Chương 5. Chuỗi số và chuỗi hàm (3 tuần)

Hoàng Anh Quân

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Mục lục

Chuỗi số

Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho một dãy số (a_n). Biểu thức dạng

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

được gọi là một chuỗi số với các số hạng $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Đặt $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, khi đó s_n là tổng riêng thứ n của chuỗi.

Ví dụ. Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với số hạng tổng quát $a_n = \frac{1}{2^n}$.
Dãy tổng riêng là tương ứng là $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8} \ldots$

Nhận xét. Chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ còn có thể được viết là $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$.

Chuỗi số hội tụ, chuỗi số phân kỳ

Định nghĩa 2. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là **hội tụ** nếu dãy các tổng riêng $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ tương ứng có giới hạn hữu hạn (gọi là L). Khi đó, ta nói **tổng của chuỗi số** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là L.

Nếu dãy (s_n) không có giới hạn hữu hạn thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **phân kỳ**.

Nhận xét. Một chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hoặc hội tụ hoặc phân kỳ.

Luyện tập

Bài tập 1. Sử dụng định nghĩa, chứng minh những chuỗi số sau đây hội tụ và tính tổng của các chuỗi này

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+2)}$

Bài tập 2. Sử dụng định nghĩa, chứng minh những chuỗi số sau đây phân kỳ

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, với $a_n = (-1)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, với $b_n = 2^n$

Luyện tập

Bài tập 3. Chứng minh chuỗi điều hòa $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ là một chuỗi phân kỳ.

Gợi ý. Với một số nguyên dương n_0 bất kì, chỉ ra $m \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0 + 1} + \dots \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$$

Gợi ý. $S_{2^m} > 1 + \frac{m}{2}$

Bài tập 4. Chứng minh chuỗi số $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ là một chuỗi hội tụ.

Gợi ý. Một dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ.

Điều kiện cần để chuỗi số hội tụ

Định lý 1. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Câu hỏi. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ có luôn hội tụ hay không?

Điều kiện cần để chuỗi số hội tụ

Định lý 1. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Câu hỏi. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ có luôn hội tụ hay không?

Nhận xét. Ngược lại, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ không tồn tại hoặc tồn tại nhưng khác 0 thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ (chứng minh bằng nguyên lý phản chứng).

Bài tập 1. Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, gồm các số hạng dương.
Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin a_n}{a_n} = 1$

Bài tập 2. Chứng minh những chuỗi số sau đây phân kỳ

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, với $a_n = \frac{2n-1}{3n+2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, với $b_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

Tính chất của chuỗi số

1. Tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số không thay đổi khi ta bỏ đi hữu hạn số hạng của chuỗi.
2. Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ có tổng là s. Đặt phần dư $R_m = s - s_m$. Khi đó $R_m \to 0$ khi $m \to \infty$.
3. Tính cộng tính của chuỗi số hội tụ. Xét hai hằng số α, β và hai chuỗi số hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ có tổng lần lượt là a và b. Khi đó chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$
hội tụ và có tổng là $\alpha a + \beta b$.

Câu hỏi. Tổng hai chuỗi phân kỳ thì sao?

Chuỗi số dương

Định nghĩa 3.

1. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là một chuỗi số dương nếu

$$a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là một chuỗi số dương thực sự nếu

$$a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Định lý 2. (tiêu chuẩn hội tụ) Một chuỗi số dương hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng của nó bị chặn trên.

Gợi ý. Nhận xét về dãy tổng riêng tương ứng.

Các chuỗi số tiêu biểu (giáo trình trang 180)

Xét $a, q \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a \neq 0$. Chuỗi cấp số nhân $\sum_{n \geq 0} a \cdot q^n$ hội tụ/phân kỳ tùy theo giá trị của công bội q

Câu hỏi. Nêu công thức tính tổng của một chuỗi cấp số nhân hội tụ.

Các chuỗi số tiêu biểu (giáo trình trang 180)

Xét $a, q \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a \neq 0$. Chuỗi cấp số nhân $\sum_{n\geq 0} a \cdot q^n$ hội tụ/phân kỳ tùy theo giá trị của công bội q

Câu hỏi. Nêu công thức tính tổng của một chuỗi cấp số nhân hội tụ.

Xét $\alpha > 0$. Chuỗi Dirichlet $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ/phân kỳ tùy theo giá trị của α

Chuỗi điều hòa là chuỗi Dirichlet với $\alpha = 1$

Dấu hiệu so sánh I/II

Dấu hiệu so sánh I. Cho hai chuỗi số dương $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ thoả mãn $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó

(a) Nếu chuỗi A ... thì ...

(b) Nếu chuỗi B ... thì ...

Câu hỏi. Vì sao cần điều kiện chuỗi số dương?

Dấu hiệu so sánh I/II

Dấu hiệu so sánh I. Cho hai chuỗi số dương $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ thoả mãn $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó

(a) Nếu chuỗi A ... thì ...

(b) Nếu chuỗi B ... thì ...

Câu hỏi. Vì sao cần điều kiện chuỗi số dương?

Dấu hiệu so sánh II. Giả sử $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ là hai chuỗi số dương thực sự và $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda$. Mối quan hệ của sự hội tụ của hai chuỗi số này phụ thuộc vào giá trị λ, cụ thể

(a) Khi $\lambda = 0$, nếu chuỗi B ... thì chuỗi A ...

(b) Khi $\lambda = 0$, nếu chuỗi A ... thì chuỗi B ...

(c) Khi $0 < \lambda < \infty$, chuỗi A và chuỗi B đồng thời hội tụ hoặc phân kỳ

(d) Khi $\lambda = \infty$, nếu chuỗi A ... thì chuỗi B ...

(e) Khi $\lambda = \infty$, nếu chuỗi B ... thì chuỗi A ...

Luyện tập

Bài tập 1. Khảo sát sự hội tụ của những chuỗi số sau

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2n}{n^2+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$

Gợi ý. Xét một chuỗi, nếu muốn chứng minh nó là hội tụ, ta có thể chỉ ra một chuỗi hội tụ khác "lớn hơn" chuỗi đang xét.

Câu hỏi. Đánh giá tổng của những chuỗi số hội tụ trong những chuỗi số trên.

Dấu hiệu D'Alembert, dấu hiệu Cauchy, dấu hiệu tích phân

Xét **chuỗi số dương** $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dấu hiệu D'Alembert. Giả sử giới hạn $\mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ tồn tại.

Nếu $\mathcal{D} < 1$ thì chuỗi A ... Nếu $\mathcal{D} > 1$ thì chuỗi A ...

Dấu hiệu Cauchy. Giả sử giới hạn $\mathcal{C} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ tồn tại.

Nếu $\mathcal{C} < 1$ thì chuỗi A ... Nếu $\mathcal{C} > 1$ thì chuỗi A ...

Dấu hiệu tích phân. Khảo sát sự hội tụ dựa theo sự hội tụ của tích phân suy rộng. Tham khảo trong giáo trình.

Dấu hiệu D'Alembert, dấu hiệu Cauchy, dấu hiệu tích phân

Xét **chuỗi số dương** $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dấu hiệu D'Alembert. Giả sử giới hạn $\mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ tồn tại.

Nếu $\mathcal{D} < 1$ thì chuỗi A ... Nếu $\mathcal{D} > 1$ thì chuỗi A ...

Dấu hiệu Cauchy. Giả sử giới hạn $\mathcal{C} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ tồn tại.

Nếu $\mathcal{C} < 1$ thì chuỗi A ... Nếu $\mathcal{C} > 1$ thì chuỗi A ...

Dấu hiệu tích phân. Khảo sát sự hội tụ dựa theo sự hội tụ của tích phân suy rộng. Tham khảo trong giáo trình.

Sử dụng *chuỗi cấp số nhân* để minh họa cho những kết quả trên.
Có thể áp dụng những dấu hiệu trên để chứng minh sự hội tụ/phân kỳ của dãy điều hòa hay không?

Công thức hữu ích

Stirling's approximation

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Inequalities

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

Luyện tập

Bài tập 2. Khảo sát sự hội tụ của những chuỗi số sau

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$

Câu hỏi. Khi nào nên dùng dấu hiệu nào?

Chuỗi đan dấu

Chuỗi với số hạng có dấu tùy ý

Xét chuỗi số $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ thỏa mãn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ. Khi đó chuỗi số A được gọi là hội tụ tuyệt đối.

Định lý 3. Nếu một chuỗi số hội tụ tuyệt đối thì chuỗi số đó hội tụ.

Bài tập 1. Chứng minh chuỗi số $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ hội tụ.

Chuỗi đan dấu và dấu hiệu Leibnitz

Định nghĩa 4. Cho các số $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ là các số không âm. Chuỗi số có dạng

$$a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n$$

hoặc

$$-a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n$$

là một chuỗi đan dấu.

Định lý 4. (Dấu hiệu Leibnitz) Nếu $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ và $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ thì chuỗi đan dấu kể trên hội tụ.

Bài tập 1. Chứng minh chuỗi đan dấu $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots$ hội tụ.

Chuỗi hàm

Thay vì xét các số $a_1, a_2, \ldots$ như trong chuỗi số, ta xét các hàm $u_1(x), u_2(x), \ldots$ Khái niệm tổng riêng thứ n của chuỗi hàm đó là

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

Chuỗi hàm

Thay vì xét các số $a_1, a_2, \ldots$ như trong chuỗi số, ta xét các hàm $u_1(x), u_2(x), \ldots$ Khái niệm tổng riêng thứ n của chuỗi hàm đó là

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

Sự hội tụ/phân kỳ của chuỗi hàm được xét với từng giá trị $x = x_0$ cụ thể. Miền hội tụ M của một chuỗi hàm là tập những giá trị x mà chuỗi hàm đó hội tụ, khi đó ta định nghĩa được tổng của chuỗi hàm trên tập M

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \quad \forall x \in M.$$

Chuỗi hàm

Thay vì xét các số $a_1, a_2, \ldots$ như trong chuỗi số, ta xét các hàm $u_1(x), u_2(x), \ldots$ Khái niệm tổng riêng thứ n của chuỗi hàm đó là

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

Sự hội tụ/phân kỳ của chuỗi hàm được xét với từng giá trị $x = x_0$ cụ thể. Miền hội tụ M của một chuỗi hàm là tập những giá trị x mà chuỗi hàm đó hội tụ, khi đó ta định nghĩa được tổng của chuỗi hàm trên tập M

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \quad \forall x \in M.$$

- $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$
- $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots$
- $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$

Câu hỏi. Những chuỗi hàm trên từng xuất hiện ở đâu? Miền hội tụ?

Chuỗi lũy thừa

Chuỗi lũy thừa là một chuỗi hàm có dạng $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
Tập những điểm mà chuỗi hội tụ tạo thành miền hội tụ, với bán kính R của miền có thể được xác định theo công thức trong giáo trình.

Chuỗi Fourier (đọc thêm)

Cho $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π, khả tích trong $[-\pi, \pi]$. Khi đó ta có thể viết $f(x)$ dưới dạng tổng của một chuỗi Fourier như sau:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Bài tập kết thúc chương

Giáo trình: Nguyễn Thủy Thanh, Bài tập Toán cao cấp tập 3.

- Giới hạn của dãy tổng riêng: bài 4, 5, 7, 10 (trang 184-185)
- Dấu hiệu so sánh: bài 24, 25, ..., 43 (trang 186-187)
- Dấu hiệu D'Alembert, dấu hiệu Cauchy: bài 49, 50, ..., 70 (trang 188-190)