THE RISKTECH FOR INSURANCE

NOTE TECHNIQUE : DDLMM CEV

CALIBRAGE DES CORRELATIONS INTER-FORWARD

SOMMAIRE

1. Rappel DD LMM CEV et objectif

La dynamique du modèle DD LMM CEV sous la mesure spot-Libor est donnée par l'équation ci-dessous[1] :

$$dQ_k(t) = \sum_{i=j+1}^{k}\left[\frac{(F_i(t)+\delta)^{\eta}\,\sum_{q=1}^{N_f}\xi_i^q(t)\,\xi_k^q(t)}{1+F_i(t)} - \sum_{q=1}^{N_f}\frac{\eta(F_i(t)+\delta)^{\eta-1}\xi_k^q(t)^2}{2}\right]dt + \sum_{q=1}^{N_f}\xi_k^q(t)dZ_q^d(t)$$

Où :

$$Q_k(t) = \frac{1}{1-\eta}(F_k(t)+\delta)^{1-\eta}$$

Et avec :

- $F_k(t) \coloneqq F_k(t, T_k, T_{k+1}) = \frac{1}{T_{k+1}-T_k}\left(\frac{P(t,T_k)}{P(t,T_{k+1})} - 1\right)$
- η le facteur d'élasticité
- δ le facteur de déplacement

En notant $\rho_{k,l}$ la corrélation entre le k^e et l^e taux libor forward, nous aboutissons à la relation suivante :

$$\rho_{k,l} = \sum_{q=1}^{N_f}\beta_k^q\beta_l^q$$

Avec :

- $\sum_{q=1}^{N_f}\left(\beta_k^q\right)^2 = 1$
- N_f : le nombre de facteur du modèle souvent supposé **égale à 2**.
- β_k^q : les facteurs d'expositions

L'objectif de cette note est de présenter une approche de type ACP appliquée à un historique de taux forward afin de calibrer les corrélations inter-forward du modèle DD LMM CEV.

2. Notations et hypothèses

Soit $E = \{t_1, \dots, t_N\}$ l'ensemble des dates d'historique espacées d'un pas de temps Δ, identique ou plus fin que le pas de projection (annuel) de l'ESG.

[1] Pour plus de détails sur le modèle DD LMM CEV, le lecteur est prié de se référer à l'atelier sur les modèles de taux animé par Addactis le 01/04/2020.

Supposons que nous disposons d'un historique de courbes de prix zéro-coupons $\left(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{t}+\boldsymbol{j}\boldsymbol{\Delta})\right)_{t\epsilon E,j}$ déduits à partir de la courbe des taux swaps sur EURIBOR[2].

Nous pouvons alors définir les courbes de taux forward historiques $\left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{t}+\boldsymbol{j}\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{t}+\boldsymbol{j}\boldsymbol{\Delta}+\Delta')\right)_{t\in E,j}$ avec des ténors espacés d'un même pas Δ'.

En pratique un choix $\Delta = \Delta' = \mathbf{1/2}$ conduit à des calibrages de corrélations inter-forward satisfaisants.
Pour rappel la formule de calcul du taux forward $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{S},\boldsymbol{T})$ vu en $\boldsymbol{t}$, de date d'expiration $\boldsymbol{S}$ et de maturité $\boldsymbol{T}$ est comme suit :

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{S},\boldsymbol{T}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}-\boldsymbol{S}}\left(\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{S})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{T})}-\mathbf{1}\right)$$

3. Calibrage des facteurs d'expositions

Une ACP est appliquée à la variable $(\boldsymbol{X})_{i,j}$ permettant d'approcher la corrélation en les différents taux forward et dont les éléments (ligne i, colonne j) sont calculés comme suit :

$$\boldsymbol{X}_{i,j} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{\eta}}\left(\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{t}_{i+1},\boldsymbol{t}_{i+j},\boldsymbol{t}_{i+j+1}\right)+\boldsymbol{\delta}\right)^{1-\eta} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{\eta}}\left(\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{t}_{i},\boldsymbol{t}_{i+j},\boldsymbol{t}_{i+j+1}\right)+\boldsymbol{\delta}\right)^{1-\eta}$$

Le recours à une ACP permet d'écrire les variables $(\boldsymbol{X})_{i,j}$ comme une combinaison linéaire de composantes principales, notées $\left(\boldsymbol{C}_q\right)_{q=1,\dots,N_f}$, conduisant ainsi à l'équation suivante :

$$\frac{\boldsymbol{X}_{i,j}-\boldsymbol{\mu}_j}{\boldsymbol{\sigma}_j} \approx \sum_{q=1}^{N_f} \boldsymbol{w}_q(\boldsymbol{j}).\boldsymbol{C}_q(\boldsymbol{t}_{i+1})$$

Avec $\left(\boldsymbol{w}_q(\boldsymbol{j})\right)_q$ les loading factors extraits de l'ACP et :

$$\boldsymbol{\mu}_j = \frac{\mathbf{1}}{\#\boldsymbol{I}}\sum_{i\geq 1}\boldsymbol{X}_{i,j} \; ; \; \boldsymbol{\sigma}_j = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\#\boldsymbol{I}}\sum_{i\geq 1}\left(\boldsymbol{X}_{i,j}-\boldsymbol{\mu}_j\right)^2}$$

En notant $\boldsymbol{\lambda}_q$ la q-ième valeur propre (classée par ordre décroissant) de la matrice de variance-covariance associée à l'ACP :

$$\boldsymbol{Var}\left(\boldsymbol{C}_q\right) = \boldsymbol{\lambda}_q$$

[2] Les maturités indisponibles sur le marché peuvent être déterminées par interpolation.

Nous pouvons écrire :

$$\boldsymbol{Var}\left(\sum_{q=1}^{N_f} w_q(j).C_q\right) = \sum_{q=1}^{N_f} w_q^2(j).\lambda_q$$

Après normalisation nous en déduisons finalement :

$$\boxed{\beta_j^q = \frac{w_q(j)\sqrt{\lambda_q}}{\sqrt{\sum_{q=1}^{N_f} w_q^2(j).\lambda_q}}}$$

Remarque : Il est possible d'appliquer une technique de lissage du type Whittaker Henderson si le profil des $\left(\beta_j^q\right)_j$ *est erratique.*

addactis

THE RISKTECH FOR INSURANCE