Lý thuyết tập hợp
(Set theory)

Ý nghĩa và định nghĩa

- ☞ Tập hợp là cấu trúc rời rạc cơ bản để xây dựng các cấu trúc rời rạc khác
- ☞ Được dùng để nhóm các đối tượng có cùng những tính chất tương tự

> **Một tập hợp là một bộ các đối tượng mà thứ tự của chúng không quan trọng và tính bội (multiplicity) bị bỏ qua.**
> (Concise Encyclopedia of Mathematics)

> **Các đối tượng trong tập hợp được gọi là phần tử, và tập hợp chứa các phần tử.**

Ví dụ và Ký hiệu

Ví dụ:

- Tập các sinh viên lớp toán rời rạc
- Tập tất cả các môn học trong chương trình CS&CE
- Tập các môn học bắt buộc của chương trình CS&CE
- Tập các môn học tự chọn của chương trình CS&CE
- Tập các số nguyên $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{R} = \{x|$x là số thực$\}$

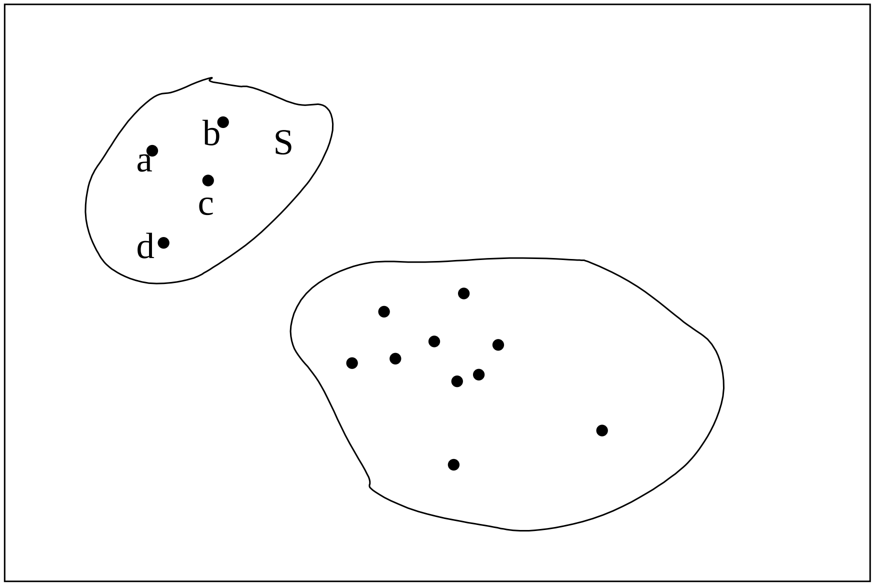
☞ $S = \{a, b, c, d\}$ **ký hiệu tập hợp các phần tử** a, b, c, d**.**

☞ $a \in S$ **ký hiệu** a **là một phần tử của** S**.**

☞ $a \notin S$ **ký hiệu** a **không chứa trong** S**.**

Giản đồ Venn

- John Venn (1981)
- Không gian tất cả các đối tượng đang xét biểu diễn bằng hình chữ nhật
- Hình tròn hoặc hình học khác biểu diễn tập hợp
- Các điểm biểu diễn phần tử



Sự bằng nhau của tập hợp

Hai tập hợp là bằng nhau nếu và chỉ nếu chúng có cùng phần tử

Ví dụ:

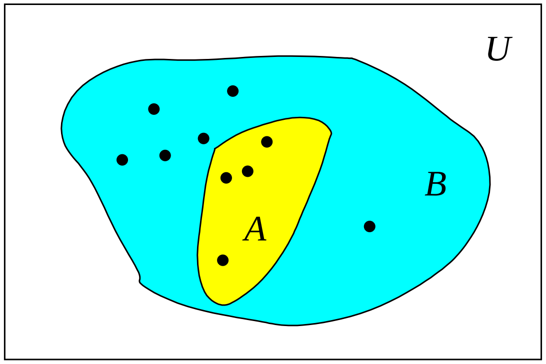
$\{1,4,5\} = \{4,1,5\}$

$\{1,3,5,5,1\} = \{1,3,5\}$

Tập con (subset)

Tập A là tập con của tập B nếu và chỉ nếu mọi phần tử của A cũng là phần tử của B.
Ký hiệu $A \subseteq B$.
Nếu $A \neq B$ thì ta có ký hiệu $A \subset B$, tập con thực sự.

Ví dụ: $\{10, 9, 8\} \subseteq \mathbb{Z}$



Tập rỗng là tập hợp không có phần tử nào.
Ký hiệu $\emptyset$, $\{\}$.
Rõ ràng $\emptyset \subseteq S$, với mọi tập hợp S.

Bản số (cardinality)

Nếu tập hợp S có chính xác n phần tử phân biệt, với n là số nguyên không âm, thì ta gọi S là tập hữu hạn có bản số là n.
Ký hiệu $|S| = n$.

Ví dụ:

- A là tập các số nguyên dương lẻ nhỏ hơn 10, ta có $|A| = 5$.
- B là tập các sinh viên lớp toán rời rạc này, ta có $|B| = 109$.
- $|\emptyset| = 0$.

Tập vô hạn (infinite) là tập không hữu hạn.

Tập hợp lũy thừa (power set)

☞ **Những tổ hợp của các phần tử của một tập hợp**

Cho tập S, tập lũy thừa của S là tập của tất cả các tập con của S. Ký hiệu là $P(S)$.

Ví dụ:

➠ **Tập lũy thừa của tập $S = \{1, 2, 3\}$ là**

$$P(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

➠ **Tập lũy thừa của $\emptyset$ và $\{\emptyset\}$**

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}, \text{ và } P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Tập hợp lũy thừa (power set)

Số phần tử của một tập hợp lũy thừa của tập S có n phần tử là 2^n.

➾ **Sinh viên hãy chứng minh bằng quy nạp toán học**

Dãy sắp thứ tự (ordered n-tuples)

☞ **Thứ tự của các phần tử trong tập hợp nhiều khi quan trọng.**

Dãy sắp thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ **là một bộ sắp thứ tự, có** a_1 **là phần tử thứ nhất,** a_2 **là phần tử thứ hai,** $\ldots$**,** a_n **là phần tử thứ** n**.**

Hai dãy sắp thứ tự $(a_1, \ldots, a_n)$ **và** $(b_1, \ldots, b_n)$ **là bằng nhau khi và chỉ khi** $a_i = b_i, \forall i = 1, \ldots, n$**.**
Dãy gồm 2 phần tử gọi là cặp.

Tích Đề các (Cartesian product) (1)

☞ **René Descartes (1596-1650)**

Cho A, B là 2 tập hợp. Tích Đề các của A và B được định nghĩa như sau,

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

Ví dụ: $A = \{0,1\}$ **và** $B = \{a,b,c\}$. **Khi đó**

$$A \times B = \{(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,b),(1,c)\}$$

Tích Đề các (Cartesian product) (2)

Ví dụ: **Tích Đề các sau nghĩa là gì?**
A **là tập các sinh viên của 1 trường ĐH,** B **là tập tất cả các môn học trong chương trình đào tạo của trường.**

Tổng quát tích Đề các của n tập hợp,

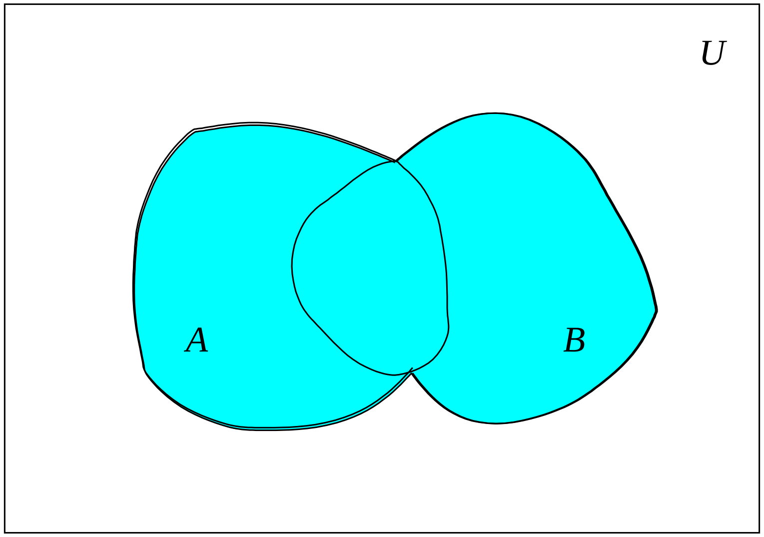
$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n =$$

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

Hợp/Giao tập hợp

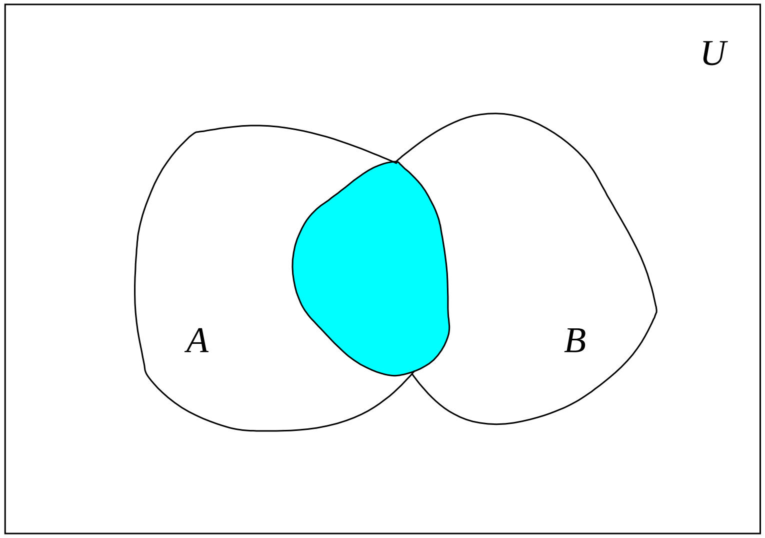
Hợp (union) của A và B được định nghĩa là

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



Giao (intersection) của A và B được định nghĩa là

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



Ví dụ Hợp/Giao tập hợp

Ví dụ: **Cho 2 tập hợp** $A = \{1, 3, 5\}$ **và** $B = \{1, 2, 3\}$.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$A \cap B = \{3\}$$

Cho $C = \{4, 5\}$.

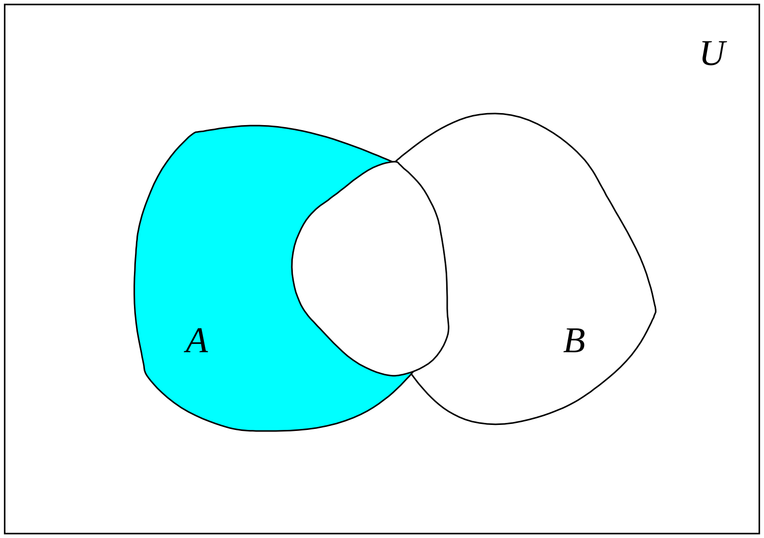
$$B \cap C = \emptyset$$

Hai tập được gọi là rời nhau (disjoint) nếu giao của chúng là rỗng.

Hiệu/Phần bù của tập hợp

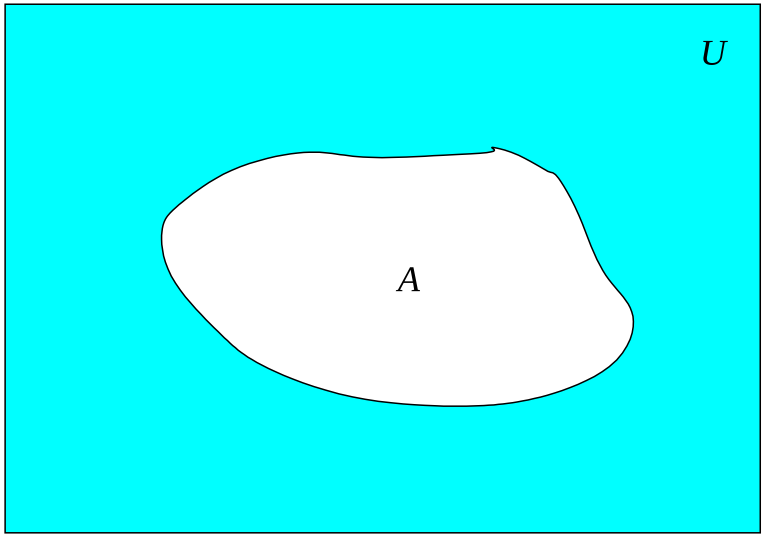
Hiệu **(difference) của** A **và** B **được định nghĩa là**

$$A - B = \{x | x \in A \land x \notin B\}$$



Phần bù **(complement) của** A **được định nghĩa là**

$$\overline{A} = \{x | x \notin A\}$$



Ví dụ Hiệu/Phần bù tập hợp

Ví dụ: **Cho 2 tập hợp** $A = \{1,3,5\}$ **và** $B = \{1,2,3\}$**. Tập vũ trụ** $U = \{x | x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x < 10\}$**.**

$$A - B = \{1,5\}$$

$$\overline{A} = \{2,4,6,7,8,9\}$$

Hằng đẳng thức tập hợp

Hằng đẳng thức	Tên gọi
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	**Luật đồng nhất**
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	**Luật nuốt**
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	**Luật lũy đẳng**
$\overline{(\overline{A})} = A$	**Luật bù**

Hằng đẳng thức	Tên gọi
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	**Luật giao hoán**
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	**Luật kết hợp**
$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	**Luật phân phối**
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	**Luật De Morgan**

Chứng minh tập hợp bằng nhau

- **Một cách chứng minh 2 tập A, B bằng nhau là chứng minh**

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

- **Chỉ rõ các thuộc tính đặc trưng và các tương đương logic**
- **Dùng bảng tính thuộc (membership table)**

Ví dụ chứng minh (1)

Ví dụ: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Chứng minh 1: Giả sử $x \in \overline{A \cap B}$.

Suy ra $x \notin (A \cap B)$.

Kéo theo $x \notin A$ **hoặc** $x \notin B$.

Suy ra $x \in \bar{A}$ **hoặc** $x \in \bar{B}$.

Tức là $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

Ví dụ chứng minh (2)

Ví dụ: **Như trên.**

Chứng minh 2:

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x | x \notin A \cap B\} \\
&= \{x | \neg(x \in A \cap B)\} \\
&= \{x | \neg(x \in A \wedge x \in B)\} \\
&= \{x | \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} \\
&= \{x | x \notin A \vee x \notin B\} \\
&= \{x | x \in \bar{A} \vee x \in \bar{B}\} \\
&= \{x | x \in \bar{A} \cup \bar{B}\}
\end{aligned}
$$

Ví dụ chứng minh (3)

Ví dụ: Như trên.

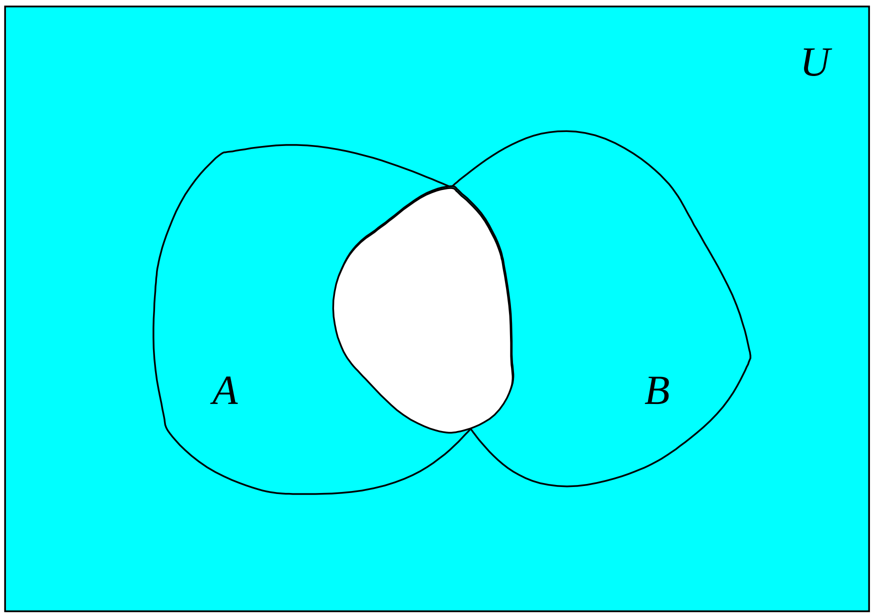
Chứng minh 3:

A	B	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\bar{A} \cup \bar{B}$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Ví dụ chứng minh (4)

Ví dụ: Như trên.

Chứng minh 4: dùng giản đồ Venn.



Tổng quát hóa

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \cup_{i=1}^{n} A_i$$
$$= \{x | x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \cap_{i=1}^{n} A_i$$
$$= \{x | x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}$$

Biểu diễn tập hợp trong máy tính

☞ Biểu diễn các phần tử bằng một danh sách **không có thứ tự**

$\Rightarrow$ **Không hiệu quả** với các phép toán tập hợp

☞ Dùng chuỗi các bit để biểu diễn sự tồn tại của 1 phần tử trong tập hợp.

- Xét tập vũ trụ U có n phần tử. Ví dụ $U = \{a, b, c, d, e\}$
- Mỗi tập $A \subseteq U$ có thể biểu diễn bằng chuỗi gồm n bit. Ví dụ $A = \{a, d, e\}$ được biểu diễn là 10011.
- Nếu n **lớn** thì sao ?

☞ Dùng một danh sách **có thứ tự**