Modèles de taux nominaux risque-neutre pour l'évaluation du Best Estimate S2

Présentation AVIVA

Le 1er avril 2020

addactis

THE RISKTECH FOR INSURANCE

CONTENTS

Introduction

Le générateur de scénarios économiques risque neutre

- Un **Générateur de Scénarios Economiques** (GSE) est un outil de simulation stochastique qui permet de diffuser pour **chaque simulation** et sur l'horizon de projection, les évolutions des **facteurs de risques financiers** auxquels l'assureur est exposé :
  - Les courbes des taux nominaux
  - Les facteurs d'actualisation (déflateurs)
  - Les indices actions (avec et hors dividendes)
  - L'indice d'inflation,…

- Un **GSE risque neutre** repose sur l'hypothèse d'AOA (absence d'opportunité d'arbitrage) et de complétude du marché.
  → Dans ce cadre théorique les prix actualisés à l'aide des facteurs d'actualisation (déflateurs) sont martingales.

- Un **GSE risque neutre** est préconisé pour une valorisation ***market consistent*** des engagements de l'assureur dans le cadre **solvabilité 2**

- L'évaluation ***market consistent*** du GSE exige également que les scénarios générés permettent de reproduire les **prix de marchés** des actifs modélisés :
  → Les scénarios doivent refléter les **conditions économiques actuelles**, comme les courbes des taux nominaux / réels, les volatilités implicites des différents facteurs de risques (indices actions, taux,…).

CONTENTS

Modèles de taux nominaux

Panorama des modèles de diffusion des taux nominaux (1/4)

Objectif : présenter les **caractéristiques** des différentes **classes des modèles de taux**

- **Modèles de taux courts**

Objectif : Disposer d'une **distribution** des taux courts puis calcul des prix ZC, swaptions,...

$$P(t,T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

  - **Modèles d'équilibre général**

    - Correspondent aux premiers modèles de taux (CIR, Vasicek) permettant de reproduire des caractéristiques observées sur les taux courts comme le phénomène de retour à la moyenne.

$$dr(t) = \kappa\big(\theta - r(t)\big)dt + \sigma.r(t)^{\gamma} dW^{\mathbb{Q}}(t)$$

MB sous la probabilité RN

    - Le modèle Vasicek est donné pour $\gamma = 0$, et le modèle CIR est obtenu pour $\gamma = \frac{1}{2}$

Formules fermées pour le calcul des prix zéro-coupons

La courbe initiale des taux d'intérêt ne s'ajuste pas sur la courbe de marché
Les taux générés par le modèle CIR sont positifs

Modèles de taux nominaux

Panorama des modèles de diffusion des taux nominaux (2/4)

- **Modèles d’absence d’opportunité d’arbitrage**
  - Les modèles d’équilibre général peuvent être adaptés pour répliquer la courbe de marché en intégrant un **paramètre d’ajustement**, comme le modèle Hull & White 1 facteur (**HW1F**) qui est une **extension** du modèle de Vasicek.

$$dr(t) = \kappa(t)\big(\theta(t) - r(t)\big)dt + \sigma(t)r(t)dW^{\mathbb{Q}}(t)$$

Permet de **répliquer** la courbe des taux initiale

  - Des extensions du modèle CIR permettant de générer des taux négatifs (**CIR++)** existent également
  - D’autres modèles d’AOA existent comme le modèle de **Black-Karasinski** (basé sur une dynamique Vasicek du log-taux d’intérêt instantané)

Réplication de la courbe des taux de marché
Pour le modèle HW1F => formules fermées pour le calcul des prix zéro-coupons et des caps

Les taux ZC induits par un modèle à un facteur, sont parfaitement corrélés quelles que soient les maturités

Modèles multi-factoriels (G2++, Hull & White 2 facteurs, CIR2++) pour pallier le problème de corrélation entre taux courts et taux longs.

Les modèles **Vasicek, HW, G2++** génèrent des taux zéro-coupons en composition continue, suivant une **distribution gaussienne** et permettant la **négativité** des taux.

Modèles de taux nominaux

Panorama des modèles de diffusion des taux nominaux (3/4)

- **Modèles dans le cadre Heath-Jarrow-Morton (HJM)**
  - La variable d'état choisie à diffuser dans le cadre HJM est le taux forward instantané $f(t,T)$.

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t)\ , \qquad f(0,T) = f^M(0,\mathrm{T})$$

MB sous la probabilité Risque neutre

  - La classe des modèles HJM repose sur une **dynamique générique** relativement **large** de manière à inclure plusieurs des modèles précédemment évoqués à partir de **paramétrisations spécifiques** de la **volatilité**.

    Pour **exemple**, le modèle **Hull and white 1 facteur** est donné pour la paramétrisation suivante :

$$\sigma(t,T) = \sigma \mathrm{e}^{-\mathrm{k}(\mathrm{T}-\mathrm{t})}$$

  - Sous des conditions spécifiques, le cadre HJM permet de respecter l'AOA (absence d'opportunité d'arbitrage)

Diffusion des taux forward instantanés ou des prix ZC

Les taux forwards instantanés ne sont pas directement observables sur le marché

Modèles de taux nominaux

Panorama des modèles de diffusion des taux nominaux (4/4)

- **Modèles de marché**

  - La version de référence des modèles de marché correspond au **modèle Brace-Gatarek-Musiela**, également dénommé **Libor Market Model** et régi par la dynamique fondamentale suivante

$$dF_i(t) = \sigma_i(t)F_i(t)dW^{T_{i+1}}$$

Taux forward entre les dates T_i et T_{i+1} à de la date t

$$F_i(t) = \frac{1}{T_{i+1} - T_i}\left(\frac{P(t,T_i)}{P(t,T_{i+1})} - 1\right)$$

MB sous la mesure forward neutre associée à la maturité T_{i+1}

  - Plusieurs extensions du Libor Market Model existent :

    - Libor market Model avec **facteur de déplacement** (**DD LMM**)
    - Libor Market Model avec **facteur de déplacement** et **paramètre d'élasticité** (**DD LMM CEV**)
    - Libor Market Model avec **facteur de déplacement** et **volatilité stochastique** (**LMM+)**

Diffusion des taux forward observés directement sur le marché
Possibilité de diffuser les taux négatifs et réplication du smile / skew de volatilités selon les extensions du LMM

Modèles de taux nominaux

Le Libor Market Model – Dynamique de diffusion (1/2)

- Notations :
  - $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ un ensemble de date
  - τ la mesure de temps séparant T_i et T_{i+1}
  - $P(t, T_i)$ le prix zéro-coupon en t de maturité T_i
  - $F_k(t)$ le taux forward calculé en t pour la période $[T_i, T_{i+1}]$: $F_i(t) = \frac{1}{\tau}\left(\frac{P(t,T_i)}{P(t,T_{i+1})} - 1\right)$
- **Dynamique du modèle** et **mesure spot libor** :

Etape 1

Par définition, chaque taux forward est **martingale** sous la mesure T_{i+1} forward neutre associée :

$$\mathbb{E}[F_i(t) \mid \mathcal{F}_u] = F_i(u) \;, 0 \le u \le t \le T_i < T_{i+1}$$

Etape 2

Structure du modèle LMM :

$$dF_i(t) = F_i(t) \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(t)\, dZ_i^q(t)$$

N_f : nombre de facteurs du LMM

$\xi_i^q(t)$: volatilité du i-ième taux forward associée au q-ième facteur

$Z_i^q(t)$: MB indépendants sous la mesure T_{i+1} forward neutre

Le nombre de facteurs impacte les temps de calcul

» Choix d'un modèle à deux facteurs : N_f=2

Chaque taux est spécifié sous sa propre mesure

» Nécessité de diffuser sous une mesure de probabilité commune à tout les forwards

Etape 3

Diffusion de l'ensemble des taux forward sous la même mesure (**spot libor**)

$$dF_i(t) = F_i(t)\left[\left(\sum_{j=m(t)}^{i} \frac{\tau F_j(t) \sum_{q=1}^{N_f} \xi_j^q(t)\, \xi_i^q(t)}{1+\tau F_j(t)}\right) dt + \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(t) dZ^q(t)\right]$$

Première maturité après la date t

MB indépendants sous la mesure spot Libor

Modèles de taux nominaux

Le Libor Market Model – Dynamique de diffusion (2/2)

- Dynamique du modèle LMM

$$dF_i(t) = F_i(t) \times \left[\left(\sum_{j=m(t)}^{i} \frac{\tau F_j(t) \sum_{q=1}^{N_f} \xi_j^q(t)\, \xi_i^q(t)}{1 + \tau F_j(t)} \right) dt + \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(t) dZ^q(t) \right]$$

- **Discrétisation** du logarithme de la dynamique

Pas de discrétisation

$$F_i(T_{j+1}) = F_i(T_j) \times \exp\left[\left(\sum_{k=j+1}^{i} \frac{\tau F_k(T_j) \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(T_j)\, \xi_k^q(T_j)}{1 + \tau F_k(T_j)} - \sum_{q=1}^{N_f} \frac{\xi_i^q(T_j)^2}{2} \right) \tau + \sqrt{\tau} \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(T_j) \varepsilon_j^q \right]$$

Structure de volatilité

Réalisations indépendantes de $\mathcal{N}(0,1)$

Les **taux zéro-coupons** sont ensuite **déduits** à partir des taux forwards

Un **nombre conséquent** de paramètres de volatilités ξ sont à estimer

Pour remédier à cette difficulté, une fonction de volatilité paramétrique doit être spécifiée en pratique

Modèles de taux nominaux

Le Libor Market Model – Spécification de la structure de volatilité (1/3)

Quelle paramétrisation de la structure de volatilité envisager ?

La structure de volatilité est supposée **constante** sur chaque segment $]T_{k-1}, T_k]$ comme suit:

Dates d'évaluation

Dates de paiements - Maturité

$\xi_i^q(t)$	$t \in]0, T_1]$	$t \in]T_1, T_2]$	$t \in]T_2, T_3]$	…	$t \in]T_{M-1}, T_M]$
$i = 1$	$\xi_1^q(T_0)$	Forward expiré	Forward expiré	…	Forward expiré
$i = 2$	$\xi_2^q(T_0)$	$\xi_2^q(T_1)$	Forward expiré	…	Forward expiré
…	…	…	…	…	..
$i = M$	$\xi_M^q(T_0)$	$\xi_M^q(T_1)$	$\xi_M^q(T_2)$		$\xi_M^q(T_{M-1})$

Le nombre de facteurs N_f est restreint à 2 facteurs

» $q = 1$ ou 2

La structure de volatilité reste complexe à appréhender vu le nombre élevé de paramètres la composant.

» Obligation de choisir une paramétrisation simplifiée de la structure de volatilité réduisant le nombre de paramètres.

Modèles de taux nominaux

Le Libor Market Model – Spécification de la structure de volatilité (2/3)

	Paramétrisation 1	Paramétrisation 2
Hypothèse	La volatilité $\xi_i^q(t)$ dépend uniquement du ***time to maturity*** $$\xi_i^q(t) = \Lambda_{i-m(t)+1}^q$$	• La volatilité dépend de la maturité et du ***time to maturity*** • Dissociation des structures de volatilité et de corrélation $$\xi_i^q(t) = f_{m(t)-1} \times g_{i-m(t)+1} \times \beta_{i-m(t)+1}^q$$ β^q : facteurs permettant de caractériser les corrélations inter-forward (cf. supra
Paramétrisation	$$\Lambda_i^1 = \sqrt{1-\rho^2}\sigma_1 e^{-\alpha_1 i\tau}$$ $$\Lambda_i^2 = \rho\sigma_1 e^{-\alpha_1 i\tau} + \sigma_2 e^{-\alpha_2 i\tau}$$ **5 paramètres à estimer :** $\alpha_1, \alpha_2, \sigma_1, \sigma_2 > 0$; $-1 < \rho < 1$	$$f_i = f_\infty + (1 - f_\infty)e^{-\gamma.i}$$ $$g_i = (a + b.i) \times e^{-ci} + d$$ **6 paramètres à estimer :** $a, b, c, d, \gamma, f_\infty$ **Les β_i^q sont déterminés par ACP (cf. supra)**
Avantages	• Modélisation relativement **précise** de la structure par termes de la **volatilité observée** • Structure par terme **inchangée** au cours du temps	• Plus de **degrés de liberté** induits par les **facteurs d'exposition** • **Enrichissement** de la structure de volatilité • Structure de corrélation modélisée plus **finement**

Modèles de taux nominaux

Le Libor Market Model – Spécification de la structure de volatilité (3/3)

Paramétrisation 1

ξ_i^q	$t \in]0, T_1]$	$t \in]T_1, T_2]$	$t \in]T_2, T_3]$	…	$t \in]T_{M-1}, T_M]$
$i = 1$	Λ_1^q	Forward expiré	Forward expiré	…	Forward expiré
$i = 2$	Λ_2^q	Λ_1^q	Forward expiré	…	Forward expiré
…	…	…	…	…	…
$i = M$	Λ_M^q	Λ_{M-1}^q	Λ_{M-2}^q	…	Λ_1^q

Paramétrisation 2

ξ_i^q	$t \in]0, T_1]$	$t \in]T_1, T_2]$	$t \in]T_2, T_3]$	…	$t \in]T_{M-1}, T_M]$
$i = 1$	$f_0 g_1 \beta_1^q$	Forward expiré	Forward expiré	…	Forward expiré
$i = 2$	$f_0 g_2 \beta_2^q$	$f_1 g_1 \beta_1^q$	Forward expiré	…	Forward expiré
…	…	…	…	…	..
$i = M$	$f_0 g_M \beta_M^q$	$f_1 g_{M-1} \beta_{M-1}^q$	$f_2 g_{M-2} \beta_{M-2}^q$	…	$f_{M-1} g_1 \beta_1^q$

L'ensemble des fonctions définies dans les **paramétrisations 1 et 2** sont **constantes par morceaux** afin de **faciliter** leur **implémentation** lors de la **diffusion** des taux forward.

A structure de volatilité spécifiée => l'ensemble des paramètres associés sont à calibrer

Modèles de taux nominaux

Le Libor Market Model – Calibrage (1/3)

Objectif : déterminer les paramètres du modèle en **minimisant les écarts entre les prix (resp. les volatilités)** des swaptions théoriques du modèle LMM et les prix (resp. les volatilités) des swaptions de marché. Ci-dessous une illustration d'un processus de calibrage sur prix.

Empirique

Extraction de la matrice des volatilités (**normales** ou **log-normales**) des swaptions du marché

Transformation en prix (**Bachelier** ou **Black**) empiriques des swaptions

Théorique

Calcul des prix des swaptions par formule fermée théorique dépendante des **paramètres du modèles**

$\alpha_1, \alpha_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$
ou
$a, b, c, d, \gamma, f_\infty$

Minimiser **l'écart quadratique** entre la valeur empirique et théorique

Etape 1 : détermination des **prix empiriques** des swaptions

Tenor / Maturité

Maturité \ Tenor	1	2	…	30
1	0.209%	0.276%	…	0.400%
2	0.365%	0.419%	…	0.455%
…	.	…	…	…
30	0.508%	0.504%	…	0.373%

Matrice des **volatilités** de swaptions du marché

Formule **Bachelier** de pricing de swaptions

$$PS^{Bachelier} = Bachelier\left(K, S_{\alpha,\beta}, \sigma_{\alpha,\beta}\sqrt{T_\alpha}\right)A_{\alpha,\beta}(0)$$

Formule **Black** de pricing de swaptions

$$PS^{Black} = Black\left(K, S_{\alpha,\beta}, \sigma_{\alpha,\beta}\sqrt{T_\alpha}\right)A_{\alpha,\beta}(0)$$

Pour chaque Maturité T_α, et Tenor $T_\alpha - T_\beta$, application de la formule **Bachelier** ou **Black**

Tenor / Maturité

Maturité \ Tenor	1	2	…	30
1	0.084%	0.221%	…	3.835%
2	0.206%	0.472%	…	6.043%
…	.	…	…	…
30	0.593%	1.154%	…	7.809%

Matrice des **prix empiriques** de swaptions du marché

Modèles de taux nominaux

Le Libor Market Model – Calibrage (2/3)

Etape 2: détermination des **prix théoriques** des swaptions

- Le prix de la swaption théorique est obtenue en évaluant la formule de pricing **Bachelier** ou **Black** avec la **volatilité modèle** issue de l'approximation ci-dessous :

$$\sigma_{\alpha,\beta}^{model} = \sqrt{\frac{1}{T_\alpha}\sum_{i=0}^{\alpha-1}\tau\sum_{q=1}^{N_f}\left(\sum_{k=\alpha}^{\beta-1}\frac{\gamma_k(0)\tau F_k(0)\xi_k^q(T_{i+1})}{1+\tau F_k(0)}\right)^2}$$

Avec $\gamma_k(0)$ une fonction dépendant des taux forward **(Cf. Annexes)**

- **Process de calcul** des prix de swaptions théoriques (cas d'une formule de Black) :

$\sigma_{\alpha,\beta}^{model}$ → Formule de **Black** de pricing de swaption $\boldsymbol{PS^{Black} = Black(K, S_{\alpha,\beta}, \sigma_{\alpha,\beta})A_{\alpha,\beta}(0)}$ →

Tenor

Maturité

Maturité \ Tenor	1	2	…	30
1				
2				
…				
30				

Calcul de la matrice des prix de **swaptions théoriques** pour chaque **maturité** T_α et **tenor** $T_\beta - T_\alpha$

Etape 3 : détermination des **paramètres optimaux** en minimisant les **écarts quadratiques** entre prix théorique et prix empiriques des swaptions, sur l'ensemble de la surface des swaptions considérée

Les facteurs d'exposition $\boldsymbol{\beta_i{}^q}$ de la **paramétrisation 2** doivent être **estimés préalablement**

Modèles de taux nominaux

Le Libor Market Model – Calibrage (3/3)

Objectif: détermination de la structure de corrélation inter-forwards afférente à la **paramétrisation 2** par Analyse en Composantes Principales (ACP)

- La **paramétrisation 1** induit implicitement une corrélation inter-forward via les fonctions de volatilité. La **paramétrisation 2** **dissocie** quant à elle, les structures de volatilité et de corrélation inter-forward => **la corrélation** entre le $i^{ème}$ et le $j^{ème}$ forward s'écrit comme suit :

$$\rho_{i,j} = \sum_{q=1}^{N_f} \beta_i^q \beta_j^q$$

Afin de standardiser la variance, la contrainte suivante est imposée : $\sum_{q=1}^{N_f} \left(\beta_i^q\right)^2 = 1$

- La mise en œuvre de l'**ACP** permet d'exprimer les **log-ratios de taux forward** sous forme d'une combinaison linéaire des composantes principales notées $C_1, C_2, \dots, C_{N_f}$:

$$\ln\left(\frac{F_{i+j}(T_{i+1})}{F_{i+j}(T_i)}\right) \approx \sum_{q=1}^{N_f} w_q(j).C_q(T_{i+1})$$

Loading factors extraits de l'ACP

- En notant λ_q la $q^{ème}$ des **valeurs propres classées par ordre décroissant** de la matrice de variance-covariance associée aux log-ratios de taux forwards, on a : $Var(C_q) = \lambda_q$, ce qui aboutit à la relation suivante :

$$Var\left(\sum_{q=1}^{N_f} w_q(j).C_q\right) = \sum_{q=1}^{N_f} w_q^2(j)\lambda_q$$

- Déduction des facteurs d'exposition après normalisation : $\beta_j^q = \frac{w_q(j)\sqrt{\lambda_q}}{\sqrt{\sum_{q=1}^{N_f} w_q^2(j).\lambda_q}}$

Les facteurs d'exposition sont calibrés sur données historiques, ils peuvent sont considérés comme un **méta-paramètre** qu'il n'est pas nécessaire de recalibrer à chaque exercice.

Modèles de taux nominaux

Le Libor Market Model – Simulation

- Rappel de la formule de discrétisation du modèle LMM **:**

$$F_i(T_{j+1}) = F_i(T_j) \times \exp\left[\left(\sum_{k=j+1}^{i} \frac{\tau F_k(T_j) \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(T_j)\, \xi_k^q(T_j)}{1 + \tau F_k(T_j)} - \sum_{q=1}^{N_f} \frac{\xi_i^q(T_j)^2}{2}\right)\tau + \sqrt{\tau} \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(T_j)\varepsilon_j^q\right]$$

Etape 1 : génération de l'ensemble des aléas du modèle selon une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

Etape 2 : diffusion des taux forward et obtention des scénarios des courbes des taux forward

Etape 3 : transformation des taux forwards en prix zéro-coupons via la relation ci-dessous :

$$\frac{P(t,T_i)}{P(t,T_{i+1})} = 1 + \tau F_i(t) \quad ,P(t,t) = 1$$

Modèles de taux nominaux

Le modèle DD LMM – Dynamique et simulation

- Le Displaced Diffusion Libor Market Model (**DD LMM**) est une **extension** du modèle LMM permettant de générer des **taux négatifs**. Sa dynamique sous la probabilité **forward neutre** est la suivante :

$$dF_i(t) = (F_i(t) + \delta) \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(t)\, dZ_i^q(t)$$

N_f : nombre de facteurs du LMM

$\xi_i^q(t)$: Structure de volatilité paramétrique

$Z_i^q(t)$ **:** MB indépendants sous la mesure T_{i+1} forward neutre

Coefficient de déplacement, appelé **« shift »**

- La dynamique du DD LMM sous la mesure de probabilité commune **spot Libor** est donnée par la formule suivante :

$$dF_i(t) = (F_i(t) + \delta) \times \left[\left(\sum_{j=m(t)}^{i} \frac{\tau (F_j(t) + \delta) \sum_{q=1}^{N_f} \xi_j^q(t)\, \xi_i^q(t)}{1 + \tau F_j(t)} \right) dt + \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(t) dZ^q(t) \right]$$

$Z^q(t)$ **:** MB indépendants sous la mesure spot Libor

- La diffusion des taux forward repose comme pour le modèle LMM, sur un **schéma de discrétisation ajusté** :

$$F_i(T_{j+1}) = (F_i(T_j) + \delta) \times \exp\left[\left(\sum_{k=j+1}^{i} \frac{\tau (F_k(T_j) + \delta) \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(T_j)\, \xi_k^q(T_j)}{1 + \tau F_k(T_j)} - \sum_{q=1}^{N_f} \frac{\xi_i^q(T_j)^2}{2} \right) \tau + \sqrt{\tau} \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(T_j) \varepsilon_j^q \right] - \delta$$

Réalisations indépendantes de $\mathcal{N}(0,1)$

La loi conditionnelle $F_i(T_{j+1}) + \delta | F_i(T_j)$ est distribuée selon une **dynamique log-normale** induisant ainsi des taux forwards $\boldsymbol{F_i(t) > -\delta}$

Modèles de taux nominaux

Le modèle DD LMM– Pricing des swaptions

- Le DD LMM permet d'aboutir à des **formules fermées de prix des swaptions**
- En supposant une swaption de strike K, de maturité T_α et d'échéance T_β. La valeur $PS(0)$ en $t = 0$ de cette swaption est la suivante :

$$PS(0) = A_{\alpha,\beta}(0).E_A\left[\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K\right)^+ |F_0\right] = A_{\alpha,\beta}(0).E_A\left[\left(\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) + \delta\right) - (K + \delta)\right)^+ |F_0\right]$$

Espérance sous la probabilité level neutre A, associée au numéraire $A_{\alpha,\beta}(t)$

$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t,T_\beta)-P(t,T_\alpha)}{A_{\alpha,\beta}(t)}$, le taux swap forward vu en t

$$A_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau P(t,T_i)$$

- La valorisation de la swaption avec le modèle DD LMM est donnée par la **formule fermée** ci-dessous :

$$PS(0,\alpha,\beta,K) = A_{\alpha,\beta}\,(0)\left[\left(S_{\alpha,\beta}(0) + \delta\right)N(d_1) - (K + \delta)N(d_2)\right]$$

Avec : $d_1 = \frac{ln\left[\frac{S_{\alpha,\beta}(0)+\delta}{K+\delta}\right]+\left(\sigma_{\alpha,\beta}\right)^2 T_\alpha/2}{\sigma_{\alpha,\beta}\sqrt{T_\alpha}}$, $d_2 = d_1 - \sigma_{\alpha,\beta}\sqrt{T_\alpha}$ et $\sigma_{\alpha,\beta} = \sqrt{\frac{1}{T_\alpha}\sum_{i=0}^{\alpha-1}(T_{i+1} - T_i)\sum_{q=1}^{N_f}\left(\sum_{k=\alpha}^{\beta-1} w_k^{\alpha,\beta}(0)\left(\frac{F_k(0)+\delta}{S_{\alpha,\beta}(0)+\delta}\right)\xi_k^q(T_i)\right)^2}$

$$w_k^{\alpha,\beta}(0) = \frac{\tau P(0,T_{k+1})}{A_{\alpha,\beta}(t)}$$

Modèles de taux nominaux

Le modèle DD LMM CEV – Dynamique

- Le **Displaced Diffusion Libor Market Model Constant Elasticity of Variance** (**DD LMM CEV**) est une **extension** du modèle LMM intégrant un **facteur de déplacement δ** et un **paramètre d'élasticité η**, permettant de :
  - Générer des **taux négatifs** et contrôler leurs niveau de **négativité**
  - Limiter **l'explosivité** des taux
  - Prendre en considération les phénomènes de **skew** de volatilité.

- L'ajout d'un **paramètre d'élasticité supplémentaire η** par rapport au modèle DDLMM, permet de répliquer plus finement les skews de volatilités observés sur les swaptions ITM / OTM.

- La dynamique du modèle sous la mesure de probabilité **forward-neutre** est la suivante :

$$dF_i(t) = (F_i(t) + \delta)^\eta \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(t)\, dZ_i^q(t)$$

Coefficient de déplacement, appelé **« shift »**

Facteur d'élasticité, $\mathbf{0 < \eta < 1}$

N_f : nombre de facteurs du LMM

$\xi_i^q(t)$: Structure de volatilité paramétrique

$Z_i^q(t)$: MB indépendants sous la mesure T_{i+1} forward neutre

- La dynamique du DD LMM sous la mesure de probabilité commune **spot Libor** est donné par la formule suivante :

$$dF_i(t) = \left(F_j(t) + \delta\right)^\eta \times \left[\left(\sum_{j=m(t)}^{i} \frac{\tau\left(F_j(t) + \delta\right)^\eta \sum_{q=1}^{N_f} \xi_j^q(t)\, \xi_i^q(t)}{1 + \tau F_j(t)}\right) dt + \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(t) dZ^q(t)\right]$$

$Z^q(t)$: MB indépendants sous la mesure spot Libor

Modèles de taux nominaux

Le modèle DD LMM CEV – Pricing des swaptions

Objectif : évaluer le prix d'une swaption de strike K, de maturité T_α et d'échéance T_β en $t = 0$**.**

- Le DD LMM CEV permet d'aboutir à des **formules fermées de prix de swaptions** selon différentes approches.
  - **Approximation d'Hagan-Woodward :** la valeur $PS(0)$ peut se calculer par approximation de la **volatilité implicite** et recours à une formule de type **Black**

$$PS(0,\alpha,\beta,K) = A_{\alpha,\beta}\,(0)\left[\left(S_{\alpha,\beta}(0)+\delta\right)N(d_1) - (K+\delta)N(d_2)\right]$$

Avec : $d_1 = \dfrac{ln\left[\frac{S_{\alpha,\beta}(0)+\delta}{K+\delta}\right]+\left(\sigma_{\alpha,\beta}^{CEV}\right)^2 T_\alpha/2}{\sigma_{\alpha,\beta}^{CEV}\sqrt{T_\alpha}}$, $d_2 = d_1 - \sigma_{\alpha,\beta}^{CEV}\sqrt{T_\alpha}$ et $\sigma_{\alpha,\beta}^{CEV} = \dfrac{\sigma_{\alpha,\beta}}{f_{av}{}^{1-\eta}}\left\{1 + \dfrac{(1-\eta)(2+\eta)}{24}\left(\dfrac{S_{\alpha,\beta}(0)-K}{f_{av}}\right)^2 + \dfrac{(1-\eta)^2}{24}\dfrac{\sigma_{\alpha,\beta}{}^2 T_\alpha}{f_{av}{}^{2-2\eta}}\right\}$

$$\sigma_{\alpha,\beta} = \sqrt{\frac{1}{T_\alpha}\sum_{i=0}^{\alpha-1}\tau\sum_{q=1}^{N_f}\left(\sum_{k=\alpha}^{\beta-1} w_k^{\alpha,\beta}(0)\left(\frac{F_k(0)+\delta}{S_{\alpha,\beta}(0)+\delta}\right)^{\eta}\xi_k^q(T_{i+1})\right)^2}$$

$$f_{av} = \frac{1}{2}\left(S_{\alpha,\beta}(0) + K + 2\delta\right)$$

$$w_k^{\alpha,\beta}(0) = \frac{\tau P(0,T_{k+1})}{A_{\alpha,\beta}(t)}$$

  - **Formule fermée basée sur une loi du Chi 2 :** la valeur $PS(0)$ peut se calculer par formule fermée basée sur la **fonction de répartition d'une loi du Chi 2 décentrée** :

$$PS(0,\alpha,\beta,K) = A_{\alpha,\beta}\,(0)\left[\left(S_{\alpha,\beta}(0)+\delta\right)\left(1-\mathcal{X}^2(d,b+2,f)\right) - \left(K+\delta\mathcal{X}^2(f,b,d)\right)\right]$$

Avec : $\mathrm{d} = \dfrac{K^{2(1-\eta)}}{(1-\eta)^2 v_\alpha\,(0,T_\alpha)}$, $\mathrm{b} = \dfrac{1}{1-\eta}$, $f = \dfrac{S_{\alpha,\beta}(0)^{2(1-\eta)}}{(1-\alpha)^2 v_\alpha\,(0,T_\alpha)}$ et $v_\alpha\,(t,T_\alpha) = \int_t^{T_\alpha}\left\|\sum_{j=\alpha}^{\beta-1}\mathcal{W}_j(t)\xi_j(u)\right\|^2 du$

Le calcul de cet élément est détaillé en **annexes**

Modèles de taux nominaux

Le modèle DD LMM CEV – simulation

- **Rappel :** la dynamique du modèle DD LMM sous la mesure de probabilité **spot Libor** est donnée par la formule suivante

$$dF_i(t) = (F_i(t)+\delta)^{\eta} \times \left[\left(\sum_{j=m(t)}^{i} \frac{\tau\left(F_j(t)+\delta\right)^{\eta} \sum_{q=1}^{N_f} \xi_j^q(t)\,\xi_i^q(t)}{1+\tau F_j(t)}\right) dt + \sum_{q=1}^{n} \xi_i^q(t) dZ^q(t)\right]$$

- Le processus de **discrétisation** repose sur la relation suivante :

$$\boxed{Q_i(t) = \frac{1}{1-\eta}(F_i(t)+\delta)^{1-\eta}}$$

$$dQ_i(t) = \underbrace{\sum_{k=j+1}^{i}\left[\frac{\tau(F_i(t)+\delta)^{\eta}\ \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(t)\,\xi_k^q(t)}{1+\tau F_i(t)} - \sum_{q=1}^{N_f} \frac{\eta\tau(F_i(t)+\delta)^{\eta-1}\xi_i^q(t)^2}{2}\right]}_{\text{Drift}} dt + \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(t) dZ_q^d(t)$$

- En supposant que le drift du processus $Q_k(t)$ est constant entre T_k et T_{k+1}, la discrétisation suivante est considérée en pratique :

$$Q_i(T_{j+1}) = Q_i(T_j) + \sum_{k=j+1}^{i}\left[\frac{\tau\left(F_k(T_j)+\delta\right)^{\eta}\ \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(T_j)\,\xi_k^q(T_j)}{1+\tau F_k(T_j)} - \sum_{q=1}^{N_f} \frac{\eta\tau\left(F_k(T_j)+\delta\right)^{\eta-1}\xi_i^q(T_j)^2}{2}\right]\tau + \sqrt{\tau}\sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(T_j)\varepsilon_j^q$$

Réalisations indépendantes de $\mathcal{N}(0,1)$

Les taux forward sont ensuite déduits des quantités $Q_i(t)$

Modèles de taux nominaux

Le modèle LMM+ – Généralités

- Le **Stochastic Volatility Displaced Diffusion Libor Market** Model (**LMM+**) est une **extension** du modèle LMM reposant sur les spécificités suivantes :

  - **Intégration d'une volatilité stochastique :** permet de répliquer les phénomènes de smile / skew de volatilités ITM / OTM et de modéliser de manière plus réaliste les mouvements des surfaces de volatilités implicite au cours du temps.

  - **Intégration d'un coefficient de déplacement :** permet (même lorsque la volatilité est déterministe) d'induire certains phénomènes de skew de volatilité, et également de limiter (en choisissant un facteur de déplacement suffisamment élevé) l'explosivité des taux en offrant la possibilité au modèle de générer des taux négatifs.

Contrairement aux modèles gaussiens (Hull & White 1 facteur, G2++) dans lesquels les taux gaussiens peuvent atteindre des valeurs arbitrairement négatives, le modèle LMM+ conduit à des taux négatifs contrôlés par la valeur du facteur de déplacement δ, qui constitue une borne inférieure des taux forward générés.

Modèles de taux nominaux

Le modèle LMM+ – Dynamique

- La dynamique du modèle LMM+ sous la mesure de probabilité **spot Libor** est caractérisée par la formule suivante :

$$dF_i(t) = (F_i(t) + \delta) \times \left[\left(\sum_{j=m(t)}^{i} \frac{\tau(F_j(t)+\delta)\sum_{q=1}^{N_f}\xi_j^q(t)\,\xi_i^q(t)}{1+\tau F_j(t)}\right)dt + \sum_{q=1}^{N_f}\xi_i^q(t)dZ^q(t)\right]$$

Mb indépendants sous la mesure spot Libor

Facteur de déplacement

- La volatilité stochastique est régie par un processus de variance V qui suit un processus **de retour à la moyenne** CIR

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dW(t)$$

Vitesse de retour à la moyenne

Moyenne de long terme de la variance

Volatilité CIR de la variance

ρ : corrélation entre les browniens des taux forward et le processus de variance

- La paramétrisation de la structure de volatilité est la suivante :

$$\xi_i^q(t) := f(t) \times g_i(t) \times \beta_i^q(t)$$

$f(t) = f(t;(\kappa,\theta,\varepsilon)) := \sqrt{V(t)}$

$\beta_i^q(t) := \beta_{i-m(t)}^q$

$g_i(t) = g_i(t;(a,b,c,d)) := (a + b.T_{i-m(t)}) \times e^{-cT_{i-m(t)}} + d := g_{i-m(t)}(a,b,c,d)$

8 paramètres du modèle à calibrer $(\kappa, \theta, \varepsilon, a, b, c, d, \rho)$

Modèles de taux nominaux

Le modèle LMM+ – Généralités

- Le processus de calibrage du modèle LMM+ repose sur la minimisation des écarts quadratiques entre les prix de swaptions empiriques et théoriques induits par le modèle.

- La composante de volatilité stochastique induit une complexité supplémentaire de pricing qui nécessite la valorisation de la **fonction caractéristique du log-rendement** du taux swap forward sous-jacent à la swaption.

- Le principe de valorisation repose sur les étapes ci-dessous :

  - **Etape 1 :** étude du log-ratio du taux swap shifté entre la date $t = 0$ et la date de maturité de la swaption T_α, de Tenor $T_\beta - T_\alpha$:

    $$\boldsymbol{X(T_\alpha) = \ln\left(\frac{S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)+\delta}{S_{\alpha,\beta}(0)+\delta}\right)}$$

  - **Etape 2 :** calcul de $\mathbb{E}_{A_{\alpha,\beta}}\left[e^{zX(T_\alpha)}\right]$ la fonction caractéristique ($z \in \mathbb{C}$) associée à $X(T_\alpha)$ sous la mesure level-neutre associée à l'annuité de la swaption $A_{\alpha,\beta}$.

    Rappel : $A_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau P(t, T_i)$

La formule de pricing est détaillée en **Annexes**

Modèles de taux nominaux

Le modèle LMM+ – simulation

La diffusion des **taux forward** repose sur le **schéma de discrétisation** suivant :

$$F_i(T_{j+1}) = \left(F_i(T_j) + \delta\right) \times \exp\left[\left(\sum_{k=j+1}^{i} \frac{\tau\left(F_k(T_j) + \delta\right) \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(T_j)\, \xi_k^q(T_j)}{1 + \tau F_k(T_j)} - \sum_{q=1}^{N_f} \frac{\xi_i^q(T_j)^2}{2}\right)\tau + \sqrt{\tau} \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(T_j)\varepsilon_1(T_j)\right] - \delta$$

Où $\xi_i^q(t) = \sqrt{V_+(t)} \times g_i(t) \times \beta_i^q(t)$

$$x_+ = \max(x; 0)$$

Loi normale centrée réduite (dimension 2) : $\varepsilon_1(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1(t) \\ \varepsilon_1^2(t) \end{pmatrix}$

Ci-dessous la discrétisation du **processus de variance** :

$$V(T_{j+1}) = V(T_j) + \kappa\left(\theta - V_+(T_j)\right)\tau + \sqrt{\tau}\varepsilon\sqrt{V_+(T_j)}\varepsilon_2(T_j)$$

L'aléa du processus des **taux forward** est **corrélé** à l'aléa du **processus de variance**

La simulation du modèle LMM+ s'effectue de **proche en proche** en **diffusant simultanément** la dynamique des **taux forwards** et la dynamique du **processus de Variance**

Les prix zéro-coupons sont déduits *in fine* des taux forward diffusés

Modèles de taux nominaux

Récapitulatif du LMM et ses extensions

Ne permet ni de répliquer les smiles de vol. ni de projeter des taux négatifs

LMM

$\boldsymbol{\delta = 0}$ **,** $\boldsymbol{\eta = 1}$ et f une fonction d'échelle déterministe :

$$f(t) = f_\infty + (1 - f_\infty)e^{-\gamma.T_i}, \forall t \in [T_i, T_{i+1}]$$

DD LMM

$\boldsymbol{\delta > 0}$ **,** $\boldsymbol{\eta = 1}$ et f une fonction d'échelle déterministe :

$$f(t) = f_\infty + (1 - f_\infty)e^{-\gamma.T_i}, \forall t \in [T_i, T_{i+1}]$$

Ne permet pas de répliquer les smiles de vol.

Expression générale des modèles LMM sous la mesure spot-Libor

$$dF_i(t) = \left(F_j(t) + \delta\right)^\eta \times \left((\ldots)dt + \sum_{q=1}^{N_f} \xi_i^q(t) dZ^q(t) \right)$$

Paramètre d'élasticité

Facteur de déplacement

Facteur d'ajustement de la volatilité :

$$\xi_i^q(t) \coloneqq f(t) \times g_i(t) \times \beta_i^q(t)$$

Permet de répliquer les skew de volatilités et projeter des taux négatifs

DD LMM CEV

$\boldsymbol{\delta > 0}$ **,** $\boldsymbol{0 < \eta < 1}$ et f une fonction d'échelle déterministe :

$$f(t) = f_\infty + (1 - f_\infty)e^{-\gamma.T_i}, \forall t \in [T_i, T_{i+1}]$$

LMM+

$\boldsymbol{\delta > 0}$ **,** $\boldsymbol{\eta = 1}$ et f un processus de retour à la moyenne de type **CIR** : $f(t) = \sqrt{V(t)}$

$$dV(t) = \kappa\left(\theta - V(t)\right)dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dW(t)$$

Modèle complexe à calibrer -> risque élevé de piégeage

CONTENTS

Modèles de taux nominaux

Le modèle G2++ – Généralités

- Le modèle G2++ est un modèle gaussien de taux court à 2 facteurs (similaire au Hull & White 2 facteurs). Le modèle G2++ repose sur les spécificités suivantes :

  - **Intégration d'un facteur d'ajustement φ :** déduit de la courbe des taux initiale et permettant de **répliquer mécaniquement** cette courbe des taux.

  - **Intégration d'un paramètre de corrélation instantané ρ :** permet de capter les **corrélations** entre les taux associés aux différentes maturités (contrairement à un modèle de taux à 1 facteur) et de mieux capter le phénomène de **pentification** de la courbe des taux.

Le **modèle G2++** conduit à des distributions de **taux gaussiens**, de ce fait les taux générés peuvent atteindre des valeurs **arbitrairement négatives**.
De plus le caractère symétrique de la loi gaussienne ne permet pas d'assurer dans un contexte de taux bas, une **asymétrie des probabilités** d'observer une **hausse des taux** et une **baisse des taux**

Modèles de taux nominaux

Le modèle G2++ – Dynamique

- La dynamique du modèle G2++ sous la probabilité risque-neutre est régie par l'équation suivante

Taux court en date t

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t)$$

Paramètre d'ajustement déterministe permettant la **réplication parfaite** de la courbe des taux initiales
Avec $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$

- $x(t)$ et $y(t)$ sont deux facteurs gaussiens régis par les dynamiques :

MB de la dynamique

a, b : vitesse de retour à la moyenne respectivement des processus $x(\mathrm{t})$ et $y(t)$

$$dx(t) = -ax(t)\mathrm{dt} + \sigma_1(t)dW_1(t)$$

$$dy(t) = -by(t)\mathrm{dt} + \sigma_2(t)dW_2(t)$$

Paramètres de volatilité respectivement des processus $x(\mathrm{t})$ et $y(t)$

$$d < W_1, W_2 > = \rho dt$$

$\rho \epsilon [1,1]$: **corrélation instantanée** entre les MB des 2 dynamiques, permettant la **prise en compte de la corrélation** entre les taux ZC associés au différentes maturités

Modèles de taux nominaux

Le modèle G2++ – Pricing des swaptions

- Le processus de calibrage du modèle G2++ s'appuie sur la minimisation des écarts quadratiques entre les prix de swaptions de marché et les prix théoriques induits par le modèle.

- Considérons une swaption de maturité T_α, de Tenor $T_\beta - T_\alpha$ et de strike K, le principe de valorisation est le suivant :

  - Expression du prix de la swaption sous la mesure T_α- forward-neutre :

$$\boldsymbol{PS(0) = P(0, T_\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)}}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \left(\phi(-h_1(x)) - \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \lambda_i(x) e^{k_i(x)} \phi(-h_2(x)) \right) dx}$$

$$h_1(x) = \frac{y^* - \mu_y}{\sigma_y \sqrt{1-\rho_{xy}^2}} - \frac{\rho_{xy}(x-\mu_x)}{\sigma_x \sqrt{1-\rho_{xy}^2}}$$

$y^* = y^*(x)$ **l'unique solution de l'équation**

$$\sum_{i=1}^{\beta} C_i\, A(T, T_i) e^{-B(T, T_i, a)x - B(T, T_i, b) y^*} = 1$$

La formule de pricing du G2++ repose sur une **estimation numérique d'une intégrale** nécessitant une **résolution numérique d'une équation non linéaire** dépendant de la variable d'intégration

Modèles de taux nominaux

Le modèle G2++ – simulation

La **discrétisation** du taux court est la suivante :

$$r(t+\Delta t) = x(t)e^{-a.\Delta t} + y(t)e^{-b.\Delta t} + \sigma_1\sqrt{\frac{1-e^{-2a.\Delta t}}{2a}}\,\varepsilon_1(t+\Delta t) + \sigma_2\sqrt{\frac{1-e^{-2b.\Delta t}}{2b}}\,\varepsilon_2(t+\Delta t) + \varphi(t+\Delta t)$$

Lois normales centrées réduites de corrélation ρ

La **discrétisation** du taux court à partir **d'aléas gaussiens indépendants** est la suivante :

$$r(t+\Delta t) = x(t)e^{-a.\Delta t} + y(t)e^{-b.\Delta t} + \left(\sigma_1\sqrt{\frac{1-e^{-2a.\Delta t}}{2a}} + \sigma_2\rho\sqrt{\frac{1-e^{-2b.\Delta t}}{2b}}\right)\varepsilon_1(t+\tau t) + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\frac{1-e^{-2b.\Delta t}}{2b}}\,\varepsilon_2(t+\Delta t) + \varphi(t+\Delta t)$$

Lois normales centrées réduites décorrélées

La **déduction des prix zéro-coupons** se fait par **formules fermées** conditionnellement au taux court simulé.

CONTENTS

Choix du modèle de taux

Récapitulatif des modèles de taux nominaux

- Ci-dessous un récapitulatif des principales caractéristiques des modèles décrit dans ce support :

Modèle	Génération de taux négatifs	Existence de formules fermées pour le pricing des swaptions	Nombre de facteurs utilisé	Nombre de paramètres	Réplication skews de volatilité	Degré d'utilisation du modèle
HW1F	**Oui**	Formules fermées nécessitant au préalable la **résolution d'une équation non linéaire**	**1**	**2**	**Non**	Modèle utilisé par certains acteurs mais présente des limites en termes de market consistency car très peu paramétré
G2++	**Oui**	Formules semi fermées nécessitant le calcul d'une **intégrale numérique** et la **résolution d'une équation non linéaire** sur le domaine d'intégration	**2**	**5**	**Non**	Modèle **peu utilisé** par l'industrie d'assurance
HW2F	**Oui**		**2**	**5**	**Non**	Modèle (**équivalent au G2++**) **peu utilisé** par l'industrie d'assurance
CIR2++	**Oui**	Formules semi fermées nécessitant le calcul d'une **intégrale numérique** et l'approximation **d'une densité de probabilité par ses cumulants** (cas où les facteurs sont corrélés)	**2**	**8**	**Non**	Modèle **peu utilisé** par les acteurs de marché
LMM	**Non**	Oui	**2**	**5 ou 6** (dépend de la paramétrisation)	**Non**	Modèle **très peu utilisé** compte tenu des conditions de taux bas / négatifs
DD LMM	**Oui**	Oui	**2**	**5 ou 6** (dépend de la paramétrisation)	**Non**	Modèle utilisé par différents praticiens et proposé dans certains ESG
DD LMM CEV	**Oui**	Oui	**2**	**5, 6 ou 7** (dépend de la paramétrisation)	**Oui** (Réplication des phénomènes de skew)	Modèle **peu utilisé** par les praticiens car **rarement proposé** dans les solutions ESG
LMM+	**Oui**	Formules semi fermées nécessitant le calcul d'une **intégrale numérique** complexe et une **évaluation d'une fonction caractéristique** sur le domaine d'intégration	**2**	**8**	**Oui** (Réplication des smile et skew)	Modèle **répandu** car **seule solution** disponible dans certains ESG afin de générer des taux négatifs

Parmi les modèles explicités, le **modèle DDLMM CEV à 2 facteurs** apparait être une solution pertinente sur les plans de la conformité réglementaire et opérationnel.

Choix du modèle de taux nominaux

Eléments d'argumentation

- Ci-dessous un argumentaire en faveur du modèle **DD LMM CEV à 2 facteurs :**

  - ❑ L'utilisation d'un **modèle de marché** plutôt qu'un modèle de taux court est **préconisée**. En effet, les modèles de marché sont aujourd'hui largement répandus et performants en termes de market consistency ; les modèles DD LMM et LMM+ sont en outre particulièrement utilisés.

  - ❑ Les modèles **multi-factoriels** permettent de capter des déformations de la courbe des taux plus complexes qu'un simple risque de translation (modèles mono-factoriels).

  - ❑ Le modèle DD LMM CEV permet de **générer des taux négatifs**, à l'instar des modèles DD LMM et LMM+, tout en **contrôlant le seuil de négativité** (i.e. le paramètre de **shift**). De plus le phénomène **d'explosivité** des taux observé dans le cadre d'une modélisation LMM est **atténué**.
    - ❑ **A noter** : possibilité **d'objectiver le niveau du shift** par intégration de ce paramètre au sein du processus de calibrage.

  - ❑ Le **facteur d'élasticité** du modèle DD LMM CEV induit une **meilleure réplication des skews de volatilité** (profils de la volatilité en fonction du strike) que celui induit par modèle DD LMM. Cependant l'introduction d'une **volatilité stochastique** dans la dynamique LMM+ permet d'améliorer encore davantage la réplication des skews de volatilité.

  - ❑ À la différence des modèles LMM+ ou G2++, le modèle DD LMM CEV permet de disposer de **formules fermées** de prix de swaptions **conduisant à des temps de calcul** de prix théoriques **significativement plus faibles**.

CONTENTS

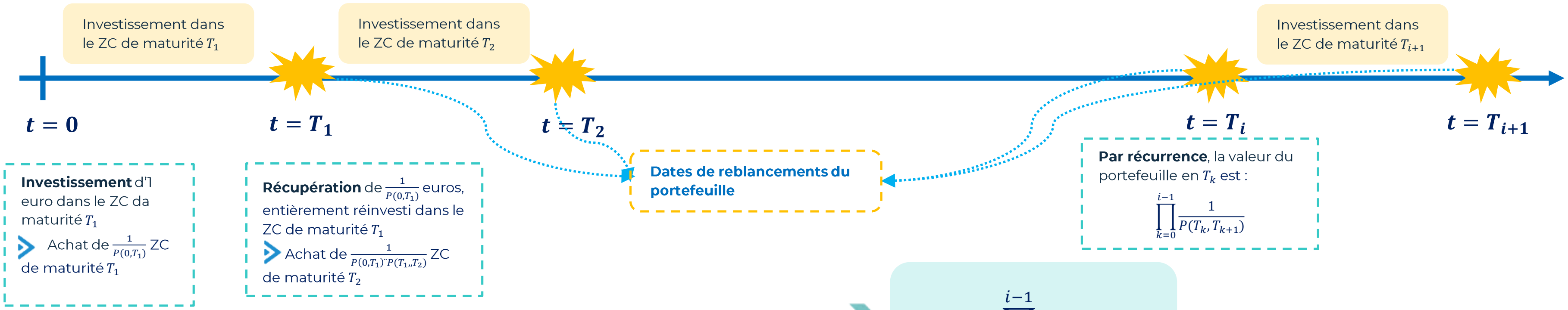
Annexe 1

Mesures martingales

- Les différentes mesures martingales utilisées :
  - **La probabilité risque neutre :** pour les modèles de taux instantané, le déflateur est suivant :

$$D(T) = e^{-\int_0^T r_s ds}$$

  - **La probabilité spot Libor :** mesure martingale considérée pour la simulation conjointe de l'ensemble des facteurs associés à un modèle de la famille LMM
    - Ecriture de la dynamique de tous les **taux forward et taux swap sous une même mesure**
    - Le numéraire correspond à un **portefeuille ajusté** par **rebalancements** successif :



$$D(T_i) = \prod_{k=0}^{i-1} P(T_k, T_{k+1})$$

Annexe 2

Libor Market Model : Volatilité approchée des swaptions

- Ci-dessous les **formules fermées** de calcul de la volatilité approchée des swaptions par la méthode de **Hull and White :**

  - **Paramétrisation 1 :**

$$\sigma_{\alpha,\beta} = \sqrt{\frac{1}{T_\alpha}\sum_{i=0}^{\alpha-1}\tau\sum_{q=1}^{N_f}\left(\sum_{k=\alpha}^{\beta-1}\frac{\gamma_k(0)\tau F_k(0)\Lambda_{k-i}^{q}}{1+\tau F_k(0)}\right)^2}$$

  - **Paramétrisation 2:**

$$\sigma_{\alpha,\beta} = \sqrt{\frac{1}{T_\alpha}\sum_{i=0}^{\alpha-1}\tau\sum_{q=1}^{N_f}\left(\sum_{k=\alpha}^{\beta-1}\frac{\gamma_k(0)\tau F_k(0)f(T_i)g(T_k-T_i)\beta_{k-i}^{q}}{1+\tau F_k(0)}\right)^2}$$

Avec :

$$\gamma_k(0) = \frac{\prod_{k=\alpha}^{\beta-1}\left(1+\tau F_k(0)\right)}{\prod_{k=\alpha}^{\beta-1}\left(1+\tau F_k(0)\right)-1} - \frac{\sum_{i=\alpha}^{k-1}\tau\prod_{k=i+1}^{\beta-1}\left(1+\tau F_k(0)\right)}{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1}\tau\prod_{k=i+1}^{\beta-1}\left(1+\tau F_k(0)\right)}$$

Annexe 3

DD LMM CEV : paramétrisation de la formule fermée du Chi 2

- Ci-dessous la **formule de variance** (*) du taux swap forward implicite à la valorisation d'une swaption par la **formule fermée du Chi 2 :**

$$v_\alpha\,(t, T_\alpha) = \int_t^{T_\alpha} \left\| \sum_{j=\alpha}^{\beta-1} \mathcal{W}_j(t)\xi_j(u) \right\|^2 du$$

Avec

$$\mathcal{W}_j(t) = \frac{\partial S_{\alpha,\beta}}{\partial F_j}(t) \frac{\left(F_j(t)+\delta\right)^\eta}{\left(S_{\alpha,\beta}(t)+\delta\right)^\eta}$$

$$\frac{\partial S_{\alpha,\beta}}{\partial F_j}(t) = \frac{\tau S_{\alpha,\beta}(t)}{1+\tau F_j(t)} \left[\frac{P(t,T_\beta)}{P(t,T_\alpha)-P(t,T_\beta)} + \frac{\sum_{k=\alpha}^{\beta-1} \tau P(t,T_{k+1})}{A_{\alpha,\beta}(t)} \right]$$

- Sous les notations introduites dans cette présentation, l'élément v_α en $t = 0$ est en pratique, évalué comme suit :

$$v_\alpha\,(0, T_\alpha) = \sum_{n=0}^{\alpha-1} (T_{n+1} - T_n) \sum_{q=1}^{N_f} \left(\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \frac{\partial S_{\alpha,\beta}}{\partial F_i}(0). \frac{(F_i(0)+\delta)^\eta}{\left(S_{\alpha,\beta}(0)+\delta\right)^\eta} \xi_i^q(T_n) \right)^2$$

(*) Pour plus de détail le lecteur pourra se référer à l'article « Volatility Skews and Extensions of the Libor Market Model – L. Andersen, J. Andreasen »

Annexe 4

LMM+ calibrage (1/2)

- Le pricing des swaptions repose sur la détermination de la **fonction caractéristique du log-rendement** du taux swap forward associé à la swaption.

- Soit une swaption de strike K, de maturité T_α et de Tenor $T_\beta - T_\alpha$

- Pour valoriser la swaption, on considère la variable $\boldsymbol{X(T_\alpha) = \ln\left(\frac{S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)+\delta}{S_{\alpha,\beta}(0)+\delta}\right)}$ correspondant au log-rendement du taux swap shifté entre la date $t = 0$ et T_α (la maturité de la swaption).
- Soit $M_{X(T_\alpha)}(z) = \mathbb{E}_{A_{\alpha,\beta}}\left[e^{zX(T_\alpha)}\right]$ la fonction caractéristique (avec $z \in \mathbb{C}$) associée à $X(T_\alpha)$ sous la mesure level-neutre dont le numéraire correspond à l'annuité de la swaption $A_{\alpha,\beta}$

- La formule de pricing de la swaption est la suivante :

$$\boxed{PS(0) = A_{\alpha,\beta}(0)\left[\frac{1}{2}\left(S_{\alpha,\beta}(0) - K\right) + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) + \delta\right)f_1(u) - (K+\delta)f_2(u)\right)du\right]}$$

Avec :

$$f_1(u) = \frac{Im\left(e^{-iux}M_X(1+iu)\right)}{u} \quad , \quad f_2(u) = \frac{Im\left(e^{-iux}M_X(iu)\right)}{u}$$

f_1, f_2 sont des fonctions **dépendantes des paramètres** du modèle LMM+

Annexe 4

LMM+ calibrage (2/2)

- Ci-dessous les étapes de calcul du prix de la swaption dans le modèle LMM+ :
  - **Etape 1 :** calcul **exact** des fonctions f_1 et f_2 par **résolutions itérative** d'équations différentielles associées au pricing (équations de **Ricatti)**.
  - **Etape 2 :** application d'un changement de variable afin d'intégrer sur un intervalle borné :

$$I(\mathcal{P}) = \int_0^{+\infty} \Big(\big(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) + \delta\big) f_1(u;\mathcal{P}) - (K+\delta) f_2(u;\mathcal{P}) \Big)\, du$$

$$I(\mathcal{P}) = \int_0^1 \frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{v C_\infty}} \left(\big(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) + \delta\big) f_1\left(\frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{C_\infty}} \mathbf{ln}(\boldsymbol{v})\ ;\mathcal{P}\right) - (K+\delta) f_2\left(\frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{C_\infty}} \mathbf{ln}(\boldsymbol{v})\ ;\mathcal{P}\right)\right) d\boldsymbol{v}$$

Changement de variable :

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{C_\infty}} \mathbf{ln}(\boldsymbol{v})$$

Paramètre $\boldsymbol{C_\infty}$ parfois difficile à objectiver

  - **Etape 3 :** calcul de l'intégrale via une **approximation de Simpson**

Segmentation de l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} f(x) dx$$

Approximation de **Simpson** appliquée à chaque segment

$$\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} f(x) dx \approx \frac{1}{6N}\left(f\left(\frac{i-1}{N}\right) + 4f\left(\frac{i-1}{N} + \frac{1}{2N}\right) + f\left(\frac{i}{N}\right)\right)$$