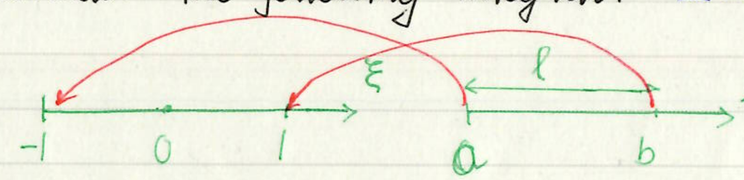
GAUSS QUADRATURE

- In FEM, numerical integration is needed. Although there are many numerical integration techniques Gauss quadrature, which is described in this section. is one of the most efficient techniques for functions that are polynomials or nearly polynomials. In FEM, the integrals involve polynomials so Gauss quadrature is a natural choice.
- Consider the following integral: $I = \int_a^b f(x)\,dx = ?$ (0)



Mapping of the 1D domain from the parent domain [-1, 1] to the physical domain [a, b]

$$x = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}\xi(b-a) \qquad (1)$$

- The above map can also be written directly in terms of the linear shape functions:

$$x = x_1 N_1(\xi) + x_2 N_2(\xi) = a\,\frac{1-\xi}{2} + b\,\frac{1+\xi}{2}$$

(1) ⇒ $dx = \frac{1}{2}(b-a)\,d\xi = \frac{\ell}{2}\,d\xi = J\,d\xi$

where J is the Jacobian given by $J = +(b-a)/2$

- (0) ⇔

$$I = J\int_{-1}^{1} f(\xi)\,d\xi = J\hat{I} \quad ; \quad \hat{I} = \int_{-1}^{1} f(\xi)\,d\xi$$

- In the Gauss integration procedure, we approximate the integral by

points

$$\hat{I} = W_1 f(\xi_1) + W_2 f(\xi_2) + \ldots = \underbrace{[W_1 \;\; W_2 \ldots W_n]}_{W^T} \underbrace{\begin{bmatrix} f(\xi_1) \\ f(\xi_2) \\ \vdots \\ f(\xi_n) \end{bmatrix}}_{f} = W^T f \qquad (2)$$

weights

- The basic idea of the Gauss integration quadrature is

GAUSS QUADRATURE

to choose the weights and integration points so that the highest possible polynomial is integrated exactly.

- To obtain this formular. $f(\xi)$ is approximated by a polynomial as:

$$f(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\xi^2 + \dots = \underbrace{[1\ \ \xi\ \ \xi^2 \dots \xi^n]}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{\alpha} = p(\xi)\alpha$$

-

- Next we express the values of the coefficient α_i in terms of the function $f(\xi)$ at the integration points:

$$\begin{aligned} f(\xi_1) &= \alpha_1 + \alpha_2\xi_1 + \alpha_3\xi_1^2 + \dots \\ f(\xi_2) &= \alpha_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_2^2 + \dots \\ &\vdots \\ f(\xi_n) &= \alpha_1 + \alpha_2\xi_n + \alpha_3\xi_n^2 + \dots \end{aligned} \quad \text{or} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} f(\xi_1) \\ f(\xi_2) \\ \vdots \\ f(\xi_n) \end{bmatrix}}_{f} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \xi_n & \xi_n^2 & \dots \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{\alpha} \qquad (3)$$

(2)(3) ⇒ $$\hat{I} = W^T M \alpha \qquad (4)$$

- Gauss quadrature provides the weights and integration points that yield an exact integral of a polynomial of a given order. To detect what the weights and quadrature points should be, we integrate the polynomial $f(\xi)$

$$\hat{I} = \int_{-1}^{1} f(\xi)\,d\xi = \int_{-1}^{1} [1\ \ \xi\ \ \xi^2\ \ \xi^3 \dots] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} d\xi = \left[\xi\ \ \frac{\xi^2}{2}\ \ \frac{\xi^3}{3}\ \ \frac{\xi^4}{4} \dots\right]_{-1}^{1} \alpha$$

$$= \underbrace{\left[2\ \ 0\ \ \frac{2}{3}\ \ 0 \dots\right]}_{\hat{P}} \alpha = \hat{P}\alpha \qquad (5)$$

(4)(5) ⇒ $$W^T M \alpha = \hat{P}\alpha \quad \Rightarrow \quad M^T W = \hat{P}^T \qquad (6)$$

- Solve (6) for weights & point
- Note:

If n_{gp} is the number of Gauss points, the polynomial of order p that can be integrated exactly is given by

$$p \le 2n_{gp} - 1$$

GAUSS INTERGRATION

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \ldots + \alpha_m \xi^m\right) d\xi \qquad (1)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) + w_3 f(\xi_3) + \ldots + w_n f(\xi_n)$$

$$= [w_1\ w_2\ \ldots\ w_n] \begin{bmatrix} f(\xi_1) \\ f(\xi_2) \\ \vdots \\ f(\xi_n) \end{bmatrix}$$

$$= [w_1\ w_2 \ldots w_n] \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \ldots & \xi_1^m \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \ldots & \xi_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \xi_n & \xi_n^2 & \ldots & \xi_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

(1)(2).

$$\int_{-1}^{1} (1\ \xi\ \xi^2 \ldots \xi^m)\, d\xi \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \underbrace{[w_1\ w_2 \ldots w_n]}_{(1\times n)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \ldots & \xi_1^m \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \ldots & \xi_2^m \\ \vdots & & & & \\ 1 & \xi_n & \xi_n^2 & \ldots & \xi_n^m \end{bmatrix}}_{(m\times n)} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1^{st} & \int_{-1}^{1} 1\, d\xi = [w_1\ w_2 \ldots w_n] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ 2^{nd} & \int_{-1}^{1} \xi\, d\xi = [w_1\ w_2 \ldots w_n] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \\ & \vdots \\ (m+1)^{th} & \int_{-1}^{1} \xi^m\, d\xi = [w_1\ w_2 \ldots w_n] \begin{bmatrix} \xi_1^m \\ \xi_2^m \\ \vdots \\ \xi_n^m \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\begin{cases} (m+1)^{th} \text{ equation} \\ 2n \text{ variable} \end{cases} \Rightarrow 2n \geq m+1$

$\Rightarrow n \geq \dfrac{m+1}{2}$

n Gauss point can evaluate exactly $(m+1)^{th}$ polynomials

$\Rightarrow$ also can evaluate polynomial $< (m+1)$

① 1 Gauss Point:

$$M^T w = \hat{P}^T$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & & \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \xi_1^m & \xi_2^m & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \\ \vdots \\ \begin{cases} \frac{2}{m+1} \rightarrow m: \text{even} \\ 0 \rightarrow m: \text{odd} \end{cases} \end{bmatrix}$$

Note: $C_{n+1} - 1 \le C$; $\xi_j^{n+1} - 1 = 1 - \xi_i$.

$$\begin{cases} w_1 = 2 \\ \xi_1 w_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 2 \\ \xi_1 = 0 \end{cases}$$

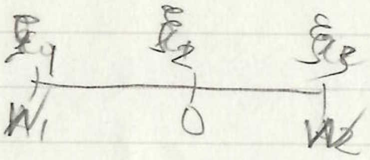
② 2 Gauss Points:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 2 & (1) \\ \xi_1 w_1 + \xi_2 w_2 = 0 & (2) \\ \xi_1^2 w_2 + \xi_2^2 w_2 = 2/3 & (3) \\ \xi_1^3 w_2 + \xi_2^3 w_2 = 0 & (4) \end{cases}$$

$(1)(4) \Rightarrow \xi_1^2 = \xi_2^2 \Rightarrow \underbrace{\xi_1 = -\xi_2}_{\text{symmetric property}}$, plug into (2)

$$\Rightarrow w_1 - w_2 = 0$$
$$\Rightarrow w_1 = w_2 = 1$$
$$(3) \Rightarrow \xi_1^2 = \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

③ 3 Gauss Points:



Symmetric properties.

$$\xi_2 = 0 \; ; \; \xi_1 = -\xi_3$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 0$$
$$w_1 \xi_1^2 + w_2 \xi_2^2 + w_3 \xi_3^2 = 2 w_1 \xi_1^2 = \frac{2}{3}$$
$$2 w_1 \xi_1^4 = 2/5 \Rightarrow \xi_1^2 = \frac{3}{5} \Rightarrow x_0 = \sqrt{3/5}, \; x_0 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

GAUSS QUADRATURE

Example :

Evaluate: $I = \int_2^5 (x^3 + x^2)\, dx$

. $2n_{gp} - 1 = 3 \Rightarrow n_{gp} = 2.$

. As $n_{gp} = 2$ (two point integration), the above integral can be integrated exactly.

. Use (6)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} W_1 = W_2 = 1 \\ \xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

. Use (1) with $a = 2$, $b = 5$ to express x and f in term of ξ

$$x = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}\xi(b-a) = 3.5 + 1.5\xi$$

$$f(\xi) = (3.5 + 1.5\xi)^3 + (3.5 + 1.5\xi)^2$$

. $I = J\hat{I} = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{1} \left[(3.5 + 1.5\xi)^3 + (3.5 + 1.5\xi)^2 \right] d\xi$

$$= \frac{\ell}{2} W_1 \left((3.5 + 1.5\xi_1)^3 + (3.5 + 1.5\xi_1)^2 \right) + \frac{\ell}{2} W_2 \left((3.5 + 1.5\xi_2)^3 + (3.5 + 1.5\xi_2)^2 \right)$$

$$= 37.818 + 153.432 = 191.25.$$

- In this case, as Gauss quadrature is exact, we can check the result by performing analytical integration

$$\int_2^5 (x^3 + x^2)\, dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^5 = 191,25$$

GAUSS QUADRATURE

Intro:

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\, d\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i)$$

Trọng số Điểm Gauss

$$\int_a^b f(x)\, dx = ? \xrightarrow{x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi} \int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

$\boxed{|\det(J)|}$

$x_i = x(\xi_i)$

$\boxed{\text{Điểm Gauss}}$

Tích phân Gauss:

- Là một trong số các phương pháp tích phân số dùng để tính xấp xỉ tích phân của 1 hàm số
- Được xây dựng từ việc tính xấp xỉ tích phân của lớp của các hàm đa thức.
- Có thể tính chính xác tích phân của hàm đa thức nếu sử dụng đủ số điểm Gauss (phù hợp với phương pháp phần tử hữu hạn)
- Giúp tính tích phân nhanh chóng mà k° cần tìm nguyên hàm (phù hợp trong lập trình tính toán)

Formulation: Tìm bộ "điểm Gauss" và "trọng số" tương ứng xấp xỉ đúng tích phân của "đa thức bậc m"

$$\sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i) = \int_{-1}^{1} f(\xi)\, d\xi = \int_{-1}^{1} (\alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \ldots + \alpha_m \xi^m)\, d\xi$$

Hiển nhiên bộ điểm Gauss và trọng số này cũng phải xấp xỉ đúng cho tích phân của các đa thức bậc nhỏ hơn m

$\Rightarrow m+1$ phương trình

$$\int_{-1}^{1} f_j(\xi)\, d\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i f_i(\xi_i)$$

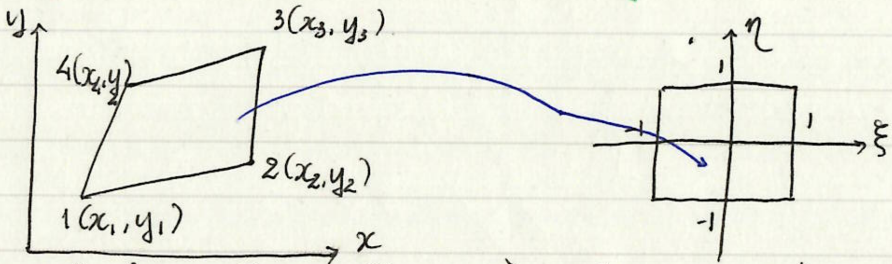
2n ẩn

$\Rightarrow m + 1 = 2n$

$\Rightarrow$ Bậc m cần $\frac{m+1}{2} = n$ điểm Gauss

GAUSS QUADRATURE

Quy luật 2 chiều cho miền tứ giác lồi bất kì



- Mối liên hệ giữa miền tứ giác lồi trong hệ tọa độ vật lý Oxy, và miền chuẩn $[-1, 1] \times [-1, 1]$ trong hệ tọa độ tự nhiên $(O\xi\eta)$ bởi công thức:

$$x = N_1(\xi, \eta)x_1 + N_2(\xi, \eta)x_2 + N_3(\xi, \eta)x_3 + N_4(\xi, \eta)x_4$$
$$y = N_1(\xi, \eta)y_1 + N_2(\xi, \eta)y_2 + N_3(\xi, \eta)y_3 + N_4(\xi, \eta)y_4$$

- Với x_i, y_i; $i = 1, 2, 3, 4$ lần lượt là tọa độ của 4 nút của phần tử trong hệ tọa độ vật lý Oxy.
- N_i, $i = 1, 2, 3, 4$ lần lượt là bốn hàm dạng tuyến tính cho phần tử tứ giác trong hệ tọa độ tự nhiên $O\xi\eta$ và có dạng:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad ; \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad ; \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 \mp \xi)(1-\eta)$$

- Khi đó: $I = \iint_{\Omega_{xy}} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) \det J \, d\xi \, d\eta$

- Trong đó $\det J$ là định thức của ma trận Jacobian liên hệ giữa miền tứ giác lồi Ω_{xy} trong hệ tọa độ vật lý Oxy với miền chuẩn $[-1, 1] \times [-1, 1]$ trong hệ tọa độ tự nhiên $O\xi\eta$ và có dạng:

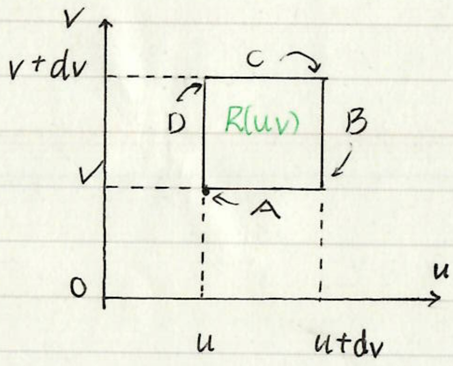
$$J = \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Change of Variables for Multiple Integrals

A Jacobian is required for integrals in more than one variables. Suppose that:

$x = f(u,v)$; $y = g(u,v)$

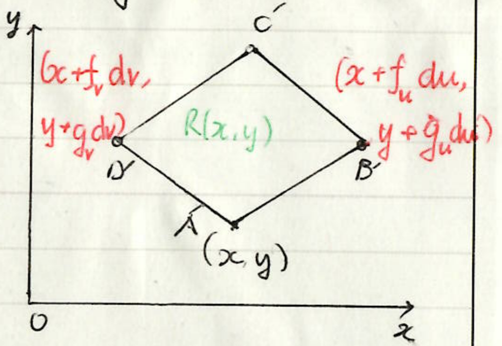
Let's see what happens to a small infinisimal box in the uv plane



Since the side-lengths are infinisimal, each size of the box in the uv plane is transformed into a straight line in the xy plane. The result is that the box in the uv plane is transformed into a parallelogram into the xy plane.

- Suppose:

① The point (u,v) is transformed into the point $(x = f(u,v),\ y = g(u,v))$



② The point $(u+dv, v)$ is transformed into the point Taylor series:

$$\cancel{f(u,u+dv)} \begin{cases} f(u+du,v) = \overbrace{f(u,v)}^{x} + f_u(u,v)\,du \\ g(u+du,v) = \underbrace{g(u,v)}_{y} + g_u(u,v)\,du \end{cases}$$

③ The point $(u, v+dv)$ is transformed into the point

$$\begin{cases} f(u,v+dv) = x + f_v(u,v)\,dv \\ g(u,v+dv) = y + g_v(u,v)\,dv \end{cases}$$

- $\overrightarrow{A'B'} = (f_u\,du,\ g_u\,du)$; $\overrightarrow{A'D'} = (f_v\,dv,\ g_v\,dv)$

- The area of R in the x, y plane is $S \times T$ (cross product)

Area of $R(xy) = \cancel{|f_u (x,y) g_v|} = \cancel{|f_u (x,y)|} = \underbrace{|f_u g_v - f_v g_u|}_{J:\ \text{Jacobian}}\,du\,dv$

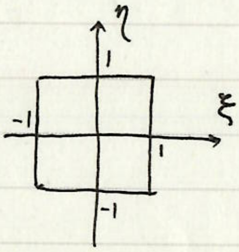
- The quantity $du\,dv$ is the area of the box $R(u,v)$.

$\Rightarrow$ Area of $R(xy) = J \cdot$ Area of $R(u,v)$

Gauss Quadrature

① Quy luật 2 chiều cho miền hình vuông chuẩn $[-1,1]\times[-1,1]$

Trong miền 2D, phần tử đẳng tham số có kích thước $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Để tính tích phân trên phần tử đẳng tham số này, ta sử dụng quy luật tích chập bằng cách áp dụng lần lượt các quy luật 1 chiều cho mỗi biến độc lập



- Đầu tiên lấy tích phân Gauss dọc theo trục ξ, ta được:

$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\,d\xi\right)d\eta$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\sum_{j=1}^{n_\xi^G} w_j\, f(\xi_j,\eta)\right)d\eta$$

Kế đến lấy tích phân dọc theo trục η:

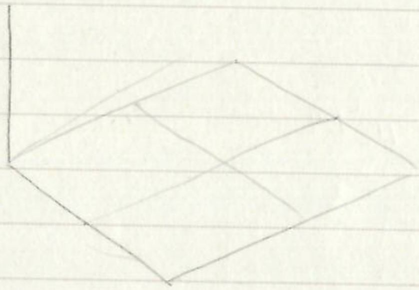
$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \int_{-1}^{1}\left(\sum_{j=1}^{n_\xi^G} w_j\, f(\xi,\eta)\right)d\eta = \sum_{K=1}^{n_\eta^G}\sum_{j=1}^{n_\xi^G} w_j\, w_K\, f(\xi_j,\eta_K)$$

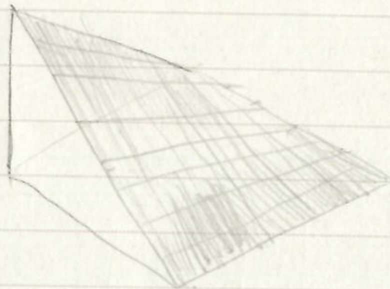
- n_ξ^G, n_η^G là số các điểm tích phân Gauss tương ứng với các trục ξ, η
- (ξ_j, η_K): tọa độ của điểm tích phân
  w_j, w_K: trọng số tương ứng với các điểm tích phân này
- Tổng quát, n_ξ^G và n_η^G là ≠ nhau, nhưng thường ta chọn giống nhau.

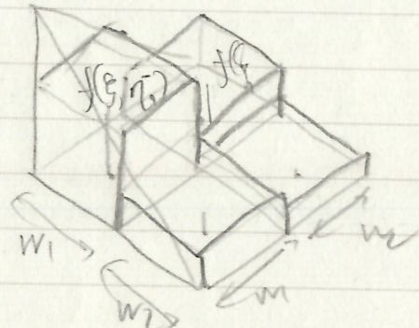
Ví dụ để tính ma trận độ cứng phần tử K_{ij}^e cho phần tử đẳng tham số 4 nút (Q4) ta chỉ cần sử dụng 2×2 điểm Gauss.

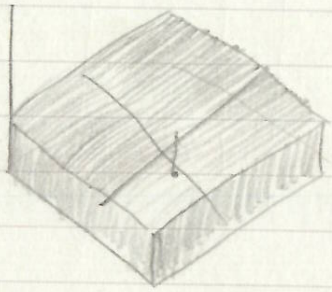
Cho các phần tử bậc cao hơn ta cần sử dụng thêm điểm Gauss trong mỗi hướng tùy theo bậc của tích phân

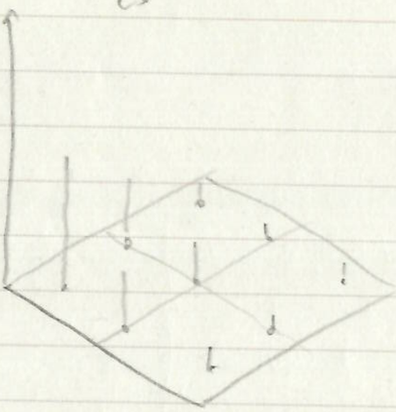
2D

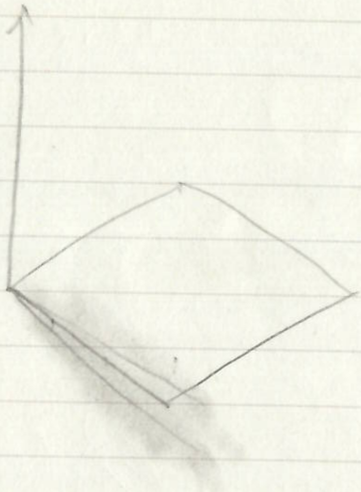


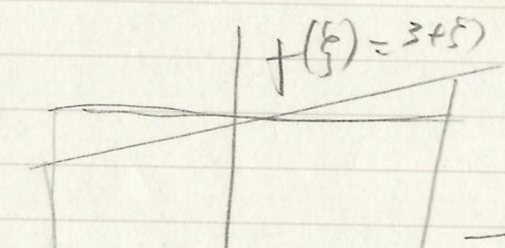


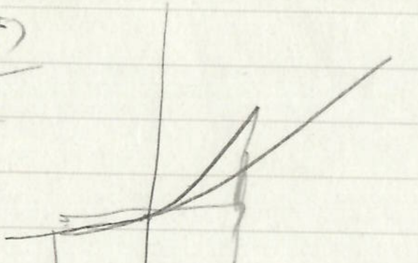




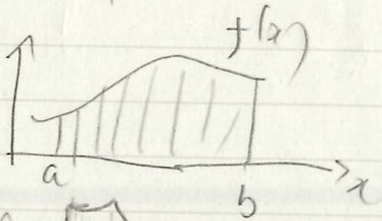








$\int_a^b f(x)\, dx \Rightarrow$ Area



$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy \Rightarrow$ Volume