Ôn tập hình học

Ngày 30 tháng 5 năm 2021

Bài toán 1. Cho đường thẳng d cố định và một điểm A cố định nằm ngoài đường thẳng d. Gọi B là hình chiếu vuông góc của A trên d và (O, R) là đường tròn đường kính AB. Một đường thẳng t thay đổi đi qua O cắt đường tròn (O) tại hai điểm C và D thỏa mãn $C \neq A, D \neq A$. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của AC, AD và d. Gọi J là trung điểm của đoạn MN. Lấy điểm Q sao cho tứ giác $AOQJ$ là một hình bình hành.

a) Chứng minh $\triangle ACD \backsim \triangle ANM$.

b) Chứng minh $AJ \perp CD$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài của MN.

d) Chứng minh $QD = QN$, và bốn điểm C, D, N, M cùng thuộc một đường tròn.

e) Tìm giá trị nhỏ nhất của $S(AMN)$.

f) Tìm giá trị nhỏ nhất của $S(CDNM)$.

g) Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM + AN$.

h) Tìm giá trị lớn nhất của $AC + AD$.

i) Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM + AN + AC + AD$.

j) Chứng minh $S(JCD) \geq S(ACD)$.

Bài toán 2. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H và ba đường cao AD, BE, CF. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng BC, CA, AB. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng HA, HB, HC. Chứng minh chín điểm $M, N, P, D, E, F, P, Q, R$ cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 3. Cho đường tròn (O) cố định và một đường thẳng d cố định nằm ngoài đường tròn (O). Điểm M thay đổi trên đường thẳng d, kẻ tiếp tuyến MA, MB của đường tròn (O), $A, B \in (O)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d và K là giao điểm của AB và OH. Gọi N là giao điểm của OM và AB.
a) Chứng minh $\triangle ONK \backsim \triangle OHM$.
b) Chứng minh AB luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên d.

c) Chứng minh trực tâm của $\triangle MAB$ thuộc một đường tròn cố định khi M thay đổi trên d.

Bài toán 4. Cho đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$ với D, E, F lần lượt là tiếp điểm của BC, CA, AB với (I). Gọi M là giao điểm của AI và EF, S là giao điểm của EF và BC, T là giao điểm khác D của AD và (I).

a) Chứng minh tứ giác $SMID$ là một tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh ST tiếp xúc với (I).

Bài toán 5. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa cung BC không chứa A của đường tròn (O), D là giao điểm của AM và BC. Gọi I, K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC, \triangle BDM$, và $\triangle CDM$. Điểm Q đối xứng với I qua đường thẳng KL.

a) Chứng minh $KB = KQ$, $LC = LQ$.

b) Chứng minh $\widehat{BQC} = 90°$.

Bài toán 6. Cho $\triangle ABC$ nhọn với hai đường cao BL, CK. Lấy $S \in CK$, $T \in BL$ sao cho $\widehat{SAT} = 90°$. Gọi V là hình chiếu của A trên ST.
a) Chứng minh bốn điểm B, K, L, V cùng thuộc một đường tròn.
b) Chứng minh $\widehat{BVC} = 90°$.

Bài toán 7. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi T là một điểm thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O), $T \neq B, C$. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AT với trung trực của đoạn AB, trung trực của đoạn AC. Gọi M là giao điểm của đường thẳng qua E song song với AB và tiếp tuyến của (O) tại B. Gọi N là giao điểm của đường thẳng qua F song song với AC và tiếp tuyến của (O) tại C.
a) Chứng minh MT tiếp xúc với (O) tại T.
b) Chứng minh MN tiếp xúc với (O) tại T.

Bài toán 8. Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Điểm M di chuyển trên đường tròn (O). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\mathcal{V} = MA.MB.MC.MD$.

Bài toán 9. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi S là giao điểm của AB và CD, gọi T là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng bốn đường tròn (SBC), (SAD), (TAB), (TCD) cùng đi qua một điểm thuộc đường thẳng ST.