Chương 2. Giới hạn và sự liên tục của hàm số một biến (2 tuần)

Hoàng Anh Quân

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Mục lục

Giới hạn của hàm số một biến

Đoạn, khoảng, nửa khoảng

Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Ta có các ký hiệu sau

$$\begin{aligned}
\text{Đoạn} : [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \\
\text{Khoảng} : (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} \\
\text{Nửa khoảng} : [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\} \\
\text{Nửa khoảng} : (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}
\end{aligned}$$

Ngoài ra, ta còn sử dụng thêm hai giá trị $+\infty$ và $-\infty$ như là đầu mút của một khoảng, nửa khoảng. Ví dụ như

$$\begin{aligned}
[a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\} \\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} | x < b\}
\end{aligned}$$

Định nghĩa 1. Cho một hàm số $f(x)$. Một số $A \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = a$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ bất kỳ đều tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x : 0 < |x - a| < \delta.$$

Khi đó, $f(x)$ có giới hạn hữu hạn tại $x = a$, kí hiệu là $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Nhận xét.

1. Thay vì nói "$f(x)$ có giới hạn hữu hạn tại $x = a$", ta có thể nói gọn là "$f(x)$ có giới hạn tại $x = a$".
2. Tập hợp giá trị x thỏa mãn điều kiện trong định nghĩa là
$$(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta).$$
3. Giá trị của hàm số $f(x)$ tại $x = a$ không được nhắc đến trong định nghĩa về giới hạn của hàm số.
4. Ký hiệu ε đọc là epsilon, ký hiệu δ đọc là delta.

Giới hạn hàm số - nhận xét nâng cao

Nhận xét.

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm, nếu có, là duy nhất.
2. Một định nghĩa tương đương của giới hạn dãy số: $\lim_{x \to a} f(x) = A$ nếu với mọi dãy số $\{x_n\}$ hội tụ tới a mà $x_n \neq a \forall n$, dãy số $\{f(x_n)\}$ hội tụ tới A.

Luyện tập

Bài tập 1. Chứng minh $\lim\limits_{x\to 3} 2x = 6$.

Gợi ý. Xét $\varepsilon > 0$ bất kỳ, cần chọn ra một giá trị δ phù hợp.

Chứng minh.
Xét $\varepsilon > 0$ bất kỳ, ta cần chỉ ra δ sao cho

$$|2x - 6| < \varepsilon$$

với mọi x thỏa mãn $0 < |x - 3| < \delta$.

Ta chọn $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Khi đó, với x thỏa mãn $0 < |x - 3| < \delta$ bất kỳ, ta có:

$$|2x - 6| = 2\,|x - 3| < 2\delta = \varepsilon.$$

Vậy nên $\lim\limits_{x\to 3} 2x = 6$. $\square$

Luyện tập

Bài tập 2. Chứng minh $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$.

Gợi ý. Khi x tiến gần tới 3 thì ta có thể đánh giá $|x+3|$ nhỏ hơn một giá trị cố định nào?

Bài tập 3.

(a) Chứng minh $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3}$.

(b) Chứng minh $\lim\limits_{x\to 9} \sqrt{x} = 3$.

Bài tập 4. Cho $x \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Ví dụ $[2,4] = 2, [-2.4] = 3$. Chứng minh mệnh đề

$$\lim_{x\to 3} [x] = 3$$

là một mệnh đề sai.

Định nghĩa 2. Cho một hàm số $f(x)$. Một số $A \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = +\infty$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ bất kỳ đều tồn tại Δ sao cho

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x : x > \Delta.$$

Khi đó ta viết $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Định nghĩa 3. Cho một hàm số $f(x)$. Một số $A \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = -\infty$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ bất kỳ đều tồn tại Δ sao cho

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x : x < \Delta.$$

Khi đó ta viết $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Nhận xét. Kí hiệu Δ đọc là delta.

Bài tập 5. Chứng minh $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Gợi ý. Xét $\varepsilon > 0$ bất kỳ, cần chọn ra một giá trị Δ phù hợp.

Tính chất của giới hạn hàm số

Giả sử hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt có giới hạn tại $x = a$ lần lượt là K và L, tức là $\lim\limits_{x \to a} f(x) = K$ và $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$. Khi đó

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = K + L$
- $\lim\limits_{x \to a} C \cdot f(x) = CK$ với C là một hằng số
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = KL$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{K}{L}$ với điều kiện $L \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |K|$

Bài tập 6. Với giả thiết như trên, chứng minh $\lim\limits_{x \to a} f(x) - g(x) = K - L$.

Lưu ý

1. Ngoại trừ những bài tập lý thuyết, sinh viên có thể thay giá trị trực tiếp vào biểu thức cần tính giới hạn. Ví dụ:

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9.$$

2. Nếu tử số và mẫu số của một phân thức hữu tỷ đều triệt tiêu tại điểm $x = a$ thì có thể giản ước phân thức đó cho $x - a$ (khác 0) một hoặc một số lần.
(Trang 35 Bài tập Toán cao cấp tập 2, Nguyễn Thủy Thanh)

Luyện tập

Bài tập 7. Tính các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to 1} 5x^2 - 7x + 6$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{3x+2}$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

(d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$

Bài tập 8. Tính các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^2-1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ với $m, n \in \mathbb{Z}^+$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

(g) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

Bài tập 9. Tính các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[(x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3}\right]$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{(x+1)(x+2)} - x$.

Gợi ý. với $x \to +\infty$, ta chỉ cần xét từ thời điểm $x > 0$.

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)} - x$

Định lý về giới hạn của hàm số

Định lý 1. Cho ba hàm số f, g, h với miền xác định D thỏa mãn

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \; \forall x \in D$$

Biết rằng tồn tại một giá trị a ($a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$, hoặc $a = -\infty$) thỏa mãn

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A$$

Khi đó $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.

Bài tập 1. Chứng minh $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Giới hạn một phía

Định nghĩa 4.

1. Cho một hàm số $f(x)$. Một số A được gọi là giới hạn bên phải của hàm $f(x)$ tại $x = a$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ bất kỳ tồn tại $\delta > 0$ sao cho
$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x : a < x < a + \delta.$$
Khi đó ta viết $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$.
2. Cho một hàm số $f(x)$. Một số A được gọi là giới hạn bên trái của hàm $f(x)$ tại $x = a$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ bất kỳ tồn tại $\delta > 0$ sao cho
$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x : a - \delta < x < a.$$
Khi đó ta viết $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = A$.

Nhận xét. Trong sách của tác giả Nguyễn Thủy Thanh, tác giả sử dụng kí hiệu $\lim\limits_{x \to a+0}$ thay vì $\lim\limits_{x \to a^+}$ như trên.

Luyện tập

Bài tập 2. Chứng minh $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$.

Gợi ý. Từ định nghĩa của giới hạn một phía, ta biết được giá trị x luôn lớn hơn 0, từ đó đơn giản hóa được biểu thức $|x|$.

Bài tập 3. Xác định $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$.

Bài tập 4. Xác định $\lim\limits_{x\to 3^+} [x]$, $\lim\limits_{x\to 3^-} [x]$.

Định lý về giới hạn một phía

Định lý 2. Hàm số $f(x)$ có giá trị giới hạn tại điểm $x = a$ khi và chỉ khi tại điểm đó các giới hạn bên phải và bên trái tồn tại và bằng nhau. Trong trường hợp này giới hạn của hàm bằng giới hạn một phía.

Ý nghĩa thực tế: nối hai phần đường ray khác nhau một cách hiệu quả.

Bài tập 1. Xét hàm số $f(x)$ được định nghĩa như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 3^x & \text{nếu } x \leq 0 \\ 2x + a & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$$

Tìm giá trị của tham số a sao cho $f(x)$ có giới hạn tại $x = 0$.

Hàm vô cùng bé
& hàm vô cùng lớn (đọc thêm)

Định nghĩa 5.
Hàm số $f(x)$ được gọi là vô cùng bé khi $x \to a$ nếu $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là vô cùng lớn khi $x \to a$ (viết là $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$) nếu với mọi $M > 0$ tồn tại δ thỏa mãn

$$|f(x)| > M \quad \forall x : 0 < |x - a| < \delta$$

Nhận xét. Một cách tương tự, ta định nghĩa được hàm số vô cùng bé, hàm số vô cùng lớn khi $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Hàm vô cùng bé & hàm vô cùng lớn

Ví dụ.

- $d(x) = x$ là một hàm vô cùng bé khi $x \to 0$
- $f(x) = \sin(x)$ là một hàm vô cùng bé khi $x \to 0$
- $g(x) = |x - 3|$ là một hàm vô cùng bé khi $x \to 3$
- $h(x) = \dfrac{1}{|x-3|}$ là một hàm vô cùng lớn khi $x \to 3$
- $k(x) = x^2 - x + 1$ là một hàm vô cùng lớn khi $x \to +\infty$
- $l(x) = -x + 1$ là một hàm vô cùng lớn khi $x \to +\infty$

Định lý 3. Nếu $f(x)$ là một hàm vô cùng lớn khi $x \to a$ thì hàm $\dfrac{1}{f(x)}$ là một hàm vô cùng bé khi $x \to a$.

Tính chất

Nhận xét. Cho một hằng số c và $f(x), g(x)$ là hai hàm số vô cùng bé khi $x \to a$. Khi đó hàm số $f + g, f - g, c \cdot f$ và $f \cdot g$ cũng là những hàm số vô cùng bé khi $x \to a$.

Câu hỏi.

1. Nhận xét còn đúng khi thay "vô cùng bé" bởi "vô cùng lớn" hay không?
2. Có thể đưa ra nhận xét nào về hàm số $\dfrac{f}{g}$ hay không? Nó là một hàm số vô cùng bé hay vô cùng lớn (khi $x \to a$)?

So sánh các hàm vô cùng bé

Định nghĩa 6. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ vô cùng bé khi $x \to a$. Hai hàm này được gọi là tương đương với nhau nếu

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Một số cặp hàm vô cùng bé tương đương khi xét $x \to 0$

- $\sin x$ và x
- $\tan x$ và x
- $\arcsin x$ và x
- $\arctan x$ và x
- $\ln(1+x)$ và x
- $a^x - 1$ và x
- $(1+x)^\alpha - 1$ và αx

Từ các cặp hàm trên, ta suy ra các giới hạn tương ứng, ví dụ như

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \ \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1; \ldots$$

Hàm số liên tục

Định nghĩa

Định nghĩa 7. Cho hàm số $f(x)$. Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm $x = a$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x : |x - a| < \delta.$$

Định nghĩa 8. Cho hàm số $f(x)$ và một tập hợp M. Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục trên M nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm x thuộc M.

Tính chất

Định lý 4. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều liên tục tại điểm $x = a$. Khi đó

1. Các hàm $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ liên tục tại điểm $x = a$
2. Nếu $g(a) \neq 0$ thì $\dfrac{f}{g}$ liên tục tại điểm $x = a$

Nhận xét. Mọi hàm số sơ cấp đều liên tục tại mọi điểm trong miền xác định của hàm số đó.

Định lý 5. Cho ba hàm số f, g và h thỏa mãn $h = g \circ f$. Biết rằng hàm f liên tục tại điểm a, hàm g liên tục tại điểm $f(a)$. Khi đó hàm h liên tục tại điểm a.

Liên tục bên trái, liên tục bên phải

Định nghĩa 9. Cho hàm số $f(x)$.
Hàm số $f(x)$ liên tục bên phải tại $x = a$ nếu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
Hàm số $f(x)$ liên tục bên trái tại $x = a$ nếu $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Nhận xét. Hàm số $f(x) = [x]$ (hàm phần nguyên) liên tục bên phải tại $x = 3$ và không liên tục trái tại $x = 3$.

Định lý 6. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = a$ khi và chỉ khi hàm số $f(x)$ liên tục phải tại $x = a$ và liên tục trái tại $x = a$.

Điểm gián đoạn, điểm gián đoạn khử được

Định nghĩa 10. Cho hàm số $f(x)$. Điểm $x = a$ được gọi là một điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$ nếu $f(x)$ không liên tục tại $x = a$.

Định nghĩa 11. Cho hàm số $f(x)$ với điểm gián đoạn $x = a$. Nếu $\lim_{x \to a^+} f(x)$ và $\lim_{x \to a^-} f(x)$ tồn tại và thỏa mãn

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \neq f(a)$$

thì $x = a$ là một điểm gián đoạn khử được.

Nhận xét. Trong trường hợp này, giới hạn $\lim_{x \to a} f(x)$ tồn tại (vì giới hạn trái và giới hạn phải đều tồn tại và bằng nhau).

Bài tập 1. Chứng minh $x = 0$ là một điểm gián đoạn khử được của $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

Điểm gián đoạn loại I, loại II

Định nghĩa 12. Cho hàm số $f(x)$ với điểm gián đoạn $x = a$.

1. Nếu $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ tồn tại và thỏa mãn

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$$

   thì $x = a$ là một điểm gián đoạn loại I.
2. Nếu $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ không tồn tại thì $x = a$ là một điểm gián đoạn loại II.

Câu hỏi. Chỉ ra và phân loại những điểm gián đoạn của những hàm số sau đây

- $*$ $f(x) = [x]$
- $*$ $g(x) = \dfrac{x - |x|}{x^2}$ (*Gợi ý.* hàm này không có giới hạn trái tại $x = 0$)

Hàm liên tục trên đoạn thẳng

Định nghĩa 13.

1. Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng (a, b) nếu nó liên tục tại mọi điểm trên khoảng đó.
2. Hàm $f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục tại mọi điểm trên khoảng (a, b), liên tục bên phải tại điểm a và liên tục bên trái tại điểm b. Lớp hàm này được kí hiệu là $\mathcal{C}[a, b]$.

Định lý Bolzano-Cauchy I/II

Định lý 7. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Khi đó tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Định lý 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a) \neq f(b)$. Với mọi số M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = M$.

Nhận xét. Định lý Bolzano-Cauchy có thể được sử dụng để tìm giá trị xấp xỉ của nghiệm của phương trình. Cụ thể, cho $f(x)$ là một hàm số thỏa mãn điều kiện của định lý **??**, không mất tính tổng quát, giả sử $f(a) < 0, f(b) > 0$. Theo định lý, tồn tại một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thuộc khoảng (a, b). Xét giá trị $f(\frac{a+b}{2})$,

- Nếu $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$.
- Nếu $f(\frac{a+b}{2}) < 0$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$.

Thực hiện liên tiếp thao tác trên, ta thu hẹp được phạm vi của nghiệm.

Bài tập kết thúc chương

Giáo trình: Nguyễn Thủy Thanh, Bài tập Toán cao cấp tập 2.

- Bài 3, 4, . . . , 10 trang 35, 36
- Bài 11, 12, . . . , 26 trang 36, 37
- Bài 1, 2, 3, 6 trang 48, 49