Chương 4. Phép tính tích phân của hàm một biến (4 tuần)

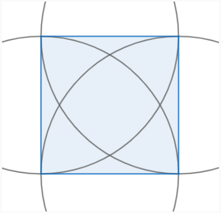
Hoàng Anh Quân

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Mục lục

Câu hỏi

1. Vẽ bốn hình tròn bán kính 1 có tâm là bốn đỉnh của một hình vuông đơn vị. Tính diện tích phần giao của cả bốn hình tròn này.



2. Trung bình khoảng cách giữa hai điểm được lấy ngẫu nhiên trên đường tròn bán kính 1 là bao nhiêu?
3. Trung bình khoảng cách giữa hai điểm được lấy ngẫu nhiên trên đoạn $[0, 1]$ là bao nhiêu?

Nguyên hàm và tích phân bất định

Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b). Ta nói hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nếu $F(x)$ xác định trong (a, b), khả vi trong (a, b) và $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc (a, b).

Bài tập 1. Xác định một nguyên hàm của mỗi hàm số sau *trên những miền xác định phù hợp*

- $f(x) = 1$
- $g(x) = x^5$
- $h(x) = \sin 3x$
- $j(x) = \dfrac{1}{x}$
- $i(x) = e^x$
- $k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Nhận xét.
1. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + C$ là một nguyên hàm của $f(x)$ với C là một hằng số.
2. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì mọi nguyên hàm khác của $f(x)$ đều có dạng $F(x) + C$ với C là một hằng số.

Nguyên hàm của $\frac{1}{x}$ là ...

... hàm số $f(x) = \ln x$ hay là hàm số $g(x) = \ln |x|$?

Nguyên hàm của $\frac{1}{x}$ là ...

... hàm số $f(x) = \ln x$ hay là hàm số $g(x) = \ln|x|$?

Câu trả lời là tùy vào việc xét miền xác định ở đâu: $\mathbb{R}_{\neq 0}$ hay $\mathbb{R}_{>0}$?

Nếu không giải thích gì thêm, miền xác định luôn được hiểu là *tập tất cả giá trị* mà hàm số đó xác định.

Trong trường hợp này, tập xác định là $\mathbb{R}_{\neq 0}$.

Tích phân bất định

Định nghĩa 2. Họ vô số các nguyên hàm của $f(x)$ được gọi là tích phân bất định của $f(x)$ và được ký hiệu là $\int f(x)\mathrm{d}x$. Do đó ta có thể viết

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C. \tag{1}$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Nhận xét. Cần hiểu hai vế của (1) là hai tập hợp các hàm số thỏa mãn điều kiện của nguyên hàm.

Tính chất của tích phân bất định

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int k \cdot f(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\mathrm{d}x \quad \text{với } k \neq 0$$

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$$

$$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$$

Tính chất của tích phân bất định

$$\int (f(x) + g(x))\, \mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int k \cdot f(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\mathrm{d}x \quad \text{với } k \neq 0$$

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$$

$$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$$

Câu hỏi. Vì sao $k \neq 0$?

Câu hỏi. $\int fg\mathrm{d}x = \int f\mathrm{d}x \cdot \int g\mathrm{d}x$ hay không?

Bài tập 3. Xác định tích phân bất định $\int (x + 3x^2)\mathrm{d}x$

Tích phân bất định của một số hàm số

Xem trang 6 giáo trình của tác giả Nguyễn Thủy Thanh.

Tích phân bất định của 13 dạng hàm số.

Lưu ý

Ta đã biết $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + C$. Sử dụng phương pháp đổi biến, ta suy ra

$$\int \frac{1}{x+a} \mathrm{d}x = \ln|x+a| + C$$

.

Thế còn $\int \frac{1}{-x} \mathrm{d}x$ thì sao?

Lưu ý

Ta đã biết $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + C$. Sử dụng phương pháp đổi biến, ta suy ra

$$\int \frac{1}{x+a} \mathrm{d}x = \ln|x+a| + C$$

.

Thế còn $\int \frac{1}{-x} \mathrm{d}x$ thì sao?

$$\int \frac{1}{-x} \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = -\ln|x| + C$$

.

Câu hỏi tổng quát: với $a \neq 0$, tính

$$\int \frac{1}{ax+b} \mathrm{d}x.$$

Câu hỏi

Nguyên hàm của $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$ là $(\arcsin x + C)$ hay là $(-\arccos x + C)$?

Câu hỏi

Nguyên hàm của $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$ là $(\arcsin x + C)$ hay là $(-\arccos x + C)$?

Mối quan hệ giữa $\arcsin x$ và $\arccos x$?

Luyện tập

Một số phương pháp tính tích phân bất định

1. Đưa tích phân về dạng cơ bản (bt 1 - bt 30, trang 10-12)
2. Phương pháp đổi biến (bt 1 - bt 40, trang 17-21)
3. Công thức tích phân từng phần (bt 1 - bt 32, trang 28-30)

Một số dạng bài đặc biệt

- Tích phân các phân thức hữu tỷ
- Tích phân hàm lượng giác

Đưa tích phân về dạng cơ bản

Xem xét một số ví dụ trong mục 6.1 trang 207 sách của tác giả Nguyễn Đình Trí.

Bài tập 4. Tính $\displaystyle\int (3-x^2)^3 \mathrm{d}x$.

Bài tập 5. Tính $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

Phương pháp đổi biến

Dưới một số điều kiện nhất định (được nêu trong định lý trong mục 10.1.2 giáo trình của tác giả Nguyễn Thủy Thanh), ta có nhận xét sau

Nhận xét. Cho hàm số $f(x)$ và $x = \varphi(t)$, ta có công thức đổi biến:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Bài tập 6. Tính $\int \sqrt{4 - x^2}\mathrm{d}x$. *Gợi ý.* Đặt $x = 2\sin t$

Xem xét một số bài tập trong mục 6.2 trang 210 sách của tác giả Nguyễn Đình Trí.

Bài tập 7. Tính $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$

Gợi ý. Sử dụng phép đổi biến $x = \dfrac{1}{t}$ hoặc $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

Bài tập 8.

(a) Tính $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \cos x}$

(b) Tính $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$

Công thức tích phân từng phần

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Dạng tương đương $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$.

Ba nhóm tích phân từng phần (giáo trình trang 22):

- Nhóm 1. Biểu thức tích phân có chứa thừa số

$$\ln x, \arcsin x, \arccos x, \arctan x.$$

- Nhóm 2. Biểu thức tích phân có dạng

$$P(x)e^{ax}, P(x)\sin bx, P(x)\cos bx$$

  trong đó $P(x)$ là một đa thức và a, b là các hằng số.
- Nhóm 3. Biểu thức tích phân có dạng

$$e^{ax}\sin bx, e^{ax}\cos bx, \sin(\ln x), \cos(\ln x)$$

  trong đó a, b là các hằng số.

Bài tập 9. Tính các tích phân sau đây:

(a) $\int \ln x \mathrm{d}x$ (đáp số: $x \ln x - x + C$)

(b) $\int \arcsin x \mathrm{d}x$ (đáp số: $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$)

(c) $\int \sqrt{x} \arctan \sqrt{x} \mathrm{d}x$

(d) $\int x^2 \sin 3x \mathrm{d}x$

(e) $\int x 2^x \mathrm{d}x$

(f) $\int x^2 e^{-x} \mathrm{d}x$

Bài tập 10. (dựa theo ví dụ 6.2 trang 26) Đặt $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^n}$. Tính giá trị của I_1 và I_2.

Tích phân các phân thức hữu tỉ

Phân thức hữu tỉ có dạng

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

trong đó $P(x), Q(x)$ là hai đa thức ẩn x.

Xem định lý 10.2.1 trang 31.

Bài tập 11. Tính các tích phân sau đây:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x$

Tích phân các hàm lượng giác

Mục 10.2.3 (trang 48) - tác giả Nguyễn Thủy Thanh

Xét tích phân có dạng $\int R(\sin x, \cos x) \mathrm{d}x$ trong đó $R(u, v)$ là một hàm hữu tỉ theo hai biến u, v. Ta có thể khảo sát tích phân này bằng đổi biến $t = \tan \frac{x}{2}$. Khi đó

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Ngoài ra, một số trường hợp sử dụng những phép đổi biến đơn giản hơn:

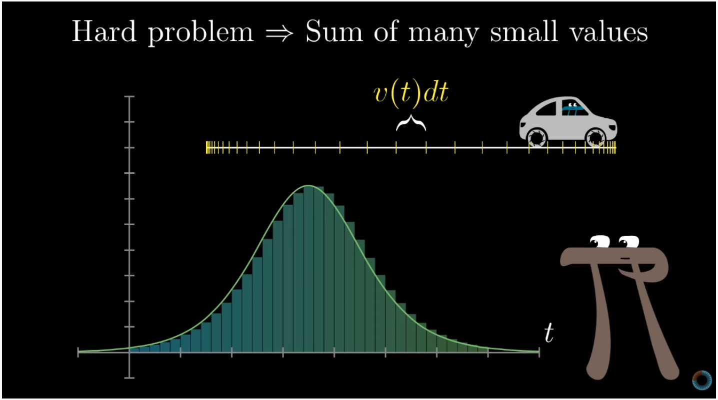
- Nếu $R(-u, v) = -R(u, v)$ thì nên đặt $t = \cos x$
- Nếu $R(u, -v) = -R(u, v)$ thì nên đặt $t = \sin x$
- Nếu $R(-u, -v) = -R(u, v)$ thì nên đặt $t = \tan x$

Bài tập 12. (phép đổi biến tổng quát) Tính $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin x + 4\cos x + 5}$.

Bài tập 13. Tính $J = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(3 + \cos 5x)\sin 5x}$.

Tích phân xác định

Giới thiệu



Hình 1: Source: 3Blue1Brown

Định nghĩa (phần 11.1 trang 58 - Nguyễn Thủy Thanh)

Để mô tả định nghĩa về tích phân xác định, ta tính các tổng Riemann của hàm số $f(x) = x^2$ trong đoạn $[1, 3]$ đối với nhiều phân hoạch khác nhau.

Phân hoạch thứ nhất $\{1, 2, 3\}$ chia đoạn ban đầu thành hai đoạn $[1, 2]$ và $[2, 3]$. Tổng tích phân Reimann của hàm $f(x)$ là

$$S(f, T, \xi) = f(1.5) \cdot (2 - 1) + f(2.5) \cdot (3 - 2).$$

Phân hoạch thứ hai $\{1, 1.7, 2.3, 3\}$ chia đoạn ban đầu thành ba đoạn $[1, 1.7]$, $[1.7, 2.3]$ và $[2.3, 3]$. Tổng tích phân Reimann của hàm $f(x)$ là

$$S(f, T, \xi) = f(1.3) \cdot (1.7 - 1) + f(2.1) \cdot (2.3 - 1.7) + f(2.7) \cdot (3 - 2.3).$$

Nếu giới hạn của $S(f, T, \xi)$ tồn tại khi độ lớn của phân hoạch tiến tới 0 thì ta gọi giá trị giới hạn đó là tích phân xác định của $f(x)$, kí hiệu là

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0, n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

Ví dụ. Tính $\int_0^1 2x dx$ theo định nghĩa trong slide trước.

Nhận xét. Hơn nữa, hàm số $f(x)$ được gọi là khả tích Reimann trên đoạn $[a, b]$. Tập hợp các hàm khả tích Riemann trên đoạn $[a, b]$ được ký hiệu là $\mathcal{R}[a, b]$

Định lý 1. Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Định lý 2. Nếu $f(x)$ bị chặn trong $[a, b]$ và có một số hữu hạn điểm gián đoạn trong $[a, b]$ thì $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Ví dụ. $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^{x^2}$, $h(x) = [x]$ đều thuộc $\mathcal{R}[a, b]$ với a, b bất kỳ.

Tích chất của tích phân xác định

Xét a, b, d, C thỏa mãn $a \leq d \leq b$ và $f(x), g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$.

- $\int_a^b Cf(x)\mathrm{d}x = C\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ với $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b]$
  Ví dụ với $f(x) = 0$.
- $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a) \qquad$ với $m \leq f(x) \leq M$
- $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Định lý 3. (Newton - Leibniz) Đối với hàm liên tục từng đoạn trên $[a, b]$, ta có công thức Newton - Leibniz:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b]$ theo nghĩa mở rộng.

Đọc phương pháp đổi biến và phương pháp tích phân từng phần (định lý 11.2.4 và 11.2.5)

Luyện tập

Bài tập 1. Tính $J = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 2. Cho $a > 0$. Tính $I = \displaystyle\int_0^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$. Trình bày ý nghĩa hình học của tích phân xác định này.

Bài tập 3. Tính $K = \displaystyle\int_0^{1} \left(x^{3/5} + x^{5/3}\right)\mathrm{d}x$. Phát biểu biểu thức tổng quát.

Bài tập 4. Tính $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

Gợi ý. Đặt $x = \sin t$. Khi t chạy hết $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ thì x chạy hết $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Bài tập 5. Tính $M = \displaystyle\int_{-2}^{-1} x^3\,\mathrm{d}x$ bằng phép đổi biến $t = x^2$.

Bài tập 6. Xét n là một số tự nhiên bất kỳ. Đặt $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ và $J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. Chứng minh $I_n = J_n$.

Bài tập 7. Cho $f(x)$ là một hàm số lẻ và khả vi trên đoạn $[-a, a]$ với $a > 0$. Chứng minh $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 0$.

Ứng dụng của tích phân xác định

Tính toán độ dài, diện tích, thể tích

(Trang 78 giáo trình của tác giả Nguyễn Thủy Thanh)

- Diện tích hình phẳng
- Thể tích vật thể, trong đó bao gồm vật tròn xoay
- Độ dài đường cong, diện tích mặt tròn xoay

Nhận xét. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $[a, b]$ thỏa mãn $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b]$. Miền D định nghĩa bởi

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

thì

$$S_D = \int_a^b (g(x) - f(x))\, \mathrm{d}x.$$

Câu hỏi. Vì sao điều kiện $f(x) \leq g(x)$ là cần thiết?

Bài tập 8. Tính diện tích của hình tròn bán kính R, với $R > 0$.
Gợi ý. Sử dụng tính đối xứng của hình tròn để rút gọn việc tính toán.

Bài tập 9. Tính diện tích của hình ellipse xác định bởi công thức $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ với $a, b > 0$.

Bài tập 10. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = x + 2$.

Tính thể tích vật thể

Nhận xét. 1. Giả sử một vật E trong không gian $Oxyz$ có hình chiếu vuông góc $[a, b]$ trên trục Ox. Đặt $S(t)$ là diện tích của thiết diện tạo bởi vật E và mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm $x = t$. Khi đó thể tích của E được xác định bởi công thức

$$V_E = \int_a^b S(t)\mathrm{d}t = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

2. Đặc biệt, nếu vật E được tạo nên qua phép quay hình thang cong giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$ với $f(x)$ không âm thì thể tích vật E được tính theo công thức

$$V_E = \pi \int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x.$$

Luyện tập

Bài tập 11. Tính thể tích hình cầu bán kính R với $R > 0$.

Bài tập 12. Tính thể tích hình nón có chiều cao h và bán kính đáy R với $h, R > 0$.

Nhận xét.

1. Nếu đường cong $\mathcal{L}$ được cho bởi phương trình $y = y(x)$ với $x \in [a, b]$ thì độ dài đường cong là

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

2. Nếu đường cong $\mathcal{L}$ được cho bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$ với $t \in [\alpha, \beta]$ thì độ dài đường cong là

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

Đọc thêm công thức tính diện tích mặt tròn xoay trong giáo trình.

Bài tập 13. Tính độ dài đường thẳng nối hai điểm $A(1,2)$ và $B(4,6)$ trong mặt phẳng Oxy.

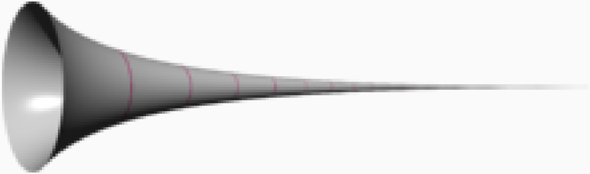
Bài tập 14. Tính chu vi đường tròn bán kính R với $R > 0$.

Bài tập 15.

(a) Tính độ dài đường cong $y = x^{3/2}$ với x chạy từ 0 đến 4.

(b) Tính độ dài đường cong $y = x^2 - 1$ với x chạy từ -1 đến 1.

Mathematical paradox: Gabriel's horn (Torricelli's trumpet)



Hình 2: Gabriel's horn. Source: Wikipedia

Tích phân suy rộng

Vì sao có tích phân suy rộng?

Xét tích phân $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ theo nghĩa thông thường. Khi đó:

- Cận lấy tích phân là hữu hạn, và
- Hàm số lấy tích phân bị chặn

Tích phân suy rộng quan tâm tới những trường hợp mà một trong hai điều kiện trên không xảy ra. Cụ thể, ta có hai loại tích phân suy rộng:

- Tích phân suy rộng loại 1: cận lấy tích phân là $+\infty$ hoặc $-\infty$
- Tích phân suy rộng loại 2: hàm số lấy tích phân không bị chặn

Tích phân suy rộng loại 1

Mục 11.4.1 trang 98 giáo trình của tác giả Nguyễn Thủy Thanh.

Định nghĩa 3. (Tóm tắt) Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ thì giới hạn đó được ký hiệu là

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

Khi đó, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ. Ngược lại, ta nói tích phân này phân kỳ.

Định nghĩa tương tự cho $\int_{-\infty}^{a}$ và $\int_{-\infty}^{+\infty}$.

Nhận xét.

Tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ hội tụ nếu $\alpha > 1$.

Tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ phân kỳ nếu $\alpha \le 1$.

Tính chất & Dấu hiệu nhận biết

Tính chất

- Tính tuyến tính
- **Công thức Newton-Leibnitz**
- Công thức đổi biến
- Công thức tích phân từng phần

Dấu hiệu nhận biết tính hội tụ, tính phân kỳ: đọc giáo trình.

Hội tụ tuyệt đối

Định nghĩa 4. Tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ hội tụ.

Định lý 4. Nếu tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ tuyệt đối thì tích phân này hội tụ.

Luyện tập

Bài tập 1. Tính tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

Bài tập 2. Khảo sát sự hội tụ của tích phân $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^3-12}}$.
Gợi ý. Đại lượng $\sqrt[3]{x^3-12}$ xấp xỉ với $\sqrt[3]{x^3}$ khi $x \to \infty$.

Bài tập 3. Khảo sát sự hội tụ của tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x^2+1}{x^3+3x+4}\mathrm{d}x$.

Tích phân suy rộng loại 2

Mục 11.4.1 trang 107 giáo trình của tác giả Nguyễn Thủy Thanh.

Định nghĩa 5. (Tóm tắt) Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{\mu \to b^-} \int_a^\mu f(x)\mathrm{d}x$ thì giới hạn đó được ký hiệu là $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Kí hiệu μ đọc là "miu".

Khi đó, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ. Ngược lại, ta nói tích phân này phân kỳ.

Định nghĩa tương tự cho trường hợp $f(x)$ xác định trên $(a, b]$.

Nhận xét.
Tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha}$ hội tụ nếu $\alpha < 1$.
Tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha}$ phân kỳ nếu $\alpha \geq 1$.

Tính chất & Dấu hiệu nhận biết & Hội tụ tuyệt đối

Tương tự tích phân suy rộng loại 1.

Luyện tập

Bài tập 4. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Bài tập 5. Khảo sát sự hội tụ của tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$.