do $B^2 = 0 \Rightarrow A^n = \alpha^n E + \alpha^{n-1}EB$

$= \alpha^n E + n\alpha^{n-1}(A - \alpha E)$

$\Rightarrow A^n = n\alpha^{n-1}A + (1-n)\alpha^n E$

Hay $A^n = \begin{pmatrix} n\alpha^{n-1}A + (1-n)\alpha^n & n\alpha^{n-1}b \\ n\alpha^{n-1}c & n\alpha^{n-1}d + (1-n)\alpha^n \end{pmatrix}$

Ví dụ 2. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, tính A^n

Giải

Theo định lí Caley-Hamilton, ta có

$A^2 - 4A + 4E = 0 \Rightarrow (A - 2E)^2 = 0$

Áp dụng công thức với $\alpha = 2$, ta được:

$A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n E$

Hay $A^n = \begin{pmatrix} 3n2^{n-1} + (1-n)2^n & -n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & n2^{n-1} + (1-n)2^n \end{pmatrix}$

Trường hợp đa thức đặc trưng có nghiệm phức liên hợp $x = \alpha$ *và* $x = \beta$

$\Rightarrow x^n = (x - \alpha)(x - \beta)q(x) + p(x) + q$

Thay $\begin{cases} x=\alpha \\ x=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \\ q=\dfrac{\alpha\beta^n-\alpha^n\beta}{\alpha-\beta} \end{cases}$

Vậy $A^n=\begin{pmatrix} \dfrac{\beta^n(\alpha-a)+\alpha^n(a-\beta)}{\alpha-\beta} & \dfrac{b(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta} \\ \dfrac{c(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta} & \dfrac{\beta^n(\alpha-d)+\alpha^n(d-\beta)}{\alpha-\beta} \end{pmatrix}$

Ví dụ 3. Cho $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tính A^n

Giải

Đa thức đặc trưng của A: $\lambda^2+1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=i \\ \lambda=-i \end{array}\right.$$

Áp dụng công thức $\Rightarrow \begin{cases} p=\dfrac{(i)^n-(-i)^n}{2i} \\ q=\dfrac{(i)(-i)^n-(i)^n(i)}{2i} \end{cases}$

$$\text{Vậy } A^n=\begin{pmatrix} \dfrac{(-i)^n i+(i)^n i}{2i} & \dfrac{-1\left[(i)^n-(-i)^n\right]}{2i} \\ \dfrac{(i)^n-(-i)^n}{2i} & \dfrac{(-i)^n i+(i)^n i}{2i} \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Tồn tại hay không ma trận vuông cấp 2 thỏa mãn

$$A^{2010}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-e \end{pmatrix}$$

Trong đó e là hằng số dương (Đề thi Olympic 2009)

Giải

Gọi đa thức đặc trưng của A là $P_{(A)}(t)$ thì $P_{(A)}(t)$ là đa thức bậc 2. Khi chia t^{2010}

Cho $P_{(A)}(t)$ ta được thương $Q(t)$ và dư là đa thức bậc cao nhất là 1

Kí hiệu $qt+q$. (p,q là các số thực)

Tức là $t^{2010} = P_{(A)}(t)Q(t) + qt + q$

Theo định lí Caley-Hamilton, ta có $P_{(A)}(A) = 0$, nên $A^{2010} = pA + qI$

Với I là ma trận đơn vị cấp 2

Giả sử $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Từ $pA + qI = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-e \end{pmatrix}$, $\Rightarrow \begin{cases} pa + q = -1 & (1) \\ pd + q = -1 - e & (2) \\ pc = 0 & (3) \\ pd = 0 & (4) \end{cases}$

Từ (1), (2) $\Rightarrow p \neq 0$

Từ (3), (4) $\Rightarrow b = c = 0$

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{2010} = \begin{pmatrix} a^{2010} & 0 \\ 0 & d^{2010} \end{pmatrix}$

Theo giả thiết $A^{2010} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-e \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^{2010} = -1 \\ d^{2010} = -1 - e \end{cases} \text{ (vô lí)}$$

Vậy ma trận đã cho có dạng trên không tồn tại.

Ví dụ. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}$, tính A^n

Giải

Đa thức đặc trưng của A là $f(x) = x^2 - 4x + 4$

Giải đa thức đặc trưng ta được $f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ (nghiệm kép)

$$\Rightarrow f(x) = (x-2)^2$$

Áp dụng định lí Caley-Hamilton

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 50.2^{49} + (-49).2^{50} & 50.2^{49} \\ -50.2^{49} & 50.2^{49}.3 + (-49).2^{50} \end{pmatrix}$$

Hay $A^n = 2^{50}\begin{pmatrix} 24 & 25 \\ -25 & 26 \end{pmatrix}$

2.6. Đưa về dạng chuẩn Jordan

Thuật toán tìm dạng chuẩn Jordan của ma trận vuông A

Bước 1: Tính đa thức đặc trưng và phân tích ra các nhân tử bất khả qui

Giả sử: $f_A(\lambda)=g_1^{m_1}...g_r^{m_r}$

Bước 2: Tìm đa thức cực tiểu dưới dạng $g_A(\lambda)=g_1^{p_1}...g_r^{p_r}$

Trong đó $1\le p_1\le m_1,...,1\le p_r\le m_r$

Bước 3: Với mỗi nhân tử g_i sử dụng định lí để tính số các khối Jordan liên kết với g_i^k

Bước 4: Lập các khối Jordan liên kết với tất cả đa thức g_i^k có S_{ik} > 0, rồi ghép chúng lại với nhau, mỗi khối xuất hiện S_{ik} lần, để được ma trận đường chéo khối. Đó chính là dạng chuẩn tắc Jordan cần tìm.

Trong một số trường hợp, không cần thực hiện 3 bước mà chỉ cần dựa vào 2 chú ý sau là ta có thể tìm được số các khối Jordan.

i) Với mỗi I = 1, 2, …, r có ít nhất một khối Jordan liên kết với $g_i^{p_i}$

ii) Với mỗi I = 1, 2, …, r tổng các cấp của khối Jordan liên kết với $g_i^{p_i}$ đúng bằng m_i

Phương pháp

V là không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường K.

Giả sử $A\in M_n(K)$, $f\in End_K(V)$, S' là cơ sở chính tắc của V và $[f]_{S'}=A$.

Bước 1: Tìm ma trận J là dạng chuẩn tắc Jordan của ma trận A.

Bước 2: Tìm cơ sở S của V sao cho $[f]_S=J$.

Bước 3: Gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở S' sang S. Suy ra các cột trong ma trận P là các vectơ trong cở sở S.

Khi đó, $J=P^{-1}AP\Rightarrow A=PJP^{-1}\Rightarrow A^n=PJ^nP^{-1}$

Ví dụ 1. Cho ma trận

$A=\begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$, tính A^n

Giải

Giả sử S' là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, $f\in End(\mathbb{R}^3)$ và $[f]_{S'}=A$

Đa thức đặc trưng của A: $f_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

Đa thức cực tiểu của A: $g_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=g_1g_2^2$

+ $g_1=\lambda-1 \Rightarrow S_{11}=\frac{1}{1}\left[rankI_3-2rank(A-I_3)+rank(A-I_3)^2\right]=1$

+ $g_2=\lambda-2 \Rightarrow S_2=\frac{1}{1}\left[rank(A-2I_3)-2rank(A-2I_3)^2+rank(A-2I_3)^3\right]=1$

Khi đó dạng chuẩn tắc Jordan của A là: $J=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Gọi $S=\{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ sao cho $[f]_S=J$

$\Rightarrow \begin{cases} f(u_1)=u_1\\ f(u_2)=2u_2\\ f(u_3)=u_2+2u_3\end{cases}$

$\Rightarrow u_1, u_2$ lần lượt là các vectơ riêng ứng với giá trị riêng

$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2 \Rightarrow \begin{cases} u_1=(11,7,3)\\ u_2=(3,2,1)\end{cases}$

Giả sử $u_3=(a,b,c)$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$

Ta có $[f]_{S'}=A$, $(u_i)_{S'}=u_i,\ i=\overline{1,3}$ và $f(u_3)=u_2+2u_3$

$\Rightarrow Au_3=u_2+2u_3 \Rightarrow \begin{cases} 3a-17b+25c=3\\ 2a-11b+16c=2\\ a-5b+7c=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1+5c\\ b=2c\end{cases}$

Chọn $c=0 \Rightarrow u_3=(1,0,0)$

Gọi P là ma trận chuyển từ cở sở S' sang cơ sở $S \Rightarrow P=\begin{pmatrix}11 & 3 & 1\\ 7 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Do đó $A=PJP^{-1} \Rightarrow A^n=PJ^nP^{-1}$.

Ta tính được $J^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & n.2^{n-1}\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}$

Vậy $A^n=\begin{pmatrix}-4+3.2^n+3n.2^{n-1} & 19-15.2^n-6n.2^{n-1} & -26+24.2^n+3n.2^{n-1}\\ -4+2.2^n+2n.2^{n-1} & 15-10.2^n-4n.2^{n-1} & -18+16.2^n+2n.2^{n-1}\\ -2+2^n+n.2^{n-1} & 7-5.2^n-2n.2^{n-1} & -8+8.2^n+n.2^{n-1}\end{pmatrix}$

Ví dụ 2. Tính $U_n, \forall n\in\mathbb{N}$ nếu biết $\begin{cases} U_0=U_1=U_2=1\\ \forall n\in\mathbb{N}, U_{n+3}=45U_n-39U_{n+1}+11U_{n+2}\end{cases}$

Giải

Đặt $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 45 & -39 & 11 \end{pmatrix}$ và $X_n=\begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} \Rightarrow X_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Theo giả thiết ta có $X_{n+1}=AX_n \Rightarrow X_n=AX_{n-1}=A^2X_{n-2}=\ldots=A^nX_0$

Giả sử S' là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, $f\in End(\mathbb{R}^3)$ và $[f]_{S'}=A$.

Đa thức đặc trưng của A: $f_A(\lambda)=(\lambda-5)(\lambda-3)^2=g_1g_2^2$

Với $g_1=(\lambda-5)$, $g_2=(\lambda-3)$

+ $g_1=(\lambda-5)\Rightarrow S_{11}=\frac{1}{1}\left[rankI_3-2rank(A-5I_3)+rank(A-5I_3)^2\right]=1$

+ $g_2=(\lambda-3)\Rightarrow S_{22}=\frac{1}{1}\left[rank(A-3I_3)-2rank(A-3I_3)^2+rank(A-3I_3)^3\right]=1$

Khi đó dạng chuẩn tắc Jordan của ma trận A là: $J=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Gọi $S=\{u_1,u_2,u_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ sao cho $[f]_S=J$

Khi đó u_1,u_2 là các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda=5, \lambda=3$ và

$$f(u_3)=u_2+2u_3 \Rightarrow \begin{cases} u_1=(1,5,25) \\ u_2=(1,3,9) \\ u_3=(0,1,6) \end{cases}$$

Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở S' sang cơ sở S $\Rightarrow P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 25 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

Khi đó $A=PJP^{-1}\Rightarrow A^n=PJ^nP^{-1}$.

Ta tính được $J^n=\begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n.3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Vậy $X_n=PJ^nP^{-1}X_0=\begin{pmatrix} 5^n-4n3^{n-1} \\ 5^{n+1}-4.3^n-4n3^n \\ 25.5^{n+1}-24.3^n-12n3^n \end{pmatrix}\Rightarrow U_n=5^n-4n3^{n-1}$

C. PHẦN KẾT LUẬN

Quá trình nghiên cứu đề tài đã giải quyết được các vấn đề đặt ra cụ thể là:

1. Hệ thống lại kiến thức về ma trận

2. Hệ thống được một số phương pháp tính lũy thừa bậc cao của ma trận vuông bao gồm các phương pháp

2.1 Phương pháp tính trực tiếp

2.2 Phương pháp quy nạp toán học

2.3 Sử dụng nhị thức Newton

2.4 Chéo hóa ma trận

2.5 Sử dụng định lí Caley-Hamilton

2.6 Đưa về dạng chuẩn Jordan

Ở mỗi phương pháp tôi đều có những bài tập minh họa cụ thể và cách giải quyết chi tiết

Hi vọng đề tài là tài liệu tham khảo tốt cho các bạn sinh viên chuyên ngành Toán và các sinh viên chuyên ngành khác quan tâm đến chuyên đề này.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn đến cô Lê Thị Thu Hằng đã hướng dẫn, đọc bản thảo và cho ý kiến đóng góp quí báu.

Chân thành cảm ơn Cô!

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Đại số tuyến tính*, NXB ĐHQG Hà nội, 2001

Hoàng Kỳ, Trần Văn Hạo, *Bài tập đại số*, NXB ĐH và THCN, 1980

Nguyễn Duy Thuận, *Toán cao cấp A1,* NXB GD,2000

http://ngobaochau.wordpress.com/tag/hamilton

http://en.wikipedia.org/wiki/Caley%E2%80%93Hamilton_theorem

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN

Trong cuộc sống không có thành công nào mà không dựa trên sự nổ lực, quyết tâm của cá nhân cùng với sự giúp đỡ hổ trợ của mọi người. Với lòng biết ơn sâu sắc, em xin gửi đến quý Thầy Cô Bộ môn Toán nói riêng, Khoa Sư Phạm nói chung lời cảm ơn chân thành vì đã tạo điều kiện để em được học tập, nghiên cứu, mở rộng kiến thức cũng như tạo cơ hội để em được thực hiện và hoàn thành đề tài này.

Đặc biệt, em xin chân thành cảm ơn cô Lê Thị Thu Hằng đã tận tâm hướng dẫn, giúp đỡ em trong suốt thời gian thực hiện và hoàn thành đề tài.

Mặc dù đã cố gắng hết sức mình để hoàn thành đề tài. Song củng không thể tránh khỏi thiếu sót. Em rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến quý báu từ quý Thầy Cô và bạn đọc đề đề tài của em được hoàn thiện hơn.

Cuối lời, em xin kính chúc quý Thầy Cô dồi dào sức khỏe, thành công trong công tác giảng dạy và cuộc sống.

Hà Tĩnh, tháng   năm 2016

SINH VIÊN THỰC HIỆN

Trương Thị Lan Hương