

Sử dụng phương pháp Newton tìm ma trận nghịch đảo

1. Ý tưởng

Dựa trên ý tưởng phương pháp Newton (hay còn gọi là phương pháp tiếp tuyến) dùng trong giải phương trình $f(x) = 0$.

Cho số thực $a \neq 0$, tìm x để $ax = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{x}$ với $a \neq 0$. Ta đặt

$$f(x) = a - \frac{1}{x} = 0$$

Theo công thức Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{a - \frac{1}{x_k}}{\frac{1}{x_k^2}}$$

Hay:

$$x_{k+1} = x_k(2 - ax_k) \text{ với } k \in N$$

2. Công thức lặp

Vận dụng ý tưởng trên, xem a là ma trận A , x là ma trận X , cần tìm X sao cho $AX = XA = E$ ta có công thức lặp như sau:

$$X_{k+1} = X_k(2E - AX_k) \text{ với } k \in N$$

Trong đó E là ma trận đơn vị cùng cấp và X_0 là xấp xỉ đầu

3. Điều kiện hội tụ

Ta đặt $G_0 = E - AX_0$, $q = \|G_0\|$

Điều kiện hội tụ của phương pháp là $q < 1$

4. Công thức sai số

$$\|A^{-1} - X_k\| \leq \frac{\|X_0\|}{1 - q} q^{2^k} \leq \epsilon$$

5. Thuật toán

Input: ma trận A , X_0 và sai số $\epsilon(esp)$

Output: Ma trận A^{-1}

Bước 1: Tính q . Kiểm tra nếu $q \geq 1$ thì in ra không sử dụng được phương pháp Newton. Ngược lại, sang bước 2

Bước 2: Gán $q_{2k} = q$, $esp_0 = (1 - q) * esp / ||X_0||$

Bước 3: Lặp với điều kiện dừng $q_{2k} > esp_0$

$$X_0 = X_0(2E - AX_0)$$

$$q_{2k} *= q_{2k}$$

Bước 4: In ra ma trận X_0