ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Университет ИТМО

Отчёт по лабораторной работе № 1

«Расчёт геометрической вероятности»

Выполнили работу:

Кащеев Максим Николаевич (466147)

Косарев Илья Андреевич (466304)

Капустина Юлия Ильинична (466110)

Академическая группа:

№J3111

№J3110

№J3110

Санкт-Петербург 2025

1. Ход выполнения работы:

1.1 В ходе выполнения лабораторной работы были выбраны 5 значений радиуса круга R ∊ (0, a]: R1, R2, R3, R4, R5.

1.2 Для каждого радиуса:

• Вычислена истинная геометрическая вероятность как отношение площади круга к площади квадрата.

• Сгенерированы случайные точки в квадрате с использованием генератора случайных чисел.

• Определена доля точек, которые попали в круг радиуса , то есть экспериментальная вероятность .

• Построены графики зависимости экспериментальной вероятности  от количества точек n.

• Построены графики ошибки для анализа точности оценки вероятности

1.2 Для каждого значения радиуса было вычислено количество точек N, необходимое для достижения заданной точности .

1.3 Были построены графики зависимости для анализа роста необходимого числа точек при уменьшении ошибки

2. Описание лабораторной работы:

2.1 В данной лабораторной работе рассматривается пространство элементарных исходов, заданное в качестве квадрата, имеющего сторону 2a, центр которого находится в начале системы координат. Благоприятное событие – это круг, имеющий радиус , центр которого также совпадает с началом координат и квадратом соответственно.

Далее выбираются 5 значений радиуса R ∊ (0, a]. Затем идёт расчёт истинных геометрических вероятностей в качестве отношения площади круга к площади квадрата по следующей формуле:

Далее идёт реализация эксперимента с использованием генератора случайных чисел для оценки вероятности попадания точек в круг.

Переменная true\_probabilities хранит значения истинной вероятностей, которая подсчитывается с помощью функции get\_true\_probability\_vec (векторизованная вариация get\_true\_probability, для справки см. примечание).

2.2 Экспериментальные результаты

Для каждого радиуса построены два соответствующих графика:

• График экспериментальной оценки вероятности (это доля точек, попавших в круг, от общего числа случайных точек n вне круга и в круге). На этом графике видно, что с увеличением количества точек n экспериментальная вероятность становится ближе к истинной.

• График ошибки . Данный график показывает уменьшение при увеличении n, то есть подтверждает сходимость данного метода.

Код для построения графиков:

Изображение выглядит как текст, снимок экрана

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Рис 1.1 код для построения графика для экспериментальной вероятности и графика ошибки.

Изображение выглядит как текст, График, линия, снимок экрана

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Рис 1.2 графики для оценки экспериментальной вероятности и ошибки соответственно.

2.3 Анализ зависимости необходимого числа точек от заданной точности

Для каждого значения оценено количество случайных точек N, которые необходимы для достижений заданной точности . Графики показывают, что необходимое число точек увеличивается при уменьшении ε.

Пример кода для построения графика:

Изображение выглядит как снимок экрана, текст, Шрифт

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Рис 1.3 код для графика для построения графика для анализа достижения нужной ошибка для круга с соответствующим радиусом

Изображение выглядит как текст, линия, График, снимок экрана

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Рис 1.4 график зависимости кол-ва точек и значения ошибка для достижения нужной ошибка для круга радиусом 0.2

Выводы:

В результате проделанной лабораторной работы и проведённых экспериментов можно сделать вывод, что по мере увеличения количества случайных точек n, доля точек , попадающих в круг, приближается к истинной геометрической вероятности . Это подтверждает корректность метода Монте-Карло, который мы применяем для оценки вероятности. На основании анализа графиков ошибки можно сделать вывод, что с увеличением n ошибка оценки стремится к нулю. Таким образом, чем больше выборка, тем точнее оценка. При анализе зависимости необходимого количества точек N от заданной точности ε обнаружено, что N возрастает при уменьшении ε. Это подтверждает, что для достижения высокой точности требуется существенно большее количество точек.

Примечания (Функции из файла utils.py)

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, программное обеспечение

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Рис 1.5 Функция для генерации массива из n случайных радиусов в полуинтервале от (0, a], где a – половина стороны квадрата

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, программное обеспечение

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Рис 1.6 Функция для создания массива из n радиусов, равномерно распределённых от a/n, до a соответственно (для равномерного распределения радиусов)

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Рис 1.7 Функция для вычисления истинной геометрической вероятности p(R) как отношение площади круга радиуса R к площади квадрата

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, программное обеспечение, дисплей

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Рис 1.8 Функция генерирует n случайных точек в квадрате и возвращает количество точек, которые попали в круг радиусом R

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, программное обеспечение

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Рис 1.9 Функция для расчёта минимального количества случайных точек N, необходимых для достижения заданной точности ε при оценке вероятности попадания в круг