Chương 3. Đạo hàm và vi phân của hàm số một biến (4 tuần)

Hoàng Anh Quân

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Mục lục

Đạo hàm và vi phân cấp một

3Blue1Brown, Essence of calculus

Link

Timestamp 5:33-5:34 and 8:08-8:41

Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng (a, b). Hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm c thuộc (a, b) nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$$

Khi đó, số A được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại $x = c$, ký hiệu là $f'(c) = A$.

Định nghĩa 2. Nếu hàm số $f(x)$ khả vi tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì ta nói $f(x)$ khả vi trong khoảng (a, b). Từ đó ta định nghĩa được hàm f' xác định trên (a, b).

Nhận xét.

1. Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại $x = c$. Khi đó đồ thị của đường thẳng $y = f'(c)(x - c) + f(c)$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
2. Nếu $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = \infty$, ta nói $f(x)$ có đạo hàm vô cùng và tiếp tuyến của $f(x)$ tại $x = c$ vuông góc với trục hoành.

Luyện tập

Bài tập 1. Tính các đạo hàm của các hàm số sau

- $f(x) = M$
- $g(x) = 2x$
- $h(x) = x^6$
- $k(x) = \dfrac{1}{x}$
- $l(x) = \dfrac{1}{x^2}$
- $p(x) = \sin x$

Câu hỏi. Dễ thấy $h'(x) = 2x$ với x bất kỳ, do đó $h'(3) = 6$. Con số 6 này thể hiện điều gì?

Các công thức tính đạo hàm cơ bản

Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ khả vi tại điểm x, cho một hằng số c. Khi đó

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- $(c \cdot f)'(x) = cf'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Bài tập 2. Tính đạo hàm theo biến x của $f(x) = x^6$ và $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Nhận xét. Một mẹo để nhớ dấu cộng/trừ trong công thức đạo hàm của $f \cdot g$ và $\frac{f}{g}$ là thay một vài hàm số đơn giản vào biểu thức, ví dụ

$$f(x) = 1, g(x) = x.$$

Đạo hàm của hàm hợp

Đạo hàm của hàm hợp $y = f(g(x))$ được tính theo công thức

$$y'_x = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Bài tập 3. Cho $f(t) = t^2$, $g(t) = t + 5$. Tính đạo hàm (theo biến x) của hàm số $f(g(x))$ theo hai cách khác nhau.

Bài tập 4. Xét các *hàm đơn giản* $m(x) = x^3, n(x) = x^2, p(x) = \dfrac{1}{x}$ và cho trước đạo hàm của các hàm này.
Viết từng hàm $f(x) = x^6$ và $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ dưới dạng hợp của hai *hàm đơn giản* rồi tính đạo hàm (theo biến x) của chúng, dựa theo công thức đạo hàm của hàm hợp.

Đạo hàm của hàm ngược

Nếu hàm số $y = y(x)$ có hàm ngược $x = x(y)$ và $y'_x \neq 0$, ta suy ra

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Bài tập 5. Tính đạo hàm của hàm số $m(t) = \arcsin t$ trên miền xác định $E = (-1, 1)$.

Bài làm.

Nhận xét: hàm số $m(t)$ có miền xác định E và miền giá trị $F = \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó $m \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, suy ra $\cos m > 0$.

Hàm ngược của $m(t)$ được xác định bởi công thức $t(m) = \sin m$. Chú ý rằng $t'(m) = \cos m \neq 0$ (cmt). Vậy nên đạo hàm của hàm số $m(t)$ là

$$m'(t) = \frac{1}{t'(m)} = \frac{1}{\cos m} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 m}} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Bài tập 6. Tính đạo hàm của hàm số $y = \arcsin(\sin(x))$.

Một số đạo hàm cơ bản - phần 1

- x^α, xét ví dụ với $\alpha = 0, 2, -1, -2, \dfrac{-1}{2}$
- a^x (với $a > 0$), xét ví dụ với $a = e, 1$
- $\log_a x$ (với $a > 0, a \neq 1$), xét ví dụ với $a = e$
- $\sin x, \cos x$
- $\tan x, \cot x$
- $\arcsin x, \arccos x$
- $\arctan x, \operatorname{arccot} x$

Nhận xét. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (-\arccos x)'$, do đó

$$\arcsin x = -\arccos x + C$$

Tìm giá trị của hằng số C.

Một số đạo hàm cơ bản - phần 2

Nhận xét. Ta đã biết $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Hãy tính đạo hàm (theo biến x) của hàm số $f(x) = u^\alpha$ với u là một hàm số theo biến x.
Trả lời. Ta viết $f(x) = m(u(x))$ trong đó $m(t) = t^\alpha$. Áp dụng công thức đạo hàm của hàm hợp, ta có

$$(u^\alpha)' = f'(x) = m'(u(x)) \cdot u'(x) = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

Tương tự cho các đạo hàm cơ bản còn lại.

Luyện tập

Bài tập 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau

- $m(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 1}$
- $n(x) = \ln\left(x^3 + 7x + 2\right)$
- $p(x) = \sin\left(5 - x^2\right)$
- $q(x) = \sin^4\left(5 - x^2\right)$

Bài tập 8. Tính đạo hàm của các hàm số sau

- $m(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$
- $n(x) = x^{1/x}$
- $p(x) = |\sin x|$
- $q(x) = \log_x 7$

Gợi ý. Sử dụng biến đổi $u^v = e^{\ln u \cdot v}$ và $|u| = \sqrt{u^2}$

Bài tập 9. Tính đạo hàm của hàm số $y(x) = \ln u(x)$.
Gợi ý. $y' = \frac{u'}{u}$

Mối quan hệ giữa tính khả vi và tính liên tục (đọc thêm)

Định lý 1. Cho hàm số $f(x)$ khả vi tại $x = c$. Khi đó hàm f liên tục tại $x = c$.

Câu hỏi. Biết rằng hàm số $g(x)$ liên tục tại $x = c$, có thể suy ra g khả vi tại $x = c$ hay không?

Câu hỏi nâng cao

1. Chỉ ra một hàm số không liên tục tại 1 điểm.
2. Chỉ ra một hàm số không liên tục tại 2 điểm.
3. Chỉ ra một hàm số không liên tục tại vô hạn điểm.
4. Chỉ ra một hàm số không liên tục tại tất cả điểm.
5. Chỉ ra một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nhưng không khả vi tại 1 điểm.
6. Chỉ ra một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nhưng không khả vi tại 2 điểm.
7. Chỉ ra một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nhưng không khả vi tại vô hạn điểm điểm.
8. Chỉ ra một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nhưng không khả vi tại tất cả điểm trên $\mathbb{R}$.

Vi phân

Cho hàm số f. Tích số $f'(x)\Delta x$ xét tại điểm x được gọi là vi phân của $f(x)$, ký hiệu là df. Ta có

$$df = f'(x)\Delta x.$$

Xét hàm số $g(x) = x$, theo định nghĩa trên, ta có $dg = g'(x)\Delta x$ hay $dg = \Delta g$. Điều đó suy ra $dx = \Delta x$.

Vậy nên $df = f'(x)dx$ và $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$.

Đạo hàm một phía, đạo hàm theo tham số

Đạo hàm một phía

Định nghĩa 3. Cho hàm số $f(x)$.
Hàm số $f(x)$ tồn tại đạo hàm trái tại $x = c$ nếu giới hạn sau tồn tại

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Hàm số $f(x)$ tồn tại đạo hàm phải tại $x = c$ nếu giới hạn sau tồn tại

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Nhận xét.
- Đại lượng $f'_+(c)$ có thể không tồn tại trong khi $\lim_{x \to c^+} f'(x)$ tồn tại.
- Nếu đạo hàm trái $f'_-(c)$ tồn tại thì hàm $f(x)$ liên tục bên trái tại $x = c$. Tương tự, nếu đạo hàm phải $f'_+(c)$ tồn tại thì hàm $f(x)$ liên tục bên phải tại $x = c$ (chứng minh?).

Định lý 2. Hàm số $f(x)$ khả vi tại $x = c$ khi và chỉ khi $f'_-(c) = f'_+(c)$.

Luyện tập

Bài tập 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu } x \leq x_0 \\ ax + b & \text{nếu } x > x_0 \end{cases}$$

Tìm a, b sao cho hàm số $f(x)$ liên tục và khả vi tại $x = x_0$.

Đạo hàm theo tham số

Cho $x = f(t), y = g(t)$ trong đó t là một tham số. Khi đó ta có

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Bài tập 2. Tính giá trị y'_x theo tham số t trong các ý sau đây

(a) $x = a\cos t, y = a\sin t$

(b) $x = a(1 - \sin t), y = a(1 - \cos t)$

Bài tập 3. Ví dụ 6 trang 67 *Gợi ý.* (Đạo hàm theo tham số) Chú ý cách xác định y''(x) = (y'(x))'

Đạo hàm cấp cao

Khái niệm đạo hàm cấp cao

Cho hàm số $f(x)$ và $n \in \mathbb{N}$. Đạo hàm cấp n của $f(x)$ được định nghĩa bởi

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \ \forall n \geq 1.$$

Các đạo hàm $f^{(1)}(x), f^{(2)}(x)$ có cách viết khác lần lượt là $f'(x), f''(x)$.

Khái niệm đạo hàm cấp cao

Cho hàm số $f(x)$ và $n \in \mathbb{N}$. Đạo hàm cấp n của $f(x)$ được định nghĩa bởi

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \ \forall n \geq 1.$$

Các đạo hàm $f^{(1)}(x), f^{(2)}(x)$ có cách viết khác lần lượt là $f'(x), f''(x)$.

Nhận xét.

1. $f^{(n)}(x)$ (đạo hàm cấp n) **khác với** $f^n(x)$ (lũy thừa số mũ n).
2. Chú ý rằng $x^0 = 1, x^1 = x$ và $x^{(0)} = x, x^{(1)} = 1$.
3. Hàm f được gọi là khả vi cấp n trong khoảng (a, b) nếu nó có đạo hàm cấp n tại mọi điểm trong (a, b).
4. Hàm f được gọi là khả vi liên tục (cấp n) nếu hàm đạo hàm (cấp n) của nó là liên tục.
5. Hàm f khả vi vô hạn lần nếu nó có đạo hàm liên tục mọi cấp, ví dụ $f(x) = e^x$.
6. Các **đa thức** và **hàm hữu tỉ** đều khả vi vô hạn lần.

Luyện tập

Bài tập 4. Xét $m, n \in \mathbb{N}$, tính $(x^n)^{(m)}$.

Bài tập 5. Tính đạo hàm cấp hai của những hàm số sau đây

- $y(x) = e^{-x^2}$
- $y(x) = xe^{-x}$
- $y(x) = \tan x$
- $y(x) = x^3 2^x$

Bài tập 6. Với $n \in \mathbb{N}$, tìm đạo hàm cấp n của những hàm số sau (biết rằng α, a là những hằng số):

- $m(x) = x^\alpha$
- $p(x) = \log_a x$
- $r(x) = \cos x$
- $n(x) = a^x$
- $q(x) = \sin x$

Gợi ý. Chứng minh $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ bằng phương pháp quy nạp.

Bài tập 7. Với $n \in \mathbb{N}$, tìm đạo hàm cấp n của những hàm số sau:

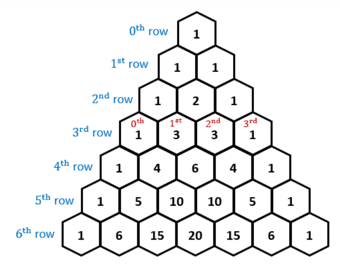
- $g(x) = \sin^2 x$
- $h(x) = \cos^3 x$
- $k(x) = \sin 5x \cos 2x$

Nhắc lại kiến thức

Cho $n \in \mathbb{N}$, k là một số nguyên thỏa mãn $0 \leq k \leq n$. Ta định nghĩa

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

là tổ hợp chập k của n phần tử. Về mặt ý nghĩa, C_n^k là số cách chọn k phần tử không có thứ tự từ một tập hợp gồm n phần tử. Ví dụ, $C_n^0 = 1, C_n^1 = n, C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}, \ldots$



Hình 1: Pascal's triangle. Source: Brilliant

Ví dụ. Giả sử cần chọn ra 10 bạn trong một lớp có 70 sinh viên để chấm bài tập. Khi đó có tất cả C_{70}^{10} cách chọn khác nhau.

Quy tắc tính đạo hàm cấp cao

Định lý 3. Giả sử các hàm f và g khả vi cấp n trên khoảng $(a, b) \in \mathbb{R}$. Khi đó hàm $f + g$, $f \cdot g$ cũng khả vi cấp n trên khoảng (a, b) và

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

$$\begin{aligned}(f \cdot g)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \\ &= C_n^0 f^{(0)} g^{(n)} + C_n^1 f^{(1)} g^{(n-1)} + \ldots + C_n^n f^{(n)} g^{(0)}\end{aligned}$$

Nhận xét. Kết quả về $(f \cdot g)^{(n)}$ còn được gọi là công thức Leibnitz, vế phải của công thức này là một tổng gồm $(n+1)$ số hạng. Với $n = 2$, công thức trở thành:

$$(f \cdot g)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

Có thể thu được công thức trên bằng tính toán trực tiếp như sau:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'' &= ((f \cdot g)')' = (f'g + fg')' = (f'g)' + (fg')' \\ &= (f''g + f'g') + (f'g' + fg'') = f''g + 2f'g' + fg''\end{aligned}$$

Bài tập 1. Với $n \in \mathbb{N}$, tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y(x) = x^2 \cos x$.

Câu hỏi. Biết rằng $f(t) = 0$ với mọi $t \geq 4$. Tìm điều kiện của n để

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{3} f(k).$$

Bài tập 2. Cho $y(x) = \ln(x^2 + x)$. Tính $y^{(10)}(1)$.

Các định lý về giá trị trung bình (đọc thêm)

Điểm cực trị

Định nghĩa 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b).

1. Điểm $x = c \in (a, b)$ được gọi là một điểm cực đại của $f(x)$ nếu tồn tại δ sao cho

$$f(t) \leq f(c) \quad \forall t \in (a, b) \text{ thỏa mãn } |t - c| < \delta$$

2. Điểm $x = c \in (a, b)$ được gọi là một điểm cực tiểu của $f(x)$ nếu tồn tại δ sao cho

$$f(t) \geq f(c) \quad \forall t \in (a, b) \text{ thỏa mãn } |t - c| < \delta$$

3. Điểm $x = c$ được gọi là một điểm cực trị của $f(x)$ nếu nó là một điểm cực đại hoặc một điểm cực tiểu.

Định lý Fermat

Định lý 4. Nếu hàm số $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ đạt cực trị tại điểm $c \in (a, b)$ và f khả vi tại c thì $f'(c) = 0$.

Nhận xét.

1. Định lý trên cho ta điều kiện cần để tồn tại cực trị, tức là trả lời câu hỏi "Nếu đây là một điểm cực trị thì nó phải thỏa mãn tính chất gì?"
2. Định lý không cho ta biết về điều kiện đủ của một điểm cực trị. Nói cách khác, cho dù có điểm c thỏa mãn $f'(c) = 0$ thì cũng không khẳng định được đó là một điểm cực trị. Thật vậy, xét hàm số $f(x) = x^3$.

Định lý 5. (Rolle) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn

1. $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$
2. $f(x)$ khả vi trong (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Khi đó tồn tại $m \in (a, b)$ sao cho $f'(m) = 0$.

Định lý 6. (Lagrange) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn

1. $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$
2. $f(x)$ khả vi trong (a, b)

Khi đó tồn tại $m \in (a, b)$ sao cho $f'(m) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Khử các dạng vô định
Quy tắc L'Hospital

Dạng vô định $0/0$.

Giả sử hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

(ii) Hàm số $f(x)$ và $g(x)$ khả vi trong một lân cận nào đó của điểm $x = a$ và $g'(x) \neq 0$ trong lân cận đó, trừ ra điểm $x = a$.

(iii) Tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô cùng) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$.

Khi đó,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dạng vô định ∞/∞ với ký hiệu ∞ là $+\infty$ hoặc $-\infty$.

Giả sử hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn điều kiện (ii) và (iii) của định lý trên và thỏa mãn điều kiện $(i)^*$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Khi đó,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Luyện tập

Bài tập 1. Tính các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-8x+6}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - (1-\frac{1}{2}x^2)}{x^4}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - (x-\frac{1}{6}x^3)}{x^5}$

Nhận xét.
1. Sau này, có thể áp dụng trực tiếp quy tắc L'Hospital nếu như các điều kiện được thỏa mãn, thay vì trình bày chi tiết phần kiểm tra tính đúng đắn của điều kiện.
2. Sinh viên có thể tận dụng các giới hạn được công nhận, ví dụ $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x/x) = 1$, thay vì phải áp dụng quy tắc L'Hospital cho những giới hạn đó.

Các dạng vô định khác

Bài tập 2. Tính các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x + x^2) - \sin x}{x^2}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 - 3x} + \ln(1 + x) - 1}{x^2}$

Bài tập 3. Cho một số tự nhiên n, tính $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$.

Gợi ý. Áp dụng quy tắc L'Hospital nhiều lần liên tiếp.

Một số dạng vô định khác: $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty, \ldots$

Bài tập 4. Tính $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$.

Gợi ý. Có hai cách tiếp cận bài toán này, cách nào hợp lý hơn?
(1) chuyển đại lượng cần khảo sát về dạng vô định 0/0, hoặc
(2) chuyển về dạng vô định ∞/∞.

Bài tập 5. Tính $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$, $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\sin x)^{1+\tan^2 x}$. *Gợi ý.* $u^v = e^{v \ln u}$.

Hạn chế của quy tắc L'Hospital

Nhận xét. L'Hospital là một công cụ mạnh để tính giới hạn. Tuy nhiên nó không phải một công cụ toàn năng có thể tìm lời giải cho mọi bài toán giới hạn.

Bài tập 6. Giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$ có dạng vô định (vì sao?), hãy tính giá trị của giới hạn này.
Nếu sử dụng quy tắc L'Hospital thì ta được kết quả ra sao?

Khai triển Taylor,
khai triển Maclaurin

Một bài tập quen thuộc

Hãy tính giới hạn sau

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x)(\cos x - 1)}{x^5}.$$

Câu hỏi. Nếu lựa chọn phương pháp L'Hospital để giải quyết bài toán trên, ta cần tính đạo hàm bao nhiêu lần?

Ký hiệu $o(.)$

Định nghĩa 5. Cho $n \in \mathbb{N}$. Xét $x \to 0$, ta ký hiệu $o(x^n)$ là một hàm số thỏa mãn

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0.$$

Ta nói $o(x^n)$ là một hàm số không đáng kể so với x^n khi $x \to 0$.

Câu hỏi. Khi $x \to 0$, các đại lượng $1, x, x^2, x^3, \ldots$ có độ lớn tương quan với nhau như thế nào?

Nhận xét. Nếu không chú ý gì thêm, ta luôn xét $x \to 0$ trong các tính toán.

Ví dụ.

- x^5 là $o(x^2)$ khi $x \to 0$ và x^5 là $o(x^4)$ khi $x \to 0$.
  Kết quả nào là *tốt hơn*?
- $(\sin x)^2$ là $o(x)$ khi $x \to 0$
- $1 - \cos x$ là $o(x)$ khi $x \to 0$

Luyện tập

Bài tập 7. Xét $n, m \in \mathbb{N}$. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)$ là $o(x^m)$ khi $x \to 0$. Đặt $g(x) = x^n f(x)$. Chứng minh $g(x)$ là $o(x^{n+m})$. Từ đó ta rút ra kết luận

$$x^n \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$$

Bằng lập luận tương tự, ta thu được những phép toán sau

- $k \cdot o(x^m) = o(x^m)$ với $k \in \mathbb{R}$
- $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$

Bài tập 8. Cho hàm số $f(x)$ là $o(x^m)$ khi $x \to 0$, hàm số $g(x)$ là $o(x^n)$ khi $x \to 0$ với điều kiện $n \leq m$. Chứng minh hàm số $(f+g)(x)$ là $o(x^n)$ khi $x \to 0$. Từ đó ta rút ra kết luận

$$o(x^n) + o(x^m) = o(x^n)$$

Mở rộng của $o(x^n)$

Thay vì chỉ xét $o(x^n)$, người ta còn xét $o(f(x))$ với ý nghĩa tương tự.

Định nghĩa 6. Cho $f(x)$ là một hàm số. Xét $x \to a$, ta ký hiệu $o(f(x))$ là một hàm số thỏa mãn

$$\lim_{x \to a} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0.$$

Ta nói $o(f(x))$ là một hàm số không đáng kể so với $f(x)$ khi $x \to a$.

Khai triển Taylor (đọc thêm)

Định lý 7. Giả sử hàm $f(x)$ xác định trong một lân cận của $x = x_0$ và khả vi n lần tại điểm $x = x_0$. Khi đó ta có

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Ví dụ. Áp dụng khai triển Taylor cho $f(x) = \sin x$ tại $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Khai triển Maclaurin

Định nghĩa 7. Khai triển Maclaurin là khai triển Taylor tại điểm $x = 0$. Khai triển Maclaurin được viết dưới dạng:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Nhận xét. Khai triển Maclaurin giúp ta xấp xỉ một hàm số bất kỳ (miễn là có đạo hàm tới cấp phù hợp) bởi một đa thức và thừa ra một thành phần *rất nhỏ*. Chú ý rằng xấp xỉ này chỉ đủ tốt ở xung quanh điểm thực hiện khai triển, trong trường hợp của khai triển Maclaurin, $x = 0$.

Một số công thức khai triển cơ bản

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

Phép toán trên khai triển Taylor/Maclaurin

- Phép cộng
- Phép nhân
- Phép lấy hàm hợp (đọc thêm)

Bài tập 1. Cho $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + o(x^2)$ và $g(x) = 3 - o(x)$. Tính $f + g$ và fg.

Ta quay trở lại với bài toán đặt ra ở phần mở đầu

Bài tập 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x - x)(\cos x - 1)}{x^5}.$$

Câu hỏi. Liệu khai triển $\sin x = x + o(x^2)$ và $\cos x = 1 + o(x)$ đã đủ để giải quyết bài toán hay chưa?

Nên sử dụng khai triển Maclaurin với *độ chính xác* vừa đủ.

Bài tập kết thúc chương

Giáo trình: Nguyễn Thủy Thanh, Bài tập Toán cao cấp tập 2.

- Đạo hàm cấp một: bài 1, 2, . . ., 33 (trang 69-71)
- Đạo hàm cấp hai: bài 56, 57, . . ., 62 (trang 73-74)
- Đạo hàm cấp ba: bài 63, 64, . . ., 69 (trang 74)
- Đạo hàm cấp n: bài 70, 71, . . ., 84 (trang 74-75)
- Quy tắc L'Hospital: bài 1, 2, . . ., 38 (trang 93-95)
- Khai triển Maclaurin: bài 21, 22, . . ., 28 (trang 107-108)