Chương 1. Tập hợp, dãy số, hàm số (2 tuần)

Hoàng Anh Quân

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Mục lục

Tập hợp

Khái niệm tập hợp

- Ví dụ về tập hợp: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \varnothing$.

- Phần tử của một tập hợp. Kí hiệu toán học $\in$ và $\notin$.

Ví dụ. $1 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

- Hai cách xác định một tập hợp

$+$ Liệt kê

$$A = \{5, 6, 7\} \qquad B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

$+$ Nêu đặc trưng

$$C = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x \vdots 2 \right\} \qquad D = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 0\}$$

Mối quan hệ giữa hai tập hợp

Cho hai tập hợp A và B. Ta nói A là một tập con của B, kí hiệu là $A \subset B$, nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B.

Ví dụ. $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Nhận xét. Cho hai tập hợp A và B. Nếu muốn chứng minh $A = B$, ta cần chỉ ra $A \subset B$ và $B \subset A$.

Phép toán logic: và & hoặc

Cho hai mệnh đề A và B.

Ta xét hai mệnh đề có sử dụng phép toán logic

$$C = A \text{ và } B \qquad\qquad D = A \text{ hoặc } B.$$

Mệnh đề C là đúng khi và chỉ khi cả A và B đều đúng.
Mệnh đề D là sai khi và chỉ khi cả A và B đều sai.

Câu hỏi. Mệnh đề C là sai khi nào? Mệnh đề D là đúng khi nào?

Các phép toán về tập hợp

Cho A, B là hai tập hợp.

Phép hợp

$$A \cup B = \left\{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\right\}$$

Phép giao

$$A \cap B = \left\{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\right\}$$

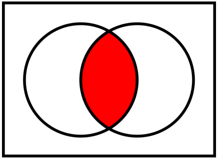
Phép trừ

$$A \setminus B = \left\{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\right\}$$

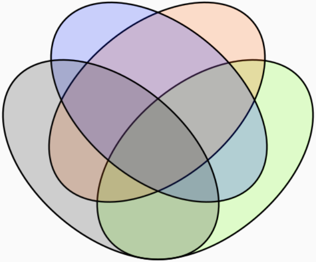
Nhận xét.
Nếu $x \in A \cap B$ thì $x \in A$.
Hay nói cách khác, nếu ($x \in A$ và $x \in B$) thì $x \in A$.

Nếu $x \in A$ thì $x \in A \cup B$.
Hay nói cách khác, nếu $x \in A$ thì ($x \in A$ hoặc $x \in B$).

Sơ đồ Venn



Hình 1: Sơ đồ Venn (Venn diagram)



Hình 2: Sơ đồ Venn cho bốn tập hợp. Nguồn: Wikipedia

Luyện tập

Bài tập 1. Chứng minh

(a) Nếu $A \subset B$ thì $A \cap B = A$
(b) Nếu $A \subset B$ thì $A \cup B = B$
(c) Nếu $A \subset B$ thì $A \setminus B = \varnothing$
(d) Điều ngược lại của ba ý trên có đúng hay không?
Ví dụ như: Nếu $A \cap B = A$ thì $A \subset B$?

Hướng dẫn.
(a) Xét $x \in A \cap B$ bất kỳ, suy ra $x \in A$ và $x \in B$, tức là $x \in A$. Do đó $A \cap B \subset A$.
Xét $y \in A$ bất kỳ, kết hợp với $A \subset B$, suy ra $y \in B$. Do đó $y \in A$ và $y \in B$, điều này suy ra $y \in A \cap B$. Vậy nên $A \subset A \cap B$.
Tóm lại, $A \cap B = A$.

Nhận xét. Việc chỉ ra tính đúng đắn trong *một* trường hợp của tập A, B không phải là chứng minh bài toán trong trường hợp tổng quát.

Luyện tập

Bài tập 2.

(a) $A \setminus B = C$ có suy ra $A = B \cup C$ không?
(b) $A = B \cup C$ có suy ra $A \setminus B = C$ không?
(c) $A \cap B \neq \varnothing, B \cap C \neq \varnothing, C \cap A \neq \varnothing$ có suy ra $A \cap B \cap C \neq \varnothing$ không?

Bài tập 3. Gọi A, B, C lần lượt là tập hợp các số nguyên chia hết cho 2, 3 và 6. Chứng minh $A \cap B = C$.

Bài tập 4.

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(c) Nếu $A \cap C \subset A \cap B$ và $A \cup C \subset A \cup B$ thì $C \subset B$
(d) Chứng minh $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

Dãy số, giới hạn dãy số

Đoạn, khoảng, nửa khoảng

Câu hỏi. Vì sao lại gọi $[a, b)$ là "nửa khoảng" mà không phải "nửa đoạn"?

Đoạn, khoảng, nửa khoảng

Câu hỏi. Vì sao lại gọi $[a, b)$ là "nửa khoảng" mà không phải "nửa đoạn"?

Vì "nửa khoảng" $[a, b)$ là kết quả thu được khi bẻ đôi "một khoảng".

Giá trị tuyệt đối của một số thực

Cho $x \in \mathbb{R}$. Ta định nghĩa giá trị tuyệt đối của x, kí hiệu là $|x|$ như sau

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

1. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$|x| = |-x|; \quad |x| \geq 0; \quad |x| \geq x; \quad |x| \geq -x; \quad |x| = \max\{x, -x\}$$

2. Với $a \geq 0$, ta có

$$|x| = a \iff \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -a \end{array}\right.$$

$$|x| \geq a \iff \left[\begin{array}{l} x \geq a \\ x \leq -a \end{array}\right.$$

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

3. Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, ta có $|x| + |y| \geq |x + y|$.

Bài tập 5. Giải bất phương trình và phương trình

(a) $|x+3| = 7$

(b) $|4x-2| > 4$

(c) $|5x-1| \leq 4$

(d) $|x+1| \geq -2$

Với mọi ($\forall$) và tồn tại ($\exists$)

Những mệnh đề sau là đúng hay là sai?

1. Với mọi $m \in \mathbb{Z}$, tồn tại $n \in \mathbb{Z}$ sao cho $n < m$.
2. Với mọi $m \in \mathbb{N}$, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n < m$.
3. Với mọi $x \in \mathbb{Z}$, tồn tại $y \in \mathbb{Z}$ sao cho y chia hết cho x.
4. Với mọi $x \in \mathbb{Z}$, tồn tại $y \in \mathbb{Z}$ sao cho x chia hết cho y.

Dãy số

Dãy số $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ thường được viết dưới dạng $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, với a_n là số hạng tổng quát của dãy.

Ví dụ.

* $\{a_n\}$ với $a_n = 1 \ \forall n \geq 1$
* $\{b_n\}$ với $b_n = n \ \forall n \geq 1$
* $\{c_n\}$ với $c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \ \forall n \geq 2$ và $c_0 = 0, c_1 = 1$
* $\{d_n\}$ với $d_n = (-1)^n \ \forall n \geq 1$
* $\{e_n\}$ với $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \ \forall n \geq 1$
* $\{f_n\}$ với $f_n = \dfrac{1}{n} \ \forall n \geq 1$

Giới hạn dãy số

Một giá trị $a \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của dãy $\{a_n\}$, ký hiệu là $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0, |a_n - a| < \varepsilon$$

trong đó giá trị n_0 *phụ thuộc* vào ε.

Nhận xét.

- Định nghĩa trên có thể hiểu là: chênh lệch giữa số hạng trong dãy và giá trị giới hạn có thể nhỏ tùy ý kể từ sau một thời điểm nào đó.
- Giá trị n_0 không nhất thiết là một số nguyên.
- Khi dãy số $\{a_n\}$ có giới hạn là a, ta còn có thể nói dãy số $\{a_n\}$ hội tụ tới a và có thể viết $\boxed{a_n \to a \text{ khi } n \to \infty.}$
- Trường hợp $\{a_n\}$ không hội tụ tới bất cứ giá trị nào thuộc $\mathbb{R}$, ta nói $\{a_n\}$ là một dãy phân kì.
- Ta viết $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ và *không viết* $\lim a_n = a$.

Bài tập 6. Xét dãy số $\{a_n\}$ định nghĩa bởi $a_n = \dfrac{1}{n}$ với mọi $n \geq 1$.
Chứng minh $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Phân tích. Ta cần chứng minh

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ sao cho } \forall n \geq n_0, |a_n - 0| < \varepsilon. \tag{1}$$

Trước tiên, ta khảo sát (1) với một vài giá trị $\varepsilon > 0$.

- Với $\varepsilon = 2$, ta chọn $n_0 = 1$ thì mệnh đề (1) là đúng.
- Với $\varepsilon = 1$, ta chọn $n_0 = 2$ thì mệnh đề (1) là đúng.
- Với $\varepsilon = \frac{1}{10}$, ta chọn $n_0 = 5$ thì mệnh đề (1) là sai, do với chỉ số $n = 6$, ta có $|a_6 - 0| = |\frac{1}{6} - 0| = \frac{1}{6} \geq \frac{1}{10}$.
- Với $\varepsilon = \frac{1}{10}$, ta chọn $n_0 = 11$ thì mệnh đề (1) là đúng.

Vấn đề ở bài toán này là ta cần giải quyết (1) cho mọi giá trị $\varepsilon > 0$,
tức là cần tìm ra cách xác định n_0 phù hợp khi biết trước ε.
Ta nhận thấy với ε càng nhỏ thì n_0 phải càng lớn.

Chứng minh.
Ta cần chỉ ra

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ sao cho } \forall n \geq n_0, |a_n - 0| < \varepsilon. \tag{2}$$

Thật vậy, xét $\varepsilon > 0$ bất kỳ, ta cần tìm một giá trị n_0 nào đó sao cho

$$\forall n \geq n_0, |a_n - 0| < \varepsilon. \tag{3}$$

Chọn $n_0 = \dfrac{1}{\varepsilon} + 1$, ta chỉ ra (3) là đúng thông qua biến đổi sau

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + 1} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} < \frac{\varepsilon}{1} = \varepsilon.$$

Tóm lại, với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, tồn tại n_0 sao cho (3) là đúng.

Vậy nên mệnh đề (2) là đúng. Từ đó suy ra $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ (đpcm). $\square$

Luyện tập

Ta công nhận kết quả sau:
Cho dãy số $\{a_n\}$ và đa thức $P(x)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng 1. Biết rằng $P(n)$ khác 0 với mọi chỉ số n trong dãy số $\{a_n\}$ đã cho. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P(n)} = 0.$$

Bài tập 7. Xét dãy số $\{a_n\}$ định nghĩa bởi $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bài tập 8. Xét dãy số $\{b_n\}$ định nghĩa bởi $b_n = \dfrac{1}{n^3 - 9n + \frac{1}{2}}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Tính chất của giới hạn dãy số

- Nếu dãy số $\{a_n\}$ hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất.

- Cho hai dãy số $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ hội tụ lần lượt tới A và B. Khi đó

  - $\lim\limits_{n\to\infty}(C + a_n) = C + A$ với một hằng số C nào đó
  - $\lim\limits_{n\to\infty}(Ca_n) = CA$ với một hằng số C nào đó
  - $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$ với $b_n \neq 0$, $B \neq 0$

Câu hỏi. Có nhận xét gì về giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ hay không?

Tính chất của giới hạn dãy số

- Cho dãy số $\{a_n\}$ có giới hạn L.

  - Nếu $a_n \geq A \ \forall n \geq 1$ thì $L \geq A$.
  - Nếu $a_n > A \ \forall n \geq 1$ thì $L \geq A$.

Câu hỏi. Nếu $a_n > A \ \forall n \geq 1$ thì có thể kết luận $L > A$ được hay không?

- **Định lý kẹp.** Cho ba dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$. Biết rằng $x_n \leq y_n \leq z_n$ với mọi n, ngoài ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

Áp dụng những tính chất của giới hạn dãy số, giải những bài tập sau

Bài tập 9. Xét dãy số $\{a_n\}$ định nghĩa bởi $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Bài tập 10. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{3n+2} = \dfrac{2}{3}$.

Gợi ý. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \dfrac{1}{n}\right) = 2$.

Bài tập 11. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 2n + 1 + \sin n}{n^2 + n + 1} = 1$.

Bài tập 12. (Áp dụng định lý kẹp) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

Bài tập 13. (Áp dụng định lý kẹp) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$.

Bài tập 14. Cho hai dãy số $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

Biết rằng $a_n > b_n$ với mọi $n \geq 1$. Liệu có thể kết luận $A > B$? Nếu không thì hãy xây dựng ví dụ mà trong đó $A \leq B$.

Dãy đơn điệu

Cho dãy số $\{a_n\}$. Khi đó

1. $\{a_n\}$ là một dãy tăng nếu $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \geq 1$,
2. $\{a_n\}$ là một dãy tăng ngặt nếu $a_{n+1} > a_n \ \forall n \geq 1$
3. $\{a_n\}$ là một dãy giảm nếu $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \geq 1$
4. $\{a_n\}$ là một dãy giảm ngặt nếu $a_{n+1} < a_n \ \forall n \geq 1$
5. $\{a_n\}$ là một dãy đơn điệu nếu nó là một dãy tăng hoặc một dãy giảm

Ví dụ.

1. Dãy số $\{a_n\}$ với $a_n = n \ \forall n \geq 1$ là một dãy tăng, một dãy tăng ngặt.
2. Dãy số $\{b_n\}$ với $b_n = (-2)^n \ \forall n \geq 1$ không là một dãy tăng, không là một dãy giảm.
3. Dãy số $\{c_n\}$ với $c_n = 100 \ \forall n \geq 1$ vừa là một dãy tăng, vừa là một dãy giảm.

Dãy bị chặn

1. $\{a_n\}$ là một dãy bị chặn trên nếu tồn tại số thực M sao cho $a_n < M \ \forall n \geq 1$.
2. $\{a_n\}$ là một dãy bị chặn dưới nếu tồn tại số thực m sao cho $a_n > m \ \forall n \geq 1$.
3. $\{a_n\}$ là một dãy bị chặn nếu nó là dãy bị chặn trên và bị chặn dưới.

Nhận xét.

- Một dãy tăng là một dãy bị chặn dưới.
- Một dãy giảm là một dãy bị chặn trên.

Nguyên lý Bolzano-Weierstrass

Nguyên lý được phát biểu như sau:

- Một dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ.
- Một dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Nhận xét. Hai mệnh đề trên có thể được gộp lại thành

Một dãy đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.

Áp dụng nguyên lý Bolzano-Weierstrass

Bài tập 15. Chứng minh dãy $\{a_n\}$ định nghĩa bởi

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

là một dãy hội tụ.

Bài tập 16. Chứng minh dãy $\{b_n\}$ định nghĩa bởi

$$b_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}$$

là một dãy hội tụ.

Nguyên lý Bolzano-Cauchy

Đọc thêm trong giáo trình.

Nguyên lý quy nạp toán học

Sự tương đồng với chuỗi domino

Quan sát: để đẩy đổ một chuỗi domino, cần (1) đẩy domino đầu tiên và (2) đảm bảo nếu một domino đổ thì domino liền sau cũng đổ. Đây cũng chính là ý tưởng cơ bản của nguyên lý quy nạp toán học.

Tình huống yêu cầu chứng minh một mệnh đề là đúng với mọi số nguyên $n \geq k_0$ (k_0 thường bằng 0 hoặc 1). Ta giải quyết vấn đề bằng cách sử dụng nguyên lý quy nạp toán học như sau:

- Bước 1. Chứng minh mệnh đề là đúng với $n = k_0$.
- Bước 2. Giả sử mệnh đề là đúng với $n = k$ nào đó, rồi chứng minh mệnh đề là đúng với $n = k + 1$.

Như vậy ta đã chứng minh tính đúng đắn của mệnh đề với các giá trị $n = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots$

Luyện tập

Bài tập 17. Chứng minh $1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \geq 1$.
Cách 1: biến đổi đại số, cách 2: sử dụng phương pháp quy nạp toán học.

Bài tập 18. Chứng minh $1 + 3 + \ldots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$ $\forall n \geq 1$.

Bài tập 19. Chứng minh $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\forall n \geq 1$.

Bài tập 20. Chứng minh

$$1.2 + 2.3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \ \forall n \geq 1.$$

Bài tập 21. Chứng minh

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1} \ \forall n \geq 1.$$

Luyện tập

Bài tập 22. Cho dãy $\{a_n\}$ xác định bởi công thức

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \; \forall n \geq 1.$$

1. Chứng minh $a_n > 0 \; \forall n \geq 1$.
2. Chứng minh $a_n < 2 \; \forall n \geq 1$.
3. Chứng minh $a_n < a_{n+1} \; \forall n \geq 1$.
4. Xác định giá trị của $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Bài tập 23. Xét dãy $\{a_n\}$ định nghĩa bởi

$$a_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

1. Chứng mình $n! \geq 2^n$ với $n \geq 4$.
2. Chứng minh dãy $\{a_n\}$ là một dãy bị chặn.
3. Chứng minh dãy $\{a_n\}$ là một dãy hội tụ.

Hàm số một biến số thực

Ánh xạ

Cho A, B là hai tập hợp. Một ánh xạ f từ A tới B là một quy tắc ứng mỗi phần tử của A với một và chỉ một phần tử của B. Ánh xạ f được ký hiệu như sau

$$f : A \to B$$

Ví dụ.

$$\begin{aligned} f : \left\{\text{chó, mèo, gà, rắn}\right\} &\to \mathbb{N} \\ \text{chó} \mapsto 4,\ \text{mèo} \mapsto 4,\ \text{gà} &\mapsto 2,\ \text{rắn} \mapsto 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Đơn ánh, toàn ánh, song ánh (đọc thêm)

Cho ánh xạ $f : A \to B$. Ta phân loại ánh xạ này dựa theo số nghiệm của phương trình $f(x) = y$ với mọi giá trị $y \in B$.

Hàm số một biến số thực

Cho ánh xạ $f : X \to Y, x \mapsto y$, với $X, Y \subset \mathbb{R}$. Khi đó f là một hàm số một biến số thực, trong đó x là biến độc lập và y là biến phụ thuộc. Ngoài ra, X được gọi là miền xác định của hàm số f. Miền giá trị của hàm số f được định nghĩa bởi công thức

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

Ví dụ.

1. Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$
   miền xác định là $\mathbb{R}$ và miền giá trị là $(0, +\infty)$
2. Hàm số $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln x$
   miền xác định là $(0, +\infty)$ và miền giá trị là $\mathbb{R}$
3. Hàm số $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$
   miền xác định là $\mathbb{R}$ và miền giá trị là $[-1, 1]$

Đồ thị hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các điểm $(x, f(x))$ (với x thuộc tập xác định) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Vẽ đồ thị hàm số tại `https://www.desmos.com/calculator`

Bài tập 24. Tìm các hàm số $f(x), g(x), h(x)$ biết rằng

* $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$
* $g\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$
* $h\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = x^2$

Gợi ý. Đặt biến độc lập là t rồi biểu diễn biến phụ thuộc (vế phải) theo t.

Một số dạng hàm số đặc biệt

Đọc mục 2.3 (trang 46) trong sách Toán học cao cấp, tập 2, phép tính giải tích một biến số của tác giả Nguyễn Đình Trí.

- Hàm số chẵn, hàm số lẻ
- Hàm số tuần hoàn
- Hàm số đơn điệu (tăng, tăng ngặt, giảm, giảm ngặt, ...)

Nhận xét.

1. Đồ thị của hàm số chẵn đối xứng qua trục tung.
2. Đồ thị của hàm số lẻ đối xứng qua gốc tọa độ.

Câu hỏi. Tìm miền xác định của các hàm số lượng giác $\sin, \cos, \tan, \cot$.

Bài tập 25. Kiểm tra tính chẵn lẻ của những hàm số sau đây

* $f(x) = a^x + a^{-x}$ với $a > 0$
* $g(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$
* $h(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$

Các phép toán của hàm số

Cho hai hàm số f và g và một hằng số c, ta định nghĩa các hàm số $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $c \cdot f$ như sau

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$$

Hàm hợp

Đọc mục 2.4 (trang 47) trong sách Toán học cao cấp, tập 2, phép tính giải tích một biến số của tác giả Nguyễn Đình Trí.

Bài tập 26. Xét hai hàm $f(x) = x^2 + 3$ và $g(x) = 2x - 1$. Xác định hàm hợp $f \circ g$ và hàm hợp $g \circ f$.

Bài tập 27. Xét hai hàm $f(x) = x^2 - 2$ và $g(x) = \sqrt{x+2}$. Xác định hàm hợp $f \circ g$ và hàm hợp $g \circ f$.

Hàm ngược (đọc thêm)

Giả sử hàm $y = f(x)$ xác định trên D_f và có miền giá trị E_f. Nếu mỗi giá trị $y \in E_f$ đều tương ứng với một giá trị $x \in D_f$ mà $f(x) = y$ thì trên tập hợp E_f có thể xác định hàm

$$x = g(y)$$

sao cho mỗi giá trị $y \in E_f$ đều tương ứng với một giá trị $x \in D_f$ mà $f(x) = y$. Khi đó hàm g được gọi là hàm ngược đối với hàm f, kí hiệu là

$$g = f^{-1}.$$

Nhận xét. Hàm số f và hàm ngược f^{-1} có đồ thị đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Ví dụ về một hàm ngược

Thông thường hàm lượng giác tan được định nghĩa đi từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$. Ở đây ta giới hạn *miền xác định* của hàm số thành

$$\tan : \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}.$$

Khi đó, hàm tan là một song ánh và ta có thể xây dựng hàm ngược

$$\tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ta ký hiệu hàm ngược của hàm tan là hàm arctan.

Tương tự, bằng cách giới hạn miền xác định, ta xây dựng được hàm ngược của các hàm lượng giác $\sin, \cos, \cot$ lần lượt là $\arcsin, \arccos, \mathrm{arccot}$.

Luyện tập

Bài tập 28. Cho hàm số $f : [2, 5] \to [1, 2]$ thỏa mãn $f(x) = \sqrt{x - 1}$. Tìm hàm ngược f^{-1} của hàm số f.

Bài tập 29. Cho hàm số $g : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to [-1, 1]$ thỏa mãn $g(x) = \sin 2x$. Tìm hàm ngược g^{-1} của hàm số g.

Bài tập 30. Cho hàm số $h : \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right] \to [0, 1]$ thỏa mãn $h(x) = \sin(x^2)$. Tìm hàm ngược h^{-1} của hàm số h.

Hàm số sơ cấp

Nhắc lại các nhóm hàm số sơ cấp cơ bản.

1. Hàm số lũy thừa
2. Hàm số mũ
3. Hàm số logarith
4. Hàm lượng giác
5. Hàm lượng giác ngược $(\arcsin, \arccos, \arctan, \operatorname{arccot})$

Hàm số sơ cấp là những hàm số tạo bởi *hữu hạn lần các phép tính số học* và *các phép lấy hàm hợp* đối với các hàm sơ cấp cơ bản.

Bài tập 31. Chứng minh các hàm số sau là hàm số sơ cấp.

(a) $\sqrt{x+5}$

(b) $\log^3(x)$

(c) $\sqrt{x+5} + \log^3(x)$

(d) $|x|$

(e) x^x

(f) x^{x^x}

Câu hỏi. Hàm số $f(x) = x!$ có phải là một hàm sơ cấp hay không?

Luyện tập

Bài tập 32. Cho $\triangle ABC$ có góc $\widehat{C} = \frac{\pi}{2}$. Đặt $\alpha = \widehat{A}$ và $\beta = \widehat{B}$. Chứng minh các đẳng thức sau

(a) $\tan\alpha = \dfrac{CB}{CA}$, $\tan\beta = \dfrac{CA}{CB}$

(b) $\arctan\dfrac{CB}{CA} = \alpha$, $\arctan\dfrac{CA}{CB} = \beta$

(c) $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} \quad \forall x \neq 0$

Bài tập 33. Chứng minh đẳng thức $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} = \left(\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)^2$

Kiến thức bổ trợ

Những hằng đẳng thức "đáng nhớ" (1/2)

Căn bậc hai của bình phương

$$\sqrt{A^2} = |A|$$

Với n nguyên dương

$$A^n - B^n = (A - B)\left(A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1}\right)$$

Với n nguyên dương lẻ

$$A^n + B^n = (A + B)\left(A^{n-1} - A^{n-2}B + \ldots - AB^{n-2} + B^{n-1}\right)$$

Đẳng thức về lũy thừa

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b} \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a} \qquad (x^a)^b = x^{ab}$$

Phân tích đa thức thành nhân tử

$$(3x + 6) - (x^2 + 8) = \ldots$$

Những hằng đẳng thức “đáng nhớ” (2/2)

Hàm lượng giác

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x \qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$$

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin(\arcsin x)=x \qquad \sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right)=x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

Nguyên lý phản chứng

Khi cần chứng minh một mệnh đề là đúng, ta giả sử mệnh đề đó là sai rồi tìm cách suy ra

- sự vô lý hoặc
- sự mâu thuẫn với giả thiết đã có từ trước.

Bài tập 34. Chứng minh không có số tự nhiên lớn nhất.
Gợi ý. Giả sử tồn tại số tự nhiên lớn nhất. Ta chỉ ra một số tự nhiên lớn hơn để suy ra điều vô lý.

Bài tập 35. Chứng minh không có số nguyên tố lớn nhất.

Bài tập 36. Giả sử mọi sinh viên năm nhất ở Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN đều phải học môn Giải tích 1. Biết rằng Minh không học môn Giải tích 1. Chứng minh rằng Minh không là sinh viên năm nhất tại trường này.