Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Báo cáo bài tập lớn môn học:

Hệ trợ giúp quyết định

Calculations of Zadeh's Extension of Piecewise Linear Functions

---

Sinh viên thực hiện:
Tạ Quang Tùng
MSSV: 20154280

Giáo viên hướng dẫn:
PGS.TS. Phạm Văn Hải

Hà Nội, Ngày 19 tháng 12 năm 2019

Mục lục

1 Giới thiệu

Nguyên lý mở rộng của Zadeh (Zadeh's extension principle) chiếm một phần quan trọng trong toán học mờ bởi vì khả năng dễ dàng mở rộng rất nhiều những phép toán cổ điển (không phải mờ) sang thàng các phép toán mờ tương ứng [4].

Nguyên lý mở rộng này cũng có thể được sử dụng để mở rộng hàm giá trị một biến, bằng việc sử dụng công thức sau:

$$(z_f(A))(x) = \sup_{y \in f^{-1}(x)} \{A(y)\} \tag{1}$$

mỗi ánh xạ $f : X \to Y$ định nghĩa duy nhất một ánh xạ: $z_f : \mathbb{F}(X) \to \mathbb{F}(Y)$, trong đó $\mathbb{F}(X)$ (tương ứng $\mathbb{F}(Y)$) là một lớp tương ứng các tập mờ định nghĩ trên X.

Biểu thức (1) có thể được sử dụng để mở rộng lý thuyết các hệ động học. Cặp (X, f) với X là không gian topo (topological space) và $f : X \to X$ là ánh xạ liên tục được gọi là một hệ động học rời rạc (*discrete dynamical system*). Kloeden trong bài báo [3] đã đề xuất một mô hình toán học kết nối giữa lý thuyết của hệ động học (không mờ) sang lý thuyết hệ động học mờ. Bằng việc sử dụng mô hình này và phương trình (1), cho bất kì một hệ động học (X, f), ta có thể suy ra hệ động học mờ $(\mathbb{F}(X), z_f)$, từ đó ta có thể nghiên cứu các tính chất của các hệ động lực mờ từ những tính chất đã được nghiên cứu hàng thập kỷ cho các hệ động học cổ điển. Đã có nhiều bài báo khoa học nghiên cứu về topic này như [1], [2], [3] TODO.

Tuy nhiên, vấn đề thường xuyên xảy ra khi mà cần tính toán phương trình (1) các bài toán ứng dụng. Nhìn chung các bài toán liên quan đến nguyên lý mở rộng Zadeh đều có thể là những bài toán khó TODO. Sự khó khăn đến từ việc tính hàm ngược f^{-1} tại điểm bất kì. Do đó, rất nhiều nhóm nghiên cứu đã đề xuất nhiều cách tiếp cận khác nhau để tìm giá trị xấp xỉ của ảnh của tập mờ khi áp dụng nguyên lý mở rộng của Zadeh.

Trong báo cáo này ta chỉ chú ý tới những tập mờ đặc biệt có tên: *piecewise linear fuzzy set*. Với các loại tập mờ này, giải thuật được đề xuất có thể được sử dụng để tính nguyên lý mở rộng Zadeh. Khác với các cách tiếp cận đã có, cách tiếp cận này không phải là phương pháp xấp xỉ mà là phương pháp tính toán chính xác áp dụng cho hệ động lực mờ. Mặc dù ta không xét đến các ánh xạ liên tục bất kì mà chỉ cho các ánh xạ piecewise linear. Tuy nhiên tập các ánh xạ piecewise linear này là *dense* trong tập các ánh xạ liên tục nên có thể xấp xỉ một ánh xạ liên lục bất kì với sai số nhỏ tùy ý. Đồng thời cách tiếp cận này có thể áp dụng cho các ánh xạ không liên tục.

2 Khái niệm cơ bản

2.1 Các khái niệm trên tập mờ

Xét tập X không rỗng bất kì và (X, d_X) là một *compact metrix space*. Một tập mờ A trên tập X được định nghĩa như là một ánh xạ: $A : X \to [0, 1]$ và với mỗi điểm $x \in X$, giá trị $A(x)$ được gọi là *membership degree* của x.

Support của tập mờ A được đĩnh nghĩa là lấy *topological closure* của $\{x \in X | A(x) > 0\}$. Tập $\mathbb{F}(X)$ là tập các ánh xạ $A : X \to [0, 1]$ sao cho A là ánh xạ *upper semi-continuous* và tập *support* là *compact*. Tập $\mathbb{F}(X)$ có những điều kiện như vậy để có thể định nghĩa được một *metric* trên đó.

Hơn nữa, với $\alpha \in (0, 1]$, một *α-cut* của A là tập $[A]_\alpha = \{x \in X | A(x) \geq \alpha\}$. Một tập mờ A được gọi là *normal* nếu như $\exists x \in X, A(x) = 1$. Nếu tập mờ A là *upper semi-continuous* thì mọi *α-cut* là một tập con *đóng* của X.

Tập tất cả các tập tập mờ *normal* và *upper semi-continuous* trên tập X được ký hiệu là $\mathbb{F}^1(X)$ và $\mathbb{F}^1_1(X)$ được định nghĩa là tập các *số mờ* trên X – là tập $\mathbb{F}^1_1(X) \subset \mathbb{F}^1(X)$ các tập mờ mà trong đó mọi α*-cut* đều là tập con *topologically connected* của X.

2.2 Metric trên $\mathbb{F}(X)$

Metric trên $\mathbb{F}(X)$ thường được định nghĩa dựa vào *Hausdorff metric* D_X giữa hai tập con $E, F \in \mathbb{K}(X)$ TODO, trong đó $\mathbb{K}(X)$ là tập các tập con đóng của X. Đây là lý do tại sao ta chỉ xét các tập mờ *upper semi-continuous*, bởi vì khi đó mọi α*-cut* đều là các tập đóng. *Hausdorff metric* được định nghĩa như sau:

$$D_X(E,F) = \inf\{\varepsilon > 0 | E \subset U_\varepsilon(F), F \subset U_\varepsilon(E)\}$$

trong đó

$$U_\varepsilon(E) = \{x \in X | D(x,E) < \varepsilon\}$$

và

$$D(x,E) = \inf_{e \in E} d_X(x,e)$$

Từ đó ta có thể định nghĩa metric d_∞ (còn được gọi là *supremum metric*) như sau:

$$d_\infty = \sup_{\alpha \in (0,1]} D_X([E]_\alpha, [F]_\alpha)$$

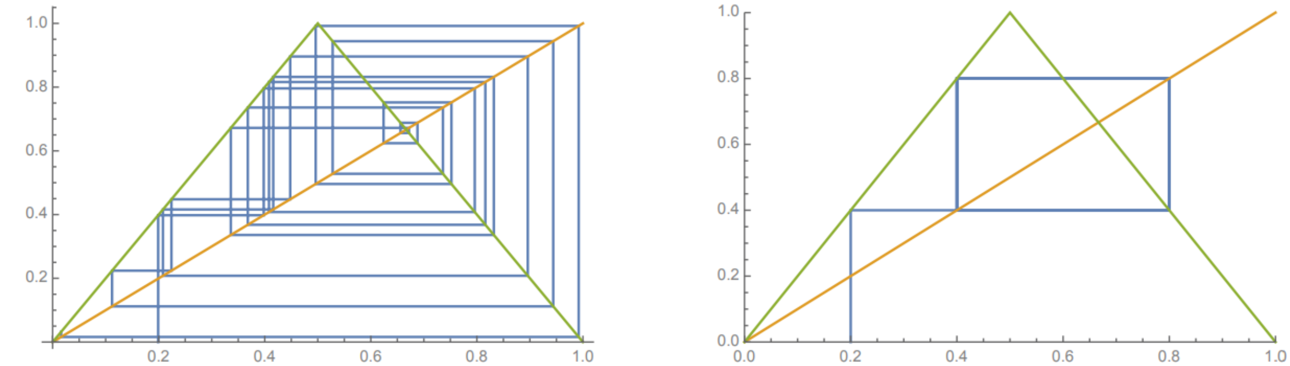
với mọi $E, F \in \mathbb{F}^1(X)$

2.3 Hệ động học

Một hệ động học (rời rạc) là một bộ (X, f) trong đó X là một *metric space* và $f : X \to Y$ là một ánh xạ liên tục.

Tại một điểm cố định bất kỳ $x \in X$, ta xét một dãy $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ bao gồm các giá trị được định nghĩa quy nạp bởi $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x)$ và $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Dãy giá trị này còn được gọi là *quỹ đạo* của x qua ánh xạ f. Điểm từ tập X có thể được mô tả bằng các tính chất của quỹ đạo. Ví dụ, điểm $x \in X$ được gọi là điểm cố định (*fixed point*) của f nếu như $f(x) = x$. Điểm $x \in X$ được gọi là điểm tuần hoàn của f nếu như tồn tại $n \in \mathbb{N}, n > 0$ sao cho $f^n(x) = x$. Ví dụ dưới đây mô tả một hệ mà thay đổi nhỏ giá trị khởi tạo có thể dẫn đến thay đổi lớn hành vi của hệ động học.

Ví dụ, xét một *tent map* T, trong đó $T : [0,1] \to [0,1]$ được định nghĩa bởi $T(x) = 2x$ với $x \in [0, 1/2)$ và $T(x) = 2(1-x)$ với x thuộc giá trị còn lại.



Hình 1: 50 vòng lặp, $x_0 = 0.199$ (hình bên trái), $x_0 = 0.2$ (hình bên phải)

Trong hình 1, nếu ta lấy $x_0 = 0.199$ là giá trị khởi tạo, quỹ đạo sinh ra là phức tạp. Còn với $x_0 = 0.2$ quỹ đạo trở nên tuần hoàn.

2.4 Hệ động học mờ

Xét (X, f) là một hệ động học rời rạc. Biểu thức:

$$(z_f(A))(x) = \sup_{y \in f^{-1}(x)} \{A(y)\}$$

định nghĩa duy nhất một ánh xạ $z_f : \mathbb{F}^1(X) \to \mathbb{F}^1(X)$. Ánh xạ z_f là một ánh xạ mờ hóa (hay mở rộng Zadeh) của ánh xạ $f : X \to X$. Hơn nữa, z_f là liên tục trong $(\mathbb{F}^1(X), \tau_\infty)$ khi và chỉ khi f là liên tục, trong đó τ_∞ là *topology* sinh bởi metric d_∞.

Đồng thời, nguyên lý mở rộng của Zadeh có liên hệ mật thiết với một mở rộng tự nhiên khác $(\mathbb{K}(X), s_f)$ của (X, f), trong đó $s_f : \mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}(X)$ được định nghĩa bởi $s_f(C) = f(C)$ với mọi $C \in \mathbb{K}(X)$.

Thật vậy, $[z_f(A)]_\alpha = s_f([A]_\alpha) = f([A]_\alpha)$ với mọi $A \in \mathbb{F}^1(X)$ và $\alpha \in (0, 1]$.

2.5 Piecewise Linear Function

Dưới đây chúng ta sẽ mô tả thuật toán cho các hàm *piecewise linear* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ được cho bởi hữu hạn các điểm $(c_i, s_i) \in [0, 1] \times [0, 1]$ với $i = 1, \cdots, l$, là một hàm mà $c_1 = 0, c_l = 1$ và $f(c_i) = s_i$ với $i = 1, \cdots, l$ và $f|_{[c_i, c_{i+1}]}$ là các ánh xạ tuyến tính với $i = 1, \cdots, l-1$. Các điểm c_i được gọi là các điểm *turning point*. Với f được định nghĩa như vậy thì hiển nhiên f là liên tục. Tuy nhiên thuật toán áp dụng được mô tả dưới đây có thể sử dụng cho các hàm không liên tục. Điểm khác biệt duy nhất với các hàm đó là được mô tả bằng tập các cặp của các cặp giá trị (c_i, s_i), với mỗi cặp của các cặp giá trị mô tả một đoạn thẳng.

Bởi vì tập các hàm *piecewise linear* là *dense* trong tập các ánh xạ liên tục nên ta có thể xấp xỉ một ánh xạ liên tục bất kì với sai số nhỏ tùy ý. Hơn nữa tính toán trên các ánh xạ *piecewise linear* là đơn giản hơn và có thể tính chính xác. Vì thế ở đây ta chỉ xét thuật toán áp dụng trên các ánh xạ này.

3 Thuật toán

Phần đầu của chương này sẽ là những giải thích cho thuật toán sẽ được đề cập. Người đọc lưu ý rằng thuật toán đề xuất chỉ áp dụng cho cho các hàm *piecewise linear* liên tục và chúng ta giả thiết $X = [0, 1]$, mặc dù thuật toán có thể áp dụng cho bất kì khoảng đóng nào trong tập $\mathbb{R}$.

Mục đính của thuật toán là tính toán quỹ đạo của hệ động học mờ $(\mathbb{F}^1(X), z_f)$, là mở rộng của hệ động học rời rạc (X, f). Các tập mờ A được sử dụng trong thuật toán cũng là các hàm *piecewise linear* $A : X \to [0, 1]$ (không nhất thiết là liên tục).

Ý tưởng chính của thuật toán này là tính toán nguyên lý mở rộng Zadeh trên các khoảng nhỏ mà trên đó đồng thời cả f và A đều là tuyến tính. Bằng cách này, chúng ta không phải xấp xỉ quỹ đạo của A mà có thể tính toán chính xác.

Bước 1 mô tả làm sao để phân rã $X = [0, 1]$ ra thành hữu hạn các khoảng nhỏ để có thể tính toán trực tiếp. Kết quả của bước này là chúng ta thu được một phân rã hữu hạn J của $[0, 1]$ mà sao cho với mọi $K \in J$ không tồn tại khoảng lớn hơn chứa K mà cả A và f trong khoảng đó đều tuyến tính. Điều kiện của J này giúp chúng ta phải tính toán trên ít các đoạn nhất có thể.

Trong bước 2, chúng ta sử dụng tính chất rằng nếu cả A và f đều là ánh xạ tuyến tính trên khoảng K thì khi áp dụng nguyên lý mở rộng Zadeh cho f và $A|_K$ thì kết quả cũng tuyến tính trên $f(K)$. Với mỗi khoảng $K \in J$, áp dụng các tính trên ta thu được tập các đoạn thẳng. Nếu lấy supremum của tập các đoạn thẳng đó ta sẽ thu được ảnh của $z_f(A)$ của tập mờ A.

Bước 3 là lặp lại bước 1 và 2 cho đến khi nào đạt tới số vòng lặp M mong muốn.

INPUT:

- Một hàm *piecewise linear* liên tục $f : [0, 1] \to [0, 1]$ được cho bởi các điểm (c_i, s_i). Hay một cách chính xác:

$$f(x) = \begin{cases} s_1 + (s_2 - s_1) \cdot \frac{x - c_1}{c_2 - c_1} & c_1 \le x \le c_2 \\ s_2 + (s_3 - s_2) \cdot \frac{x - c_2}{c_3 - c_2} & c_2 \le x \le c_3 \\ \vdots & \\ s_{l-1} + (s_l - s_{l-1}) \cdot \frac{x - c_{l-1}}{c_l - c_{l-1}} & c_{l-1} \le x \le c_l \end{cases}$$

- Một số M là số bước lặp.
- Khởi tạo $k = 1$.

BƯỚC 1:

- Tạo một tập J bao gồm s đoạn thẳng L_i sinh bởi các đoạn thẳng từ tập A bởi thuật giải đệ quy sau: Với mỗi $c_j \in (a_i, a'_i)$ từ đoạn $L'_i := ((a_i, b_i), (a'_i, b'_i)) \in J$ và m là số lượng phần tử trong J. Thì J sẽ được thay thế L'_i bằng hai phần tử $L_i = ((a_i, b_i), (c_j, A(c_j)))$ và $L_{m+1} = ((c_j, A(c_j)), (a'_i, b'_i))$

BƯỚC 2:

- Với mỗi $i = 1, 2, \cdots, s$ và mỗi đoạn thẳng $L_i = ((a_i, b_i), (a'_i, b'_i))$ từ J, ta sẽ tính ảnh của $z_f(L_i)$ bằng nguyên lý mở rộng Zadeh của hàm f giới hạn trên đoạn $[a_i, a'_i]$. Một cách chính xác: $z_f(L_i) = ((f(a_i), b_i), (f(a'_i), b'_i))$.
- Lấy supremum của các đoạn thẳng thu được, kết quả là tập mờ $z_f^k(A)$.

BƯỚC 3:

- Nếu $k = M$, thuật toán kết thúc.
- Nếu $k < M$, thay thế $k = k + 1$ và lặp lại từ BƯỚC 1.

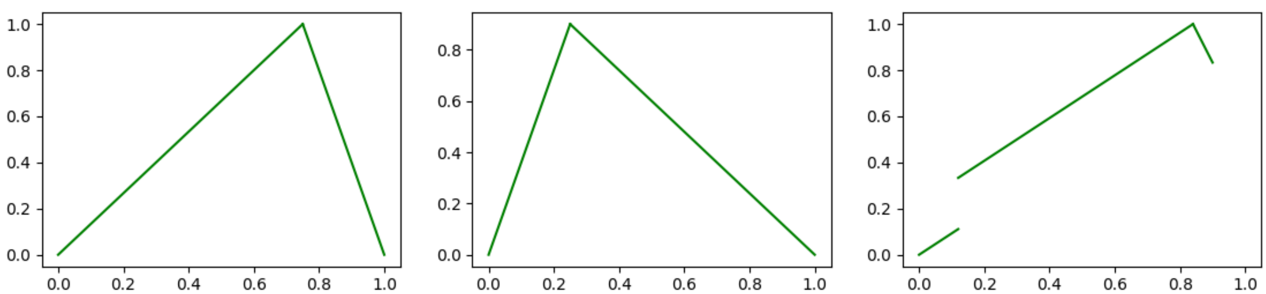
OUTPUT:

- Tập các tập mờ $z_f(A), \cdots, z_f^M(A)$

4 Cài đặt thử nghiệm

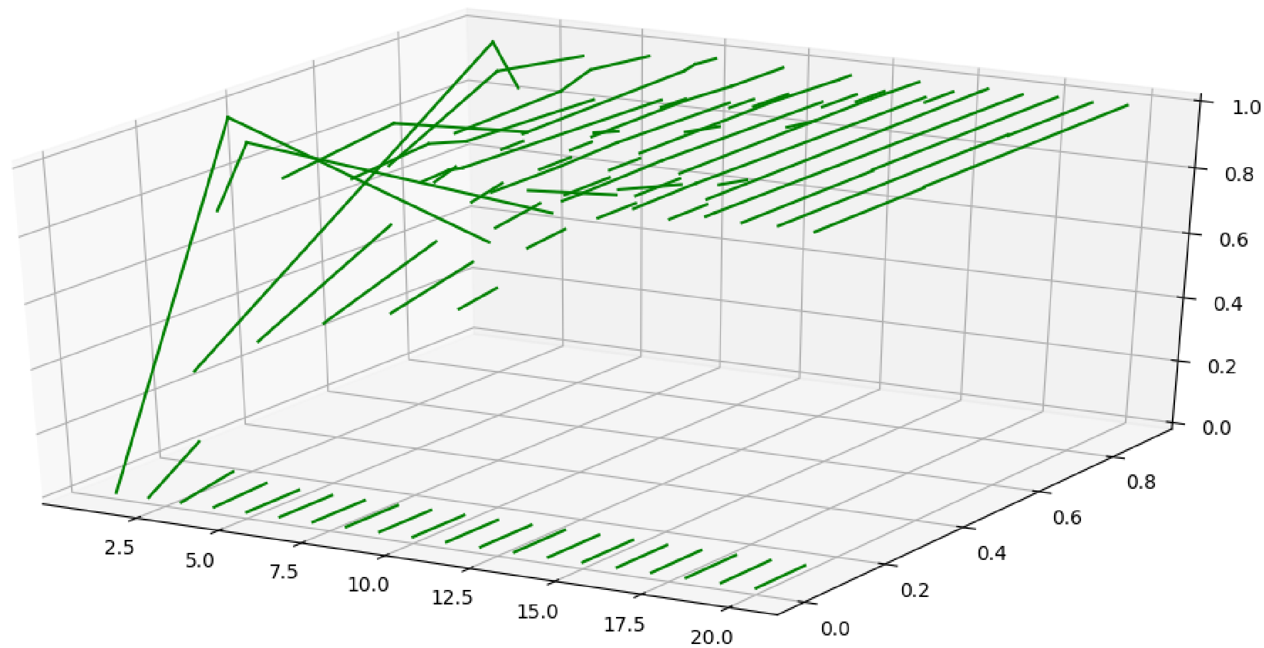
Trong phần này, chúng ta sẽ xem xét giá trị của các tập mờ trong một hệ động học mờ $(F_k^1[0,1], z_f)$.

Ví dụ 2: Tính toán nguyên lý mở rộng Zadeh bởi f được cho bởi tam giá $(0,0), (1/4, 9/10), (1,0)$ và tập mờ A được cho bởi $(0,0), (3/4, 1), (1,0)$ như trong hình 2.



Hình 2: Đồ thị của tập mờ A, hàm f và $z_f^2(A)$

Từ hình trên ta có thể thấy, cho dù với những đồ thị rất đơn giản cho các hàm tuyến tính liên tục f và A, nguyên lý mở rộng Zadeh có thể sinh ra những tập mờ không liên tục, như trong ví dụ trên $z_f^2(A)$ là không liên tục. Trong hình 3, 20 giá trị đầu tiên của quỹ đạo mờ được thể hiện trên đồ thị 3 chiều.



Hình 3: 20 giá trị đầu tiên của quỹ đạo

Tài liệu tham khảo

[1] Jose Cánovas and Jiri Kupka. On the topological entropy on the space of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 257:132–145, 12 2014.

[2] Moiseis Cecconello Jefferson Leite and R. C. Bassanezi Jackellyne Leite. On fuzzy solutions for diffusion equation. *Journal of Applied Mathematics*, page 132–145, 2015.

[3] Peter Kloeden. Fuzzy dynamical systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 7:275–296, 05 1982.

[4] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338 – 353, 1965.