

TOÁN RỜI RẠC 1

Bài tập Chương 1: phần cá nhân tự học-tự NC

Tập hợp và ánh xạ

BT.CNTH-NC#1: TẬP HỢP và ÁNH XẠ¹

1. Giả sử $X := \{1, 2, \dots, 10\}$. Đặt $A := \{1, 4, 7, 10\}$, $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $C := \{2, 4, 6, 8\}$.
Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau:

- (a) $(A \cap B)^c \cup C$.
- (b) $(B^c \cap (C \setminus A))$.
- (c) $A \cap (B \cup C)$
- (d) $((A \cap B) \setminus C)$.
- (e) $(A \cap B) \setminus (C \setminus B)$.

2. Chứng minh hoặc cho phản ví dụ các quan hệ (A, B, C là những tập hợp con của tập hợp X) sau:

- (a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
- (b) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.
- (c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap C$.
- (d) $(A \setminus B)^c = (B \setminus A)^c$.
- (e) $(A \cap B)^c \subseteq A$.

3. (i) Chứng minh hoặc cho phản ví dụ các quan hệ (A, B, C là những tập hợp con của tập hợp X) sau:

- (a) $(A \cap B) \cup (B \setminus A) = A$.
- (b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
- (c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap C$.
- (d) $(A \times B)^c = A^c \times B^c$.

- (ii) Đẳng thức sau đây đúng không? Tại sao?

$$(A \cap B)^c = B^c.$$

4. Giải các câu sau đây:

- (a) Giả sử $X := \{1, 2, 3\}$, $Y := \{a, b, c, d\}$, $Z := \{w, x, y, z\}$. Xét các ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ và $g: Y \rightarrow Z$ cho bởi

$$\begin{aligned} f(1) &= b, f(2) = c, f(3) = a, \\ g(a) &= x, g(b) = x, g(c) = z, g(d) = w. \end{aligned}$$

Xác định ánh xạ hợp $f \circ g$.

- (b) Giả sử $f: X \rightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$, với $X := \{-5, -4, \dots, 4, 5\}$. f là ánh xạ một-một? f là ánh xạ lên?
- (c) Có bao nhiêu ánh xạ từ tập $\{a, b\}$ vào tập $\{1, 2\}$. Những ánh xạ nào là một-một? Những ánh xạ nào là lên?
- (d) Giả sử $X := \{1, 2, 3\}$ và $Y := \{a, b, c, d\}$. Xét ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ cho bởi

$$f(1) = a, f(2) = c, f(3) = c.$$

Xác định các tập hợp sau: $f(\{1\})$, $f(\{1, 3\})$, $f^{-1}(\{a\})$ và $f^{-1}(\{a, c\})$.

- (e) Chứng minh:

Nếu B, C là hai tập hợp con của tập hợp Y thì

$$f^{-1}(B \setminus C) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(C).$$

5. Các tập hợp được xét đến đều là tập con của một tập vũ trụ U nào đó. Hãy kiểm tra các đẳng thức tập hợp sau đây:

- (a) $A \cap (A^c \cup B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- (b) $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) = A \cap (B \Delta C)$.

Ở đây ký hiệu: $S \Delta T = (S \setminus T) \cup (T \setminus S)$, gọi là hiệu đối xứng của hai tập hợp S và T .

- (c) $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) = A \cap C^c$.
- (d) $A \cap ((B \cap C)^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$.
- (e) $(A \cup (B \cap C))^c = (A \cup B)^c \cup (A \cup C)^c$.

6. Các tập hợp được xét đến đều là tập con của một tập vũ trụ U nào đó. Hãy kiểm tra các đẳng thức tập hợp sau đây:

- (a) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) = A \cap B$.
- (b) $(A \cup B) \cap (A \cup B \cup C) = A \cup B$.
- (c) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- (d) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) = A \cap B$.
- (e) $(A^c \cap (B \cup C))^c = (A \cup B^c) \cap (A \cup C^c)$.

¹ Các bài tập tham khảo từ:

[1] Phạm Tiến Sơn, *Toán rời rạc 1 (Bài giảng Tóm tắt)*, Tài liệu lưu hành nội bộ, Đại học Đà Lạt, 2008.

[2] Kevin Ferland, *Discrete Mathematics: An Introduction to Proofs and Combinatorics*, Houghton Mifflin Company, 2009.