Phân tích & thiết kế thuật toán

Nhân nhanh đa thức sử dụng Fast Fourier Transform

Giảng viên: TS. Đỗ Phan Thuận
Sinh viên: Tạ Quang Tùng
Lớp: KSTN-CNTT-K60

Outline

- Nhân đa thức và liên hệ với biến đổi Fourier rời rạc.
- Thuật toán FFT.
- Bài toán "A plus B".
- Bài toán "Nikita and Order Statistics”.

Nhân đa thức

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{m-1} x^{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i$$

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$$

$$P(x) \times Q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{p-1} x^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} c_k x^k$$

$$\Rightarrow c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \times b_{k-i}$$

Với: $\quad i \leq m - 1$

Và: $\quad k - i \leq n - 1 \Leftrightarrow i \geq k - n + 1$

Hay: $$c_k = \sum_{i=\max(0,k-n+1)}^{\min(k,m-1)} a_i \times b_{k-i} \qquad \forall k = \overline{0, m+n-2}$$

Thời gian tính toán: $\mathcal{O}\left(m \times n\right)$

Liên hệ với biến đổi Fourier rời rạc

Đặt:

$$p = m + n - 1$$

$$N = 2^{\lceil \log_2(p) \rceil}$$

$$W_u = e^{-j\frac{2\pi u}{N}}$$

Ta có:

$$P(W_u) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i W_u^i$$

$$Q(W_u) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j W_u^j$$

$$P(W_u) \times Q(W_u) = \sum_{k=0}^{p-1} c_k W_u^k$$

Và:

Nếu đặt:

$$a_i = 0 \quad \forall i = \overline{m, N-1}$$
$$b_j = 0 \quad \forall j = \overline{n, N-1}$$
$$c_k = 0 \quad \forall k = \overline{p, N-1}$$

Thì ta có:

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \times b_{k-i} \qquad \forall k = \overline{0, N-1}$$

$$P(W_u) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i W_u^i = \mathcal{F}[a_i]_u$$

$$Q(W_u) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i W_u^i = \mathcal{F}[b_i]_u$$

$$P(W_u) \times Q(W_u) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i W_u^i = \mathcal{F}[c_i]_u$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow c_i &= \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[c_i]_u\right]_i \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[P(W_u) \times Q(W_u)\right]_i \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[a_i]_u \times \mathcal{F}[b_i]_u\right]_i\end{aligned}$$

Thời gian tính toán:

$$\mathcal{F}[a_i]_u \qquad \mathcal{O}(N \log N)$$

$$\mathcal{F}[b_i]_u \qquad \mathcal{O}(N \log N)$$

$$P(W_u) \times Q(W_u) \qquad \mathcal{O}(N)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[P(W_u) \times Q(W_u)]_i \qquad \mathcal{O}(N \log N)$$

Tổng: $\quad \mathcal{O}(N \log N) < \mathcal{O}\left(m \times n\right)$

Thuật toán biến đổi fourier nhanh - FFT

$$X_u = \mathcal{F}[x_i]_u = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j\frac{2\pi iu}{N}}$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2i} e^{-j\frac{2\pi 2iu}{N}} + \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2i+1} e^{-j\frac{2\pi(2i+1)u}{N}}$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2i} e^{-j\frac{2\pi iu}{N/2}} + e^{-j\frac{2\pi u}{N}} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2i+1} e^{-j\frac{2\pi iu}{N/2}}$$

Đặt: a_i là dãy các số có chỉ số chẵn lấy ra từ x_i.

b_i là dãy các số có chỉ số lẻ lấy ra từ x_i.

Ta có:

$$\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2i} e^{-j\frac{2\pi iu}{N/2}} = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} a_i e^{-j\frac{2\pi iu}{N/2}}$$

$$= \mathcal{F}[a_i]_u \qquad \left(\text{Có } \frac{N}{2} \text{ phần tử}\right)$$

$$u = \overline{0, N-1}$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2i+1} e^{-j\frac{2\pi iu}{N/2}} = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} b_i e^{-j\frac{2\pi iu}{N/2}}$$

$$= \mathcal{F}[b_i]_u \qquad \left(\text{Có } \frac{N}{2} \text{ phần tử}\right)$$

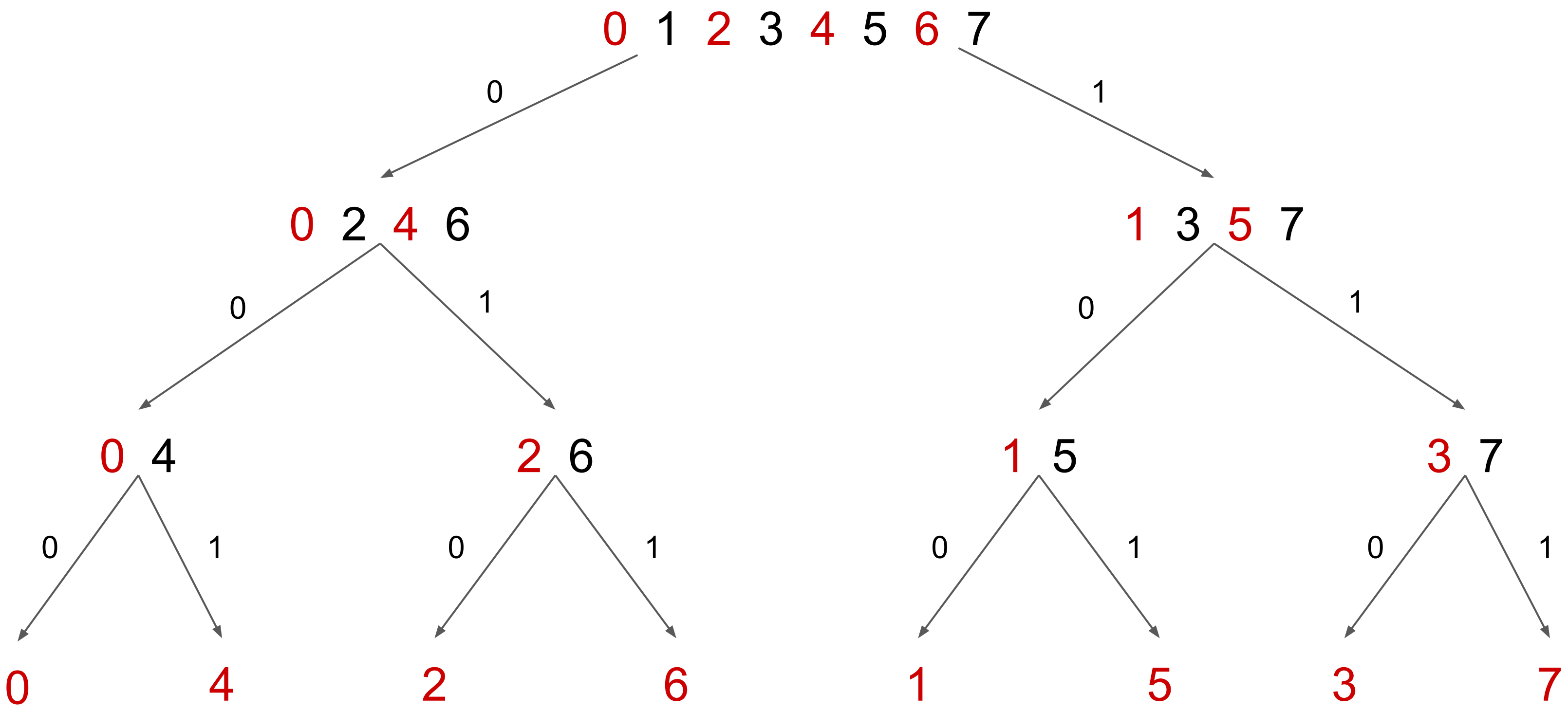
$$e^{-j\frac{2\pi iu}{N/2}} = e^{-j\frac{2\pi iu}{N/2} + j2\pi i}$$

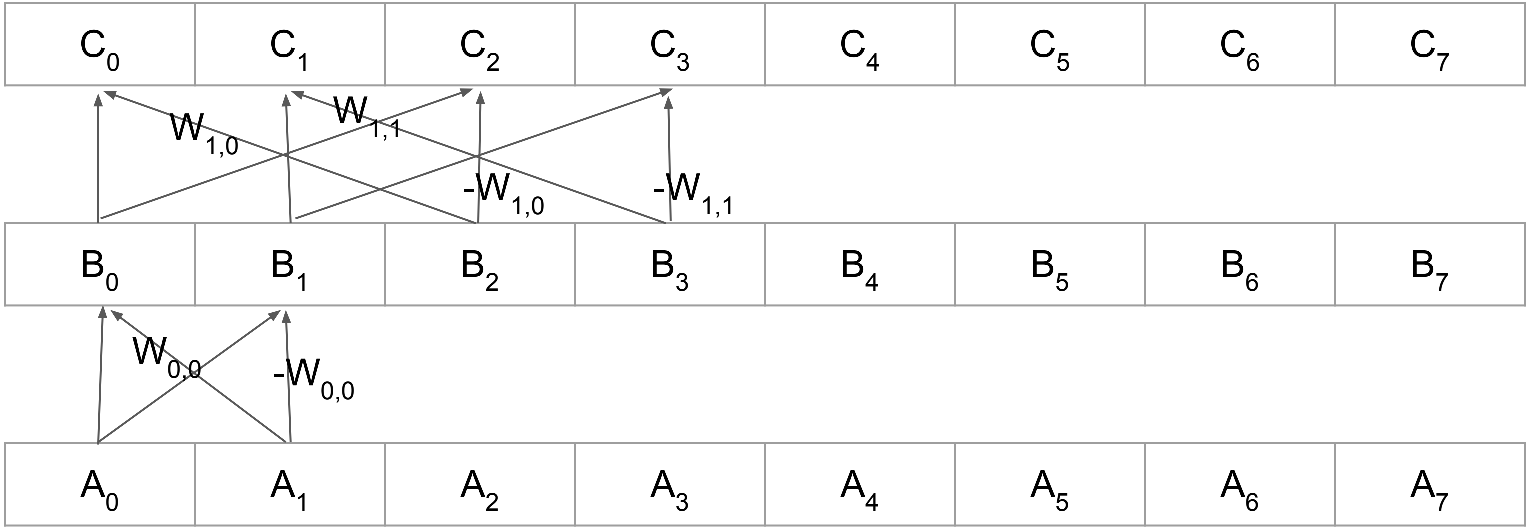
$$= e^{-j\frac{2\pi i(u-N/2)}{N/2}}$$

Từ đó:

Nếu xét với $u = \overline{0, \frac{N}{2} - 1}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[x_i]_u &= \mathcal{F}[a_i]_u + e^{-j\frac{2\pi u}{N}}\mathcal{F}[b_i]_u \\
\mathcal{F}[x_i]_{u+N/2} &= \mathcal{F}[a_i]_u + e^{-j\frac{2\pi(u+N/2)}{N}}\mathcal{F}[b_i]_u \\
&= \mathcal{F}[a_i]_u - e^{-j\frac{2\pi u}{N}}\mathcal{F}[b_i]_u
\end{aligned}$$


0 1 2 3 4 5 6 7
0
1
0 2 4 6
1 3 5 7
0
1
0
1
0 4
2 6
1 5
3 7
0
1
0
1
0
1
0
1
0
4
2
6
1
5
3
7



$$W_{s,u} = e^{-j\frac{2\pi u}{2(1 \ll s)}}$$

$$\mathcal{F}[x_i]_u = \mathcal{F}[a_i]_u + e^{-j\frac{2\pi u}{N}}\mathcal{F}[b_i]_u$$
$$\mathcal{F}[x_i]_{u+N/2} = \mathcal{F}[a_i]_u - e^{-j\frac{2\pi u}{N}}\mathcal{F}[b_i]_u$$

POST2 - A cộng B version 2

Giới hạn

- **Thời gian:** 0.25s
- **Bộ nhớ:** 1536MB
- **Mã nguồn:** 50000 bytes

Cho 3 dãy N số nguyên A1, A2, ..., An, B1, B2, ..., Bn và C1, C2, ..., Cn. Hãy đếm số bộ 3 (Ai,Bj,Ck) thỏa mãn Ai + Bj = Ck.

Input

- Dòng đầu ghi số N. ($N <= 10^5$)

- Dòng thứ 2 ghi N số nguyên có giá trị tuyệt đối không vượt quá 50000 thể hiện dãy A.

- Dòng thứ 3 và thứ 4 lần lượt ghi dãy B và C theo quy cách tương tự.

Output

- Số bộ 3 thỏa mãn.

Ý tưởng lời giải

- Mỗi giá trị của các dãy nằm trong khoảng từ -50,000 đến 50,000.
- => Có nhiều nhất 100,001 giá trị.
- Mỗi dãy A, B, C có thể đại diện bằng một vector (nguyên) 100,001 chiều.
- Gọi U, V, W lần lượt là 3 vector đó.
- Số các bộ 3 thỏa mãn là tổng:

$$\sum_{k=-n}^{n} W_k \sum_{i=-n}^{k} U_i \times V_{k-i}$$

Với: $k - i \leq n \Leftrightarrow i \geq k - n$

$(n = 50000)$

Thời gian tính

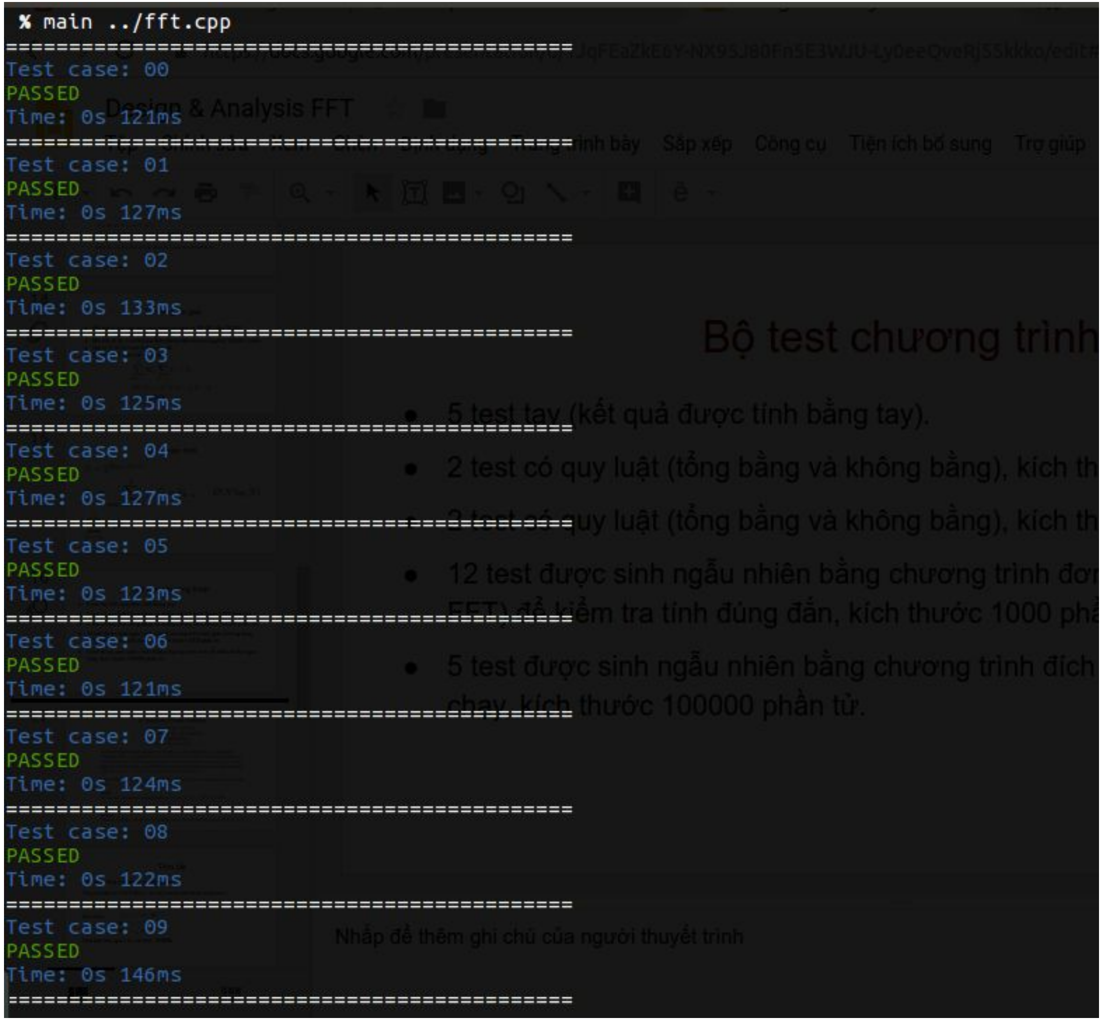
$$N = 2^{\lceil \log_2(4n+1) \rceil}$$

$$R_k = \sum_{i=\max(-n,k-n)}^{k} U_i \times V_{k-i} \qquad \mathcal{O}(N \log N)$$

$$\sum_{k=-n}^{n} W_k R_k \qquad \mathcal{O}(n)$$

Bộ test chương trình

- 5 test tay (kết quả được tính bằng tay).
- 2 test có quy luật (tổng bằng và không bằng), kích thước 1000 phần tử.
- 2 test có quy luật (tổng bằng và không bằng), kích thước 100000 phần tử.
- 12 test được sinh ngẫu nhiên bằng chương trình đơn giản (không dùng FFT) để kiểm tra tính đúng đắn, kích thước 1000 phần tử.
- 5 test được sinh ngẫu nhiên bằng chương trình đích để kiểm tra thời gian chạy, kích thước 100000 phần tử.


% main ../fft.cpp
==
Test case: 00
PASSED
Time: 0s 121ms
==
Test case: 01
PASSED
Time: 0s 127ms
==
Test case: 02
PASSED
Time: 0s 133ms
==
Test case: 03
PASSED
Time: 0s 125ms
==
Test case: 04
PASSED
Time: 0s 127ms
==
Test case: 05
PASSED
Time: 0s 123ms
==
Test case: 06
PASSED
Time: 0s 121ms
==
Test case: 07
PASSED
Time: 0s 124ms
==
Test case: 08
PASSED
Time: 0s 122ms
==
Test case: 09
PASSED
Time: 0s 146ms
==

```
============================================
Test case: 16
PASSED
Time: 0s 121ms
============================================
Test case: 17
PASSED
Time: 0s 137ms
============================================
Test case: 18
PASSED
Time: 0s 119ms
============================================
Test case: 19
PASSED
Time: 0s 119ms
============================================
Test case: 20
PASSED
Time: 0s 120ms
============================================
Test case: 21
PASSED
Time: 0s 161ms
============================================
Test case: 22
PASSED
Time: 0s 162ms
============================================
Test case: 23
PASSED
Time: 0s 167ms
============================================
Test case: 24
PASSED
Time: 0s 167ms
============================================
Test case: 25
PASSED
Time: 0s 164ms
```

https://vn.spoj.com/status/

Sphere online judge

Giải bài trực tuyến PROFILE

- News
- Problems
  - acm
  - challenge
  - main
  - oi
  - tutorial
- Status
- Ranking
- Forum
- info
- rules
- links

Biên bản chấm bài

Xem lại 1 2 3 4 5 Xem tiếp >

ID	GIỜ NỘP	Tài khoản:	PROBLEM	RESULT	TIME	MEM	NGÔN NGỮ
22818945	2018-12-04 11:55:08	Tung Quang	A cộng B version 2	accepted edit run	0.09	31M	CPP14
22818934	2018-12-04 11:51:51	Ngọt	Pha chế	93.33	0.09	17M	CPP14
22818927	2018-12-04 11:50:40	Ngọt	Pha chế	0	0.00	0k	CPP14
22818923	2018-12-04 11:49:55	hoangkings100	Đi xem phim	100	0.00	2.7M	C++ 4.3.2
22818907	2018-12-04 11:47:32	hoangkings100	Đi xem phim	90 WA-test-4	0.00	2.7M	C++ 4.3.2
22818840	2018-12-04	Ngọt	Pha chế	6.67	0.02	18M	CPP14

E. Nikita and Order Statistics

time limit per test: 2 seconds

memory limit per test: 256 megabytes

input: standard input

output: standard output

Nikita likes tasks on order statistics, for example, he can easily find the k-th number in increasing order on a segment of an array. But now Nikita wonders how many segments of an array there are such that a given number x is the k-th number in increasing order on this segment. In other words, you should find the number of segments of a given array such that there are exactly k numbers of this segment which are less than x.

Nikita wants to get answer for this question for each k from 0 to n, where n is the size of the array.

Input

The first line contains two integers n and x $(1 \le n \le 2 \cdot 10^5, -10^9 \le x \le 10^9)$.

The second line contains n integers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(-10^9 \le a_i \le 10^9)$ — the given array.

Output

Print $n + 1$ integers, where the i-th number is the answer for Nikita's question for $k = i - 1$.

Tóm tắt

Cho một mảng n phần tử và một giá trị x.

Ứng mỗi giá trị k từ 0 đến n, tìm số lượng các đoạn (segment)

mà có đúng k giá trị trong đoạn đó là nhỏ hơn x.

Điều kiện:

$$1 \leq n \leq 2 \times 10^5$$
$$-10^9 \leq a_i \leq 10^9$$
$$-10^9 \leq x \leq 10^9$$

Giới hạn thời gian: 2s, bộ nhớ: 256MB.

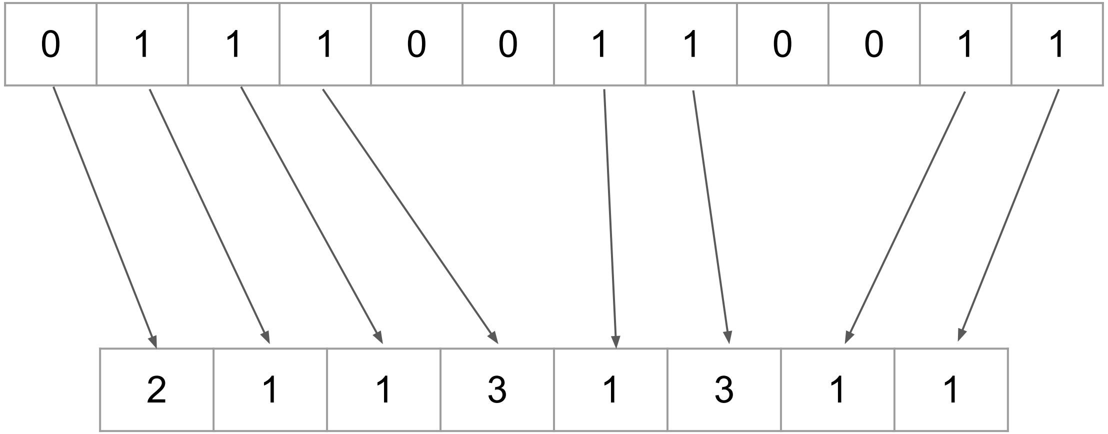
Ý tưởng lời giải

Chuyển mảng đầu vào thành chuỗi nhị phân, ví dụ với x = 3

3	1	2	-1	5	6	2	1	4	3	2	2

0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1

Gọi C_j là số các phần tử 0 sau phần tử 1 thứ j, cộng 1. $(j = \overline{1, m})$ và C_0 là phần tử 0 bắt đầu xâu M, cộng 1.



Số các segment từ vị trí thứ j của số 1, ứng với k số 1 là:

$$C_{j-1} \times C_{j-1+k}$$

$\Rightarrow$ Tổng số segment ứng với mỗi k:

$$X_k = \sum_{j=1}^{m+1-k} C_{j-1} \times C_{j-1+k}$$

$$= \sum_{p=0}^{m-k} C_p \times C_{p+k}$$

Gọi D là dãy nghịch đảo của C.

Hay: $D_i = C_{m-i} \quad \forall i = \overline{0, m}$

Ta có:

$$C_{p+k} = D_{m-k-p}$$

$$\Rightarrow X_k = \sum_{p=0}^{m-k} C_p \times C_{p+k}$$

$$= \sum_{p=0}^{m-k} C_p \times D_{m-k-p}$$

Nếu đặt:

$$P(x) = \sum_{p=0}^{m-k} C_p x^p$$

$$Q(x) = \sum_{p=0}^{m-k} D_p x^p$$

Thì X_k chính là hệ số của x^{m-k} của đa thức $P(x) \times Q(x)$

Bộ test chương trình

- 6 test tay (kết quả được tính bằng tay), bao gồm một số test trên Codeforces.
- 2 test có quy luật (đều nhỏ hơn x và đều lớn hơn x), kích thước 20000 phần tử.
- 2 test có quy luật (đều nhỏ hơn x và đều lớn hơn x), kích thước 200000 phần tử.
- 10 test được sinh ngẫu nhiên bằng chương trình đơn giản (không dùng FFT) để kiểm tra tính đúng đắn, kích thước 20000 phần tử.
- 10 test được sinh ngẫu nhiên bằng chương trình đích để kiểm tra thời gian chạy, kích thước 200000 phần tử.

```
tung@tung-X550CC ~/Desktop/design-algorithms/test-runner/build
 % main ../993E.cpp
=============================================
Test case: 00
PASSED
Time: 0s 0ms
=============================================
Test case: 01
PASSED
Time: 0s 0ms
=============================================
Test case: 02
PASSED
Time: 0s 0ms
=============================================
Test case: 03
PASSED
Time: 0s 0ms
=============================================
Test case: 04
PASSED
Time: 0s 0ms
=============================================
Test case: 05
PASSED
Time: 0s 0ms
=============================================
Test case: 06
PASSED
Time: 0s 31ms
=============================================
Test case: 07
PASSED
Time: 0s 29ms
=============================================
Test case: 08
PASSED
Time: 0s 309ms
=============================================
```

```
==========================================
Test case: 20
PASSED
Time: 0s 349ms
==========================================
Test case: 21
PASSED
Time: 0s 349ms
==========================================
Test case: 22
PASSED
Time: 0s 364ms
==========================================
Test case: 23
PASSED
Time: 0s 373ms
==========================================
Test case: 24
PASSED
Time: 0s 351ms
==========================================
Test case: 25
PASSED
Time: 0s 359ms
==========================================
Test case: 26
PASSED
Time: 0s 376ms
==========================================
Test case: 27
PASSED
Time: 0s 358ms
==========================================
Test case: 28
PASSED
Time: 0s 345ms
==========================================
Test case: 29
PASSED
Time: 0s 361ms
tung@tung-X550CC ~/Desktop/design-algorithms/test-runner/build
```

46203281	2018-11-25 15:47:12	quangtung97	E - Nikita and Order Statistics	GNU C++17	**Accepted**	296 ms	30500 KB
46203052	2018-11-25 15:40:09	quangtung97	E - Nikita and Order Statistics	GNU C++17	**Accepted**	296 ms	30500 KB
46202983	2018-11-25 15:37:31	quangtung97	E - Nikita and Order Statistics	GNU C++17	**Accepted**	592 ms	30500 KB
46202786	2018-11-25 15:30:52	quangtung97	E - Nikita and Order Statistics	GNU C++17	**Accepted**	686 ms	39900 KB
46202450	2018-11-25 15:17:54	quangtung97	E - Nikita and Order Statistics	GNU C++17	**Accepted**	701 ms	35200 KB
46202129	2018-11-25 15:06:40	quangtung97	E - Nikita and Order Statistics	GNU C++17	**Accepted**	982 ms	35200 KB
46201978	2018-11-25 15:01:23	quangtung97	E - Nikita and Order Statistics	GNU C++17	**Accepted**	888 ms	35200 KB
46201844	2018-11-25 14:56:43	quangtung97	E - Nikita and Order Statistics	GNU C++17	Wrong answer on test 9	31 ms	18800 KB
46201794	2018-11-25 14:54:38	quangtung97	E - Nikita and Order Statistics	GNU C++17	**Accepted**	857 ms	35200 KB
46201721	2018-11-25 14:51:28	quangtung97	E - Nikita and Order Statistics	GNU C++17	Compilation error	0 ms	0 KB
46198234	2018-11-25 12:39:51	quangtung97	E - Nikita and Order Statistics	GNU C++17	Time limit exceeded on test 12	2000 ms	2400 KB
[illegible]	2018-11-14	[illegible]	[illegible]	GNU	[illegible]	[illegible]	[illegible]

THANKS FOR LISTENING!