Sử dụng phương pháp lặp Jacobi tìm ma trận nghịch đảo

1. **Ý tưởng**

   Dựa vào ý tưởng của phương pháp lặp Jacobi trong giải phương trình $AX = B$. Từ ý tưởng đó ta đó, ta đưa vè giải phương trình $AX = E$. K

2. **Công thức lặp**

   Làm việc với Jacobi là ta làm việc với ma trận chéo trội bao gồm chéo trội hàng và chéo trội cột:

   Ta sử dụng ma trận $T = diag(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \dots, \frac{1}{a_{mm}})$

$$X_{k+1} = (E - T\,A)X_k + T$$

3. **Điều kiện hội tụ**

   Điều kiện hội tụ của phương pháp là $||E - TA|| < 1$, tức là ma trận A phải chéo trội

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{ij}| < |A_{ii}| \;\forall\, i = 1, n \;(chéo\ trội\ hàng)$$

   Hoặc

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{ij}| < |A_{jj}| \;\forall\, j = 1, n \;(chéo\ trội\ cột)$$

4. **Công thức sai số**

   a. **Chéo trội hàng**

      Đặt $B = E - TA$, tồn tại số q thỏa mãn $||B||_\infty \leq q < 1$. Khi đó công thức sai số:

$$||X_k - X^*||_\infty \le \frac{q}{1-q}\left||X_k - X_{k-1}|\right|_\infty$$

$$||X_k - X^*||_\infty \le \frac{q^k}{1-q}||X_1 - X_0||_\infty$$

b. Chéo trội cột

Đặt $B = E - TA$, tồn tại số q thỏa mãn $||B||_\infty \le q < 1, \lambda = \frac{\max |A_{ij}|}{\min |A_{ij}}$. Khi đó công thức sai số:

$$||X_k - X^*||_1 \le \lambda\frac{q}{1-q}\left||X_k - X_{k-1}|\right|_1$$

$$||X_k - X^*||_1 \le \lambda\frac{q^k}{1-q}||X_1 - X_0||_1$$

5. Thuật toán

Input: ma trận A , X_0 và sai số ϵ(esp)

Output: Ma trận A^{-1}

Bước 1: Sử dụng gói kiểm tra chéo trội. Nếu kt_cheo_troi(A) = 0, in ra ma trận không chéo trội, nếu kt_cheo_troi(A) = 1, chuyển sang bước 2, nếu bằng 2 chuyển sang bước 3

Bước 2: Gán $X_1 = BX_0 + T$

chuan = $||X_1 - X_0||_\infty$

esp0 = esp $*$ $(1 - ||B||_\infty)$ / $||X_1 - X_0||_\infty$

Bước 3: Ta sử dụng gói tính lamda λ

Gán $X_1 = BX_0 + T$

chuan = $||X_1 - X_0||_1$

$$\text{esp0} = \text{esp} * \ (1 \ - ||B||_1) \ /(\ ||X_1 - X_0||_1 * \ \lambda)$$

Bước 4: Gán tich = chuan

Lặp với điều kiện dừng tich > esp0

tich *= chuan;

$X_0 = \ X_1;$

$X_1 = BX_0 + T$

Bước 4: In ra ma trận X_1