Анализ временных рядов. Лекция 3

Экспоненциальное сглаживание и ETS-модели

Костромина Алина

27.11.2025

Что сегодня в программе?

1. Теория: модели экспоненциального сглаживания.
    a. SES (Simple Exponential Smoothing)
    b. Модель Хольта (Holt model)
    c. Модель Хольта-Винтерса (Holt-Winters model)

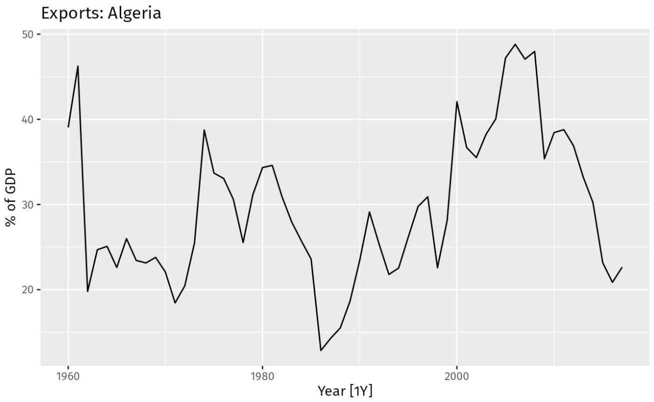
2. Теория: ETS (Error, Trend, Seasonality) модели.

Что лежит между наивным и средним прогнозом?

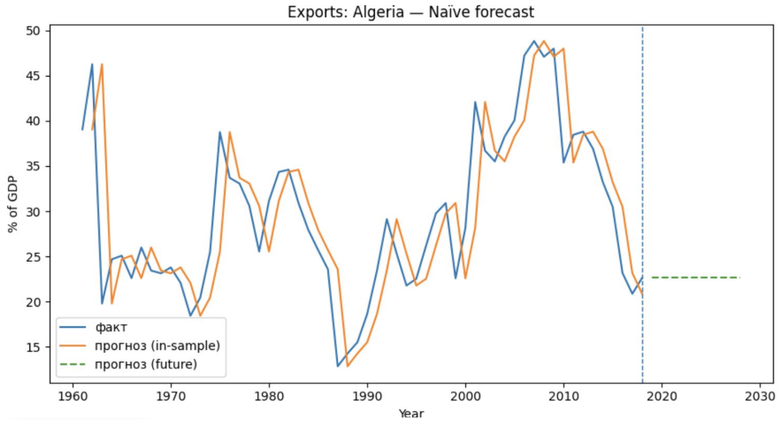
Naive: $\hat{y}_{T+h|T} = y_T$, где $h = 1, 2, \dots H$

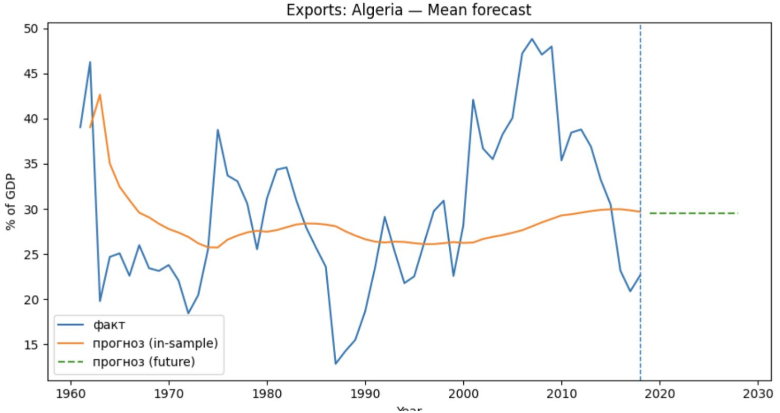
Average: $\hat{y}_{T+h|T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$, где $h = 1, 2, \dots, H$

Можно ли придумать что-то лучше?



Экспорт товаров и услуг из Алжира с 1960 по 2017 год.





SES — Simple Exponential Smoothing

Naive: $\hat{y}_{T+h|T} = y_T$, где $h = 1, 2, \ldots H$

Average: $\hat{y}_{T+h|T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$, где $h = 1, 2, \ldots, H$

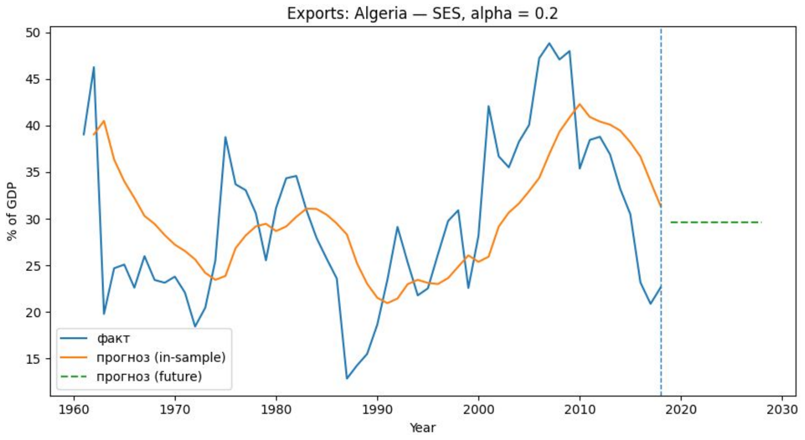
SES: $\hat{y}_{T+1|T} = \alpha y_T + \alpha(1-\alpha)y_{T-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{T-2} + \cdots,$

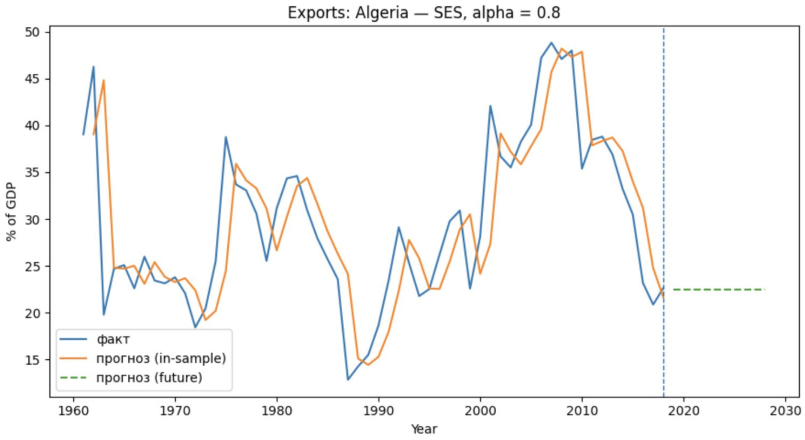
Где $0 \leq \alpha \leq 1$ — параметр сглаживания.

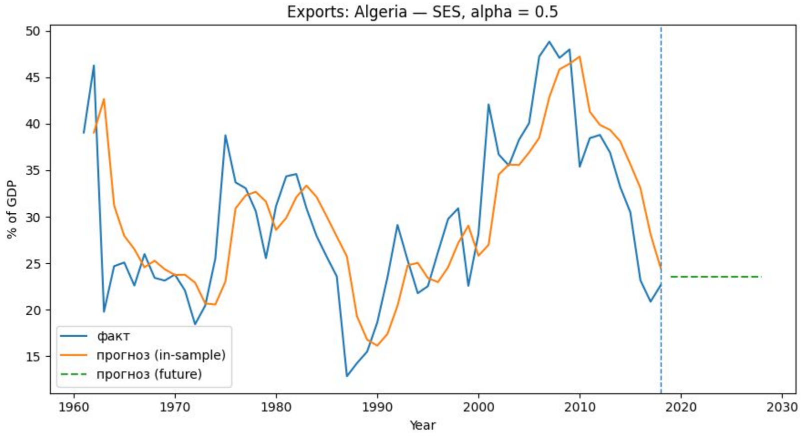
Более свежие наблюдения получают больший вес!

Что происходит при увеличении α?

SES. Прогнозы при разном α

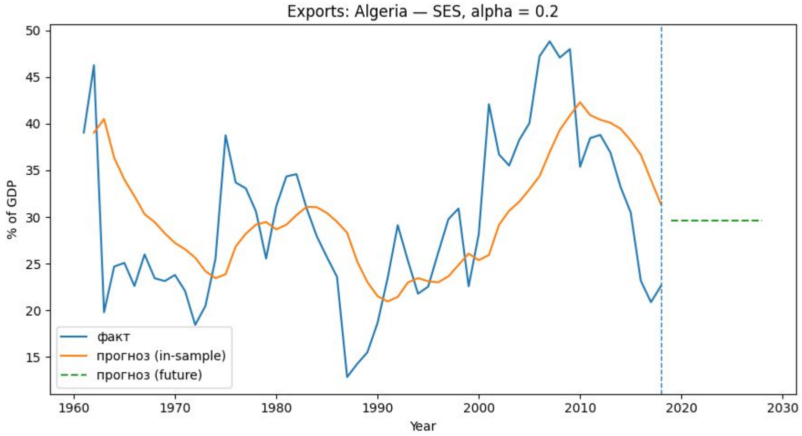


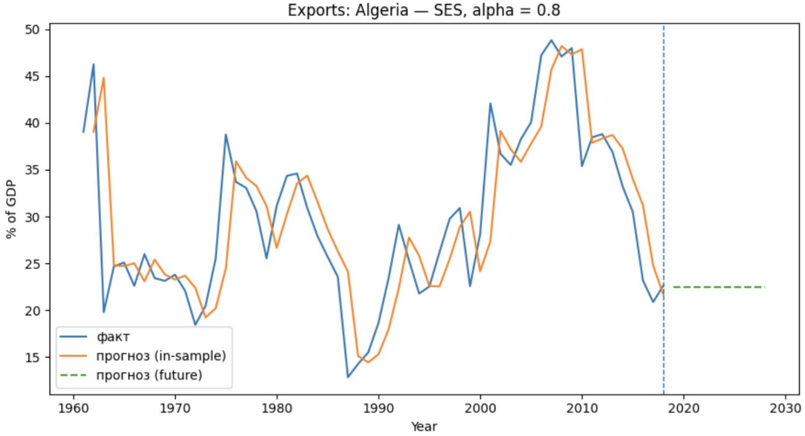


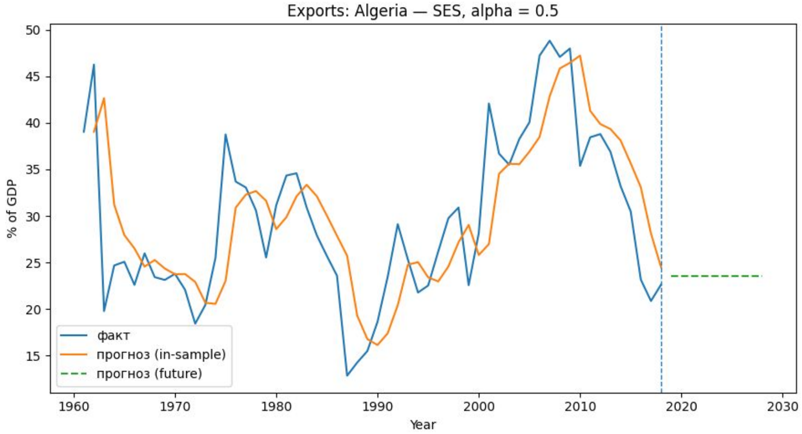


При каких значениях α получим Naive прогнозы? Mean прогнозы?

SES. Прогнозы при разном α







При каких значениях α получим Naive прогнозы? Mean прогнозы?

1 → 0 (но не 0!)

SES. Weighted average form

$$\hat{y}_{T+1|T} = \alpha y_T + \alpha(1-\alpha) y_{T-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{T-2} + \cdots,$$

Где $0 \le \alpha \le 1$ — параметр сглаживания.

Как нам прийти к форме без сокращений?

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{2|1} &= \alpha y_1 + (1-\alpha)\ell_0 \\
\hat{y}_{3|2} &= \alpha y_2 + (1-\alpha)\hat{y}_{2|1} \\
\hat{y}_{4|3} &= \alpha y_3 + (1-\alpha)\hat{y}_{3|2} \\
&\vdots \\
\hat{y}_{T|T-1} &= \alpha y_{T-1} + (1-\alpha)\hat{y}_{T-1|T-2} \\
\hat{y}_{T+1|T} &= \alpha y_T + (1-\alpha)\hat{y}_{T|T-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{3|2} &= \alpha y_2 + (1-\alpha)\left[\alpha y_1 + (1-\alpha)\ell_0\right] \\
&= \alpha y_2 + \alpha(1-\alpha) y_1 + (1-\alpha)^2 \ell_0 \\
\hat{y}_{4|3} &= \alpha y_3 + (1-\alpha)[\alpha y_2 + \alpha(1-\alpha) y_1 + (1-\alpha)^2 \ell_0] \\
&= \alpha y_3 + \alpha(1-\alpha) y_2 + \alpha(1-\alpha)^2 y_1 + (1-\alpha)^3 \ell_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{y}_{T+1|T} = \sum_{j=0}^{T-1} \alpha(1-\alpha)^j y_{T-j} + (1-\alpha)^T \ell_0.}$$

Почему SES дает горизонтальный плоский прогноз?

SES:

$$\hat{y}_{T+1|T} = \sum_{j=0}^{T-1} \alpha(1-\alpha)^j y_{T-j} + (1-\alpha)^T \ell_0.$$

$$\hat{y}_{T+h|T} = \hat{y}_{T+1|T}$$

Почему так?

$$\hat{y}_{T+1|T} = x$$

$$\hat{y}_{T+2|T} = \alpha y_{T+1} + (1-\alpha)\hat{y}_{T+1|T}$$

y_{T+1} не знаем, приблизим его через прогноз, которому мы доверяем.

$$\hat{y}_{T+2|T} = \alpha x + (1-\alpha)x = x$$

SES. Component form

Уравнение прогноза	$\hat{y}_{t+h\mid t} = \ell_t,$
Уравнение сглаживания	$\ell_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\,\ell_{t-1},$

где ℓ_t — уровень (или сглаженное значение) временного ряда в момент времени t.

.

Почему component form == weighted average form?

$$\hat{y}_{t+h\mid t} = \hat{y}_{t+1\mid t} = \alpha y_t + (1-\alpha)\,\hat{y}_{t\mid t-1}$$

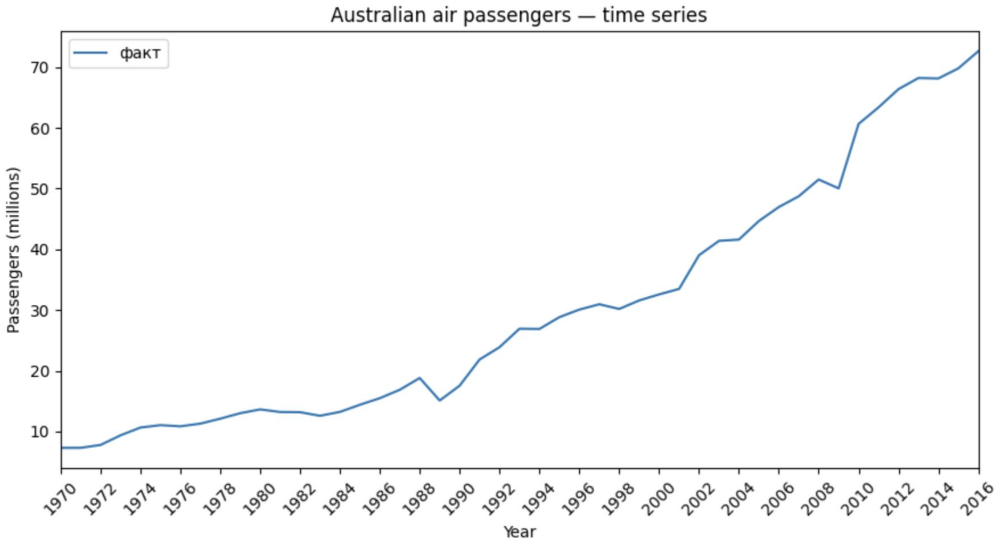
Вопросы?

Модель Хольта (Holt model)

Напоминаю, как выглядит SES модель

$$\text{Уравнение прогноза} \quad \hat{y}_{t+h|t} = \ell_t ,$$
$$\text{Уравнение сглаживания} \quad \ell_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\,\ell_{t-1} ,$$

А что, если в нашем ряде есть явный тренд?



Модель Хольта (Holt model)

Напоминаю, как выглядит SES модель

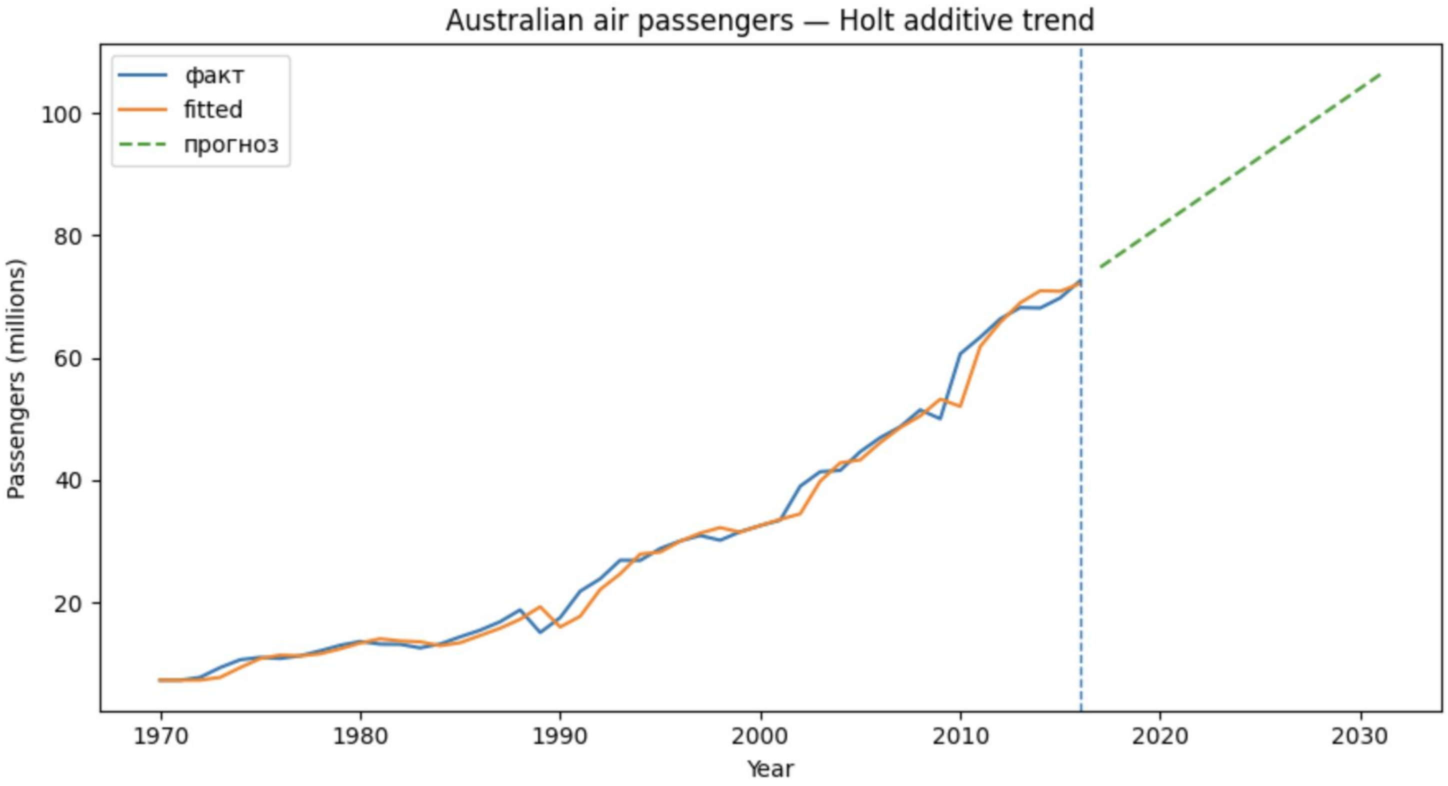
$$\text{Уравнение прогноза} \quad \hat{y}_{t+h|t} = \ell_t,$$
$$\text{Уравнение сглаживания} \quad \ell_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\,\ell_{t-1},$$

А что, если в нашем ряде есть явный тренд?

$$\text{Уравнение прогноза} \quad \hat{y}_{t+h|t} = \ell_t + h b_t,$$
$$\text{Уравнение уровня} \quad \ell_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}),$$
$$\text{Уравнение тренда} \quad b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1},$$

где: ℓ_t — оценка уровня ряда в момент времени t,
b_t — оценка тренда (наклона) ряда в момент времени t,
α — параметр сглаживания уровня, $0 \le \alpha \le 1$,
а β^* — параметр сглаживания тренда, $0 \le \beta^* \le 1$.

Модель Хольта (Holt model)



Модель Хольта (Holt model) с затухающим трендом

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_{t+h|t} &= \ell_t + (\phi + \phi^2 + \cdots + \phi^h) b_t, \\
\ell_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1}), \\
b_t &= \beta^* (\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*) \phi b_{t-1}.
\end{aligned}
$$

где: ℓ_t — оценка уровня ряда в момент времени t,

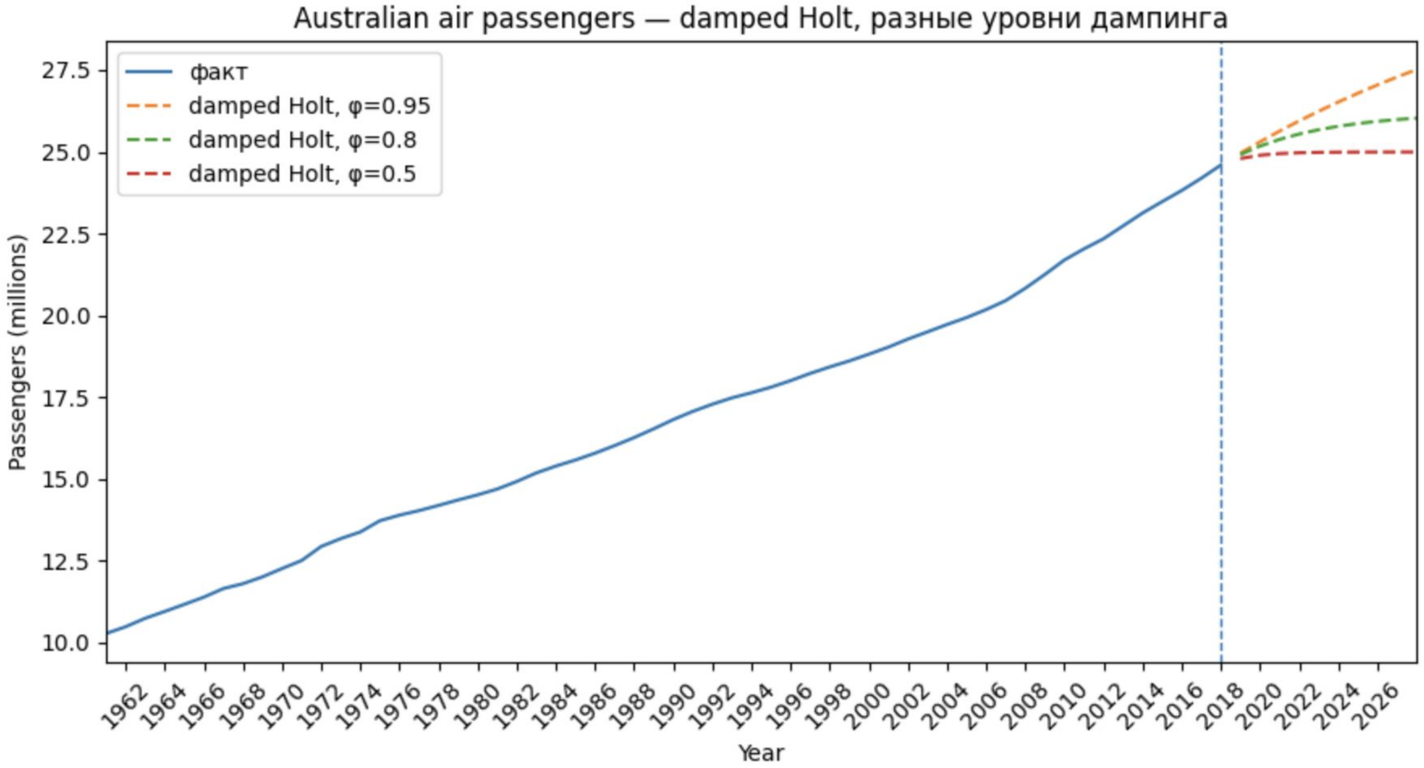
b_t — оценка тренда (наклона) ряда в момент времени t,

α — параметр сглаживания уровня, $0 \le \alpha \le 1$,

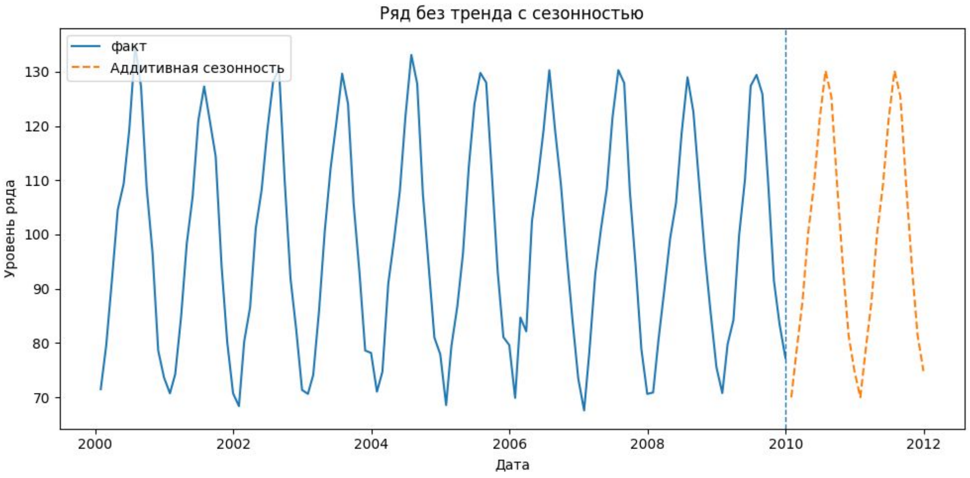
а β^* — параметр сглаживания тренда, $0 \le \beta^* \le 1$.

$0 < \phi < 1$ — параметр затухания тренда.

Модель Хольта (Holt model) с затухающим трендом



Модели сезонности



Аддитивная сезонность

$$\hat{y}_{t+h|t} = \ell_t + s_{t+h-m(k+1)}\,,$$
$$\ell_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)\,\ell_{t-1}\,,$$
$$s_t = \gamma(y_t - \ell_{t-1}) + (1-\gamma)\,s_{t-m}.$$

Расшифровка обозначений:

- ℓ_t — уровень (базовый уровень ряда) в момент времени t;
- s_t — сезонная компонента в момент времени t;
- m — длина сезона (например, $m = 12$ для помесячных данных с годовой сезонностью);
- k — целое число, задающее номер сезона вперёд; обычно $k = \lfloor (h-1)/m \rfloor$;
- α — параметр сглаживания уровня, $0 \le \alpha \le 1$;
- γ — параметр сглаживания сезонной компоненты, $0 \le \gamma \le 1$.

Модели Хольта-Винтерса

Напоминаю, как адд. модель Хольта

$$\hat{y}_{t+h|t} = \ell_t + hb_t,$$
$$\ell_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}),$$
$$b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1},$$

Напоминаю, как адд. модель сезонности

$$\hat{y}_{t+h|t} = \ell_t + s_{t+h-m(k+1)},$$
$$\ell_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)\,\ell_{t-1},$$
$$s_t = \gamma(y_t - \ell_{t-1}) + (1-\gamma)\,s_{t-m}.$$

Объединяем и получаем модель Хольта-Винтерса

$$\hat{y}_{t+h|t} = \ell_t + hb_t + s_{t+h-m(k+1)},$$
$$\ell_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}),$$
$$b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1},$$
$$s_t = \gamma(y_t - \ell_{t-1} - b_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m},$$

Мультипликативная сезонность

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{t+h|t} &= \ell_t + hb_t + s_{t+h-m(k+1)}\,,\\
\ell_t &= \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}),\\
b_t &= \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}\,,\\
s_t &= \gamma(y_t - \ell_{t-1} - b_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m},
\end{aligned}$$

$\longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{t+h|t} &= (\ell_t + hb_t)\, s_{t+h-m(k+1)}\,,\\
\ell_t &= \alpha\frac{y_t}{s_{t-m}} + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}),\\
b_t &= \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}\,,\\
s_t &= \gamma\frac{y_t}{\ell_{t-1} + b_{t-1}} + (1-\gamma)s_{t-m}.
\end{aligned}$$

Модель Хольта-Винтерса

Таксономия методов экспоненциального сглаживания выглядит страшно, НО мы уже почти всё разобрали :)

Trend	Seasonal N	Seasonal A	Seasonal M
N	$\hat{y}_{t+h\|t} = \ell_t$ (SES) $\ell_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\ell_{t-1}$	$\hat{y}_{t+h\|t} = \ell_t + s_{t+h-m(k+1)}$ $\ell_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)\ell_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t - \ell_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m}$	$\hat{y}_{t+h\|t} = \ell_t s_{t+h-m(k+1)}$ $\ell_t = \alpha(y_t/s_{t-m}) + (1-\alpha)\ell_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t/\ell_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m}$
A	$\hat{y}_{t+h\|t} = \ell_t + hb_t$ (Holt add.) $\ell_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}$	$\hat{y}_{t+h\|t} = \ell_t + hb_t + s_{t+h-m(k+1)}$ (HW add.) $\ell_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t - \ell_{t-1} - b_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m}$	$\hat{y}_{t+h\|t} = (\ell_t + hb_t)s_{t+h-m(k+1)}$ (HW mult.) $\ell_t = \alpha(y_t/s_{t-m}) + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t/(\ell_{t-1} + b_{t-1})) + (1-\gamma)s_{t-m}$
A_d	$\hat{y}_{t+h\|t} = \ell_t + \phi_h b_t$ (Holt damped) $\ell_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)\phi b_{t-1}$	$\hat{y}_{t+h\|t} = \ell_t + \phi_h b_t + s_{t+h-m(k+1)}$ (HW d. a.) $\ell_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)\phi b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t - \ell_{t-1} - \phi b_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m}$	$\hat{y}_{t+h\|t} = (\ell_t + \phi_h b_t)s_{t+h-m(k+1)}$ (HW d. m.) $\ell_t = \alpha(y_t/s_{t-m}) + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)\phi b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t/(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})) + (1-\gamma)s_{t-m}$

Вопросы?

ETS (Error-Trend-Season)

Семейство state-space моделей.

Что изменилось?

ADDITIVE ERROR MODELS

Trend	Seasonal N	Seasonal A	Seasonal M
N	$y_t = \ell_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1}s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha\varepsilon_t/s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t/\ell_{t-1}$
A	$y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t/s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t/s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t/(\ell_{t-1} + b_{t-1})$
A$_\mathbf{d}$	$y_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t/s_{t-m}$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta\varepsilon_t/s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t/(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$

MULTIPLICATIVE ERROR MODELS

Trend	Seasonal N	Seasonal A	Seasonal M
N	$y_t = \ell_{t-1}(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t)$	$y_t = (\ell_{t-1} + s_{t-m})(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha(\ell_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(\ell_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1}s_{t-m}(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$
A	$y_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + b_{t-1})\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha(\ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(\ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m}(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + b_{t-1})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$
A$_\mathbf{d}$	$y_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})s_{t-m}(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$

Таксономия методов ETS выглядит еще страшнее!

Что изменилось?

Появились ошибки — значит, модель вероятностная.

Можем строить прогнозные интервалы.

ADDITIVE ERROR MODELS

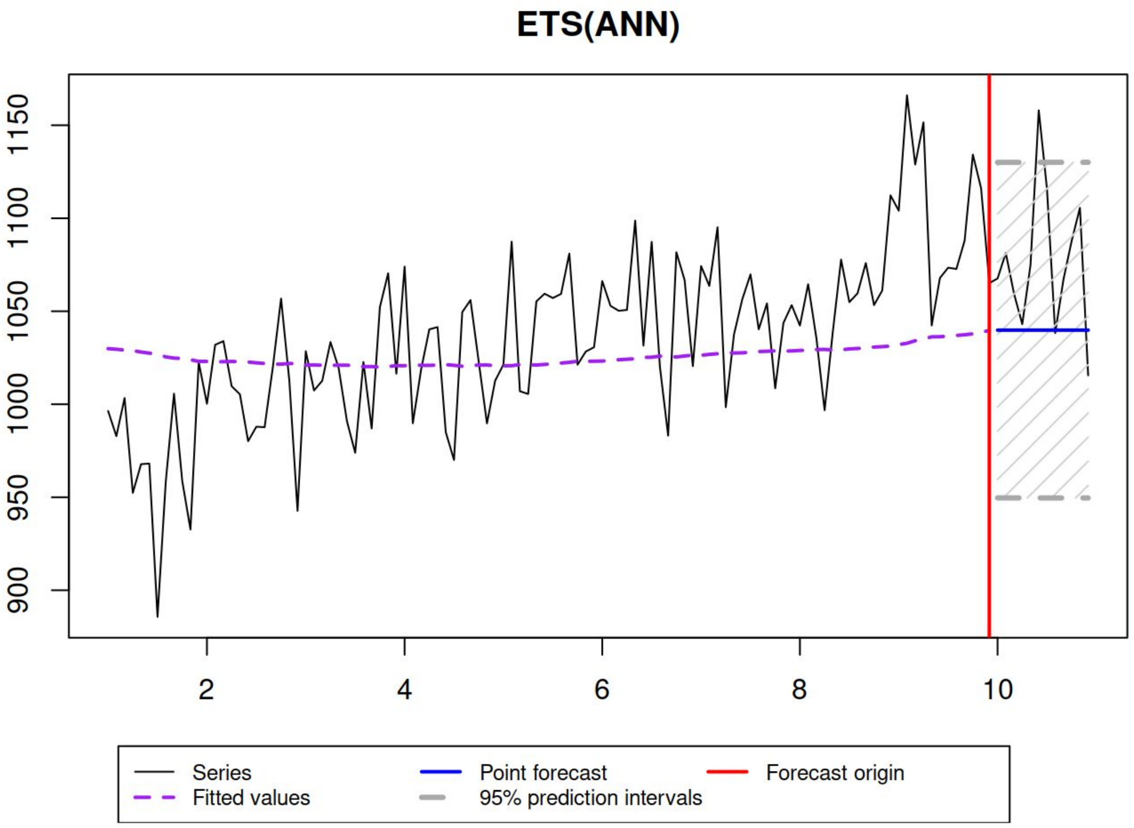
Trend	**Seasonal** N	**Seasonal** A	**Seasonal** M
N	$y_t = \ell_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1}s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha\varepsilon_t/s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t/\ell_{t-1}$
A	$y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t/s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t/s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t/(\ell_{t-1} + b_{t-1})$
A$_\mathbf{d}$	$y_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t/s_{t-m}$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta\varepsilon_t/s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t/(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$

MULTIPLICATIVE ERROR MODELS

Trend	**Seasonal** N	**Seasonal** A	**Seasonal** M
N	$y_t = \ell_{t-1}(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t)$	$y_t = (\ell_{t-1} + s_{t-m})(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha(\ell_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(\ell_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1}s_{t-m}(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$
A	$y_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + b_{t-1})\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha(\ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(\ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m}(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + b_{t-1})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$
A$_\mathbf{d}$	$y_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})s_{t-m}(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$

Появились ошибки —
значит, модель
вероятностная.

Можем строить
прогнозные интервалы.



Упражнение. SES как ETS(A, N, N)

Вспомним компонентную форму простого экспоненциального сглаживания:

$$\text{Уравнение прогноза} \quad \hat{y}_{t+1|t} = \ell_t,$$
$$\text{Уравнение сглаживания} \quad \ell_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\ell_{t-1}.$$

Если переупорядочить уравнение сглаживания для уровня, получим форму с «поправкой на ошибку»:

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha(y_t - \ell_{t-1}) = \ell_{t-1} + \alpha e_t,$$

где $e_t = y_t - \ell_{t-1} = y_t - \hat{y}_{t|t-1}$ — остаток (ошибка прогноза) в момент времени t.

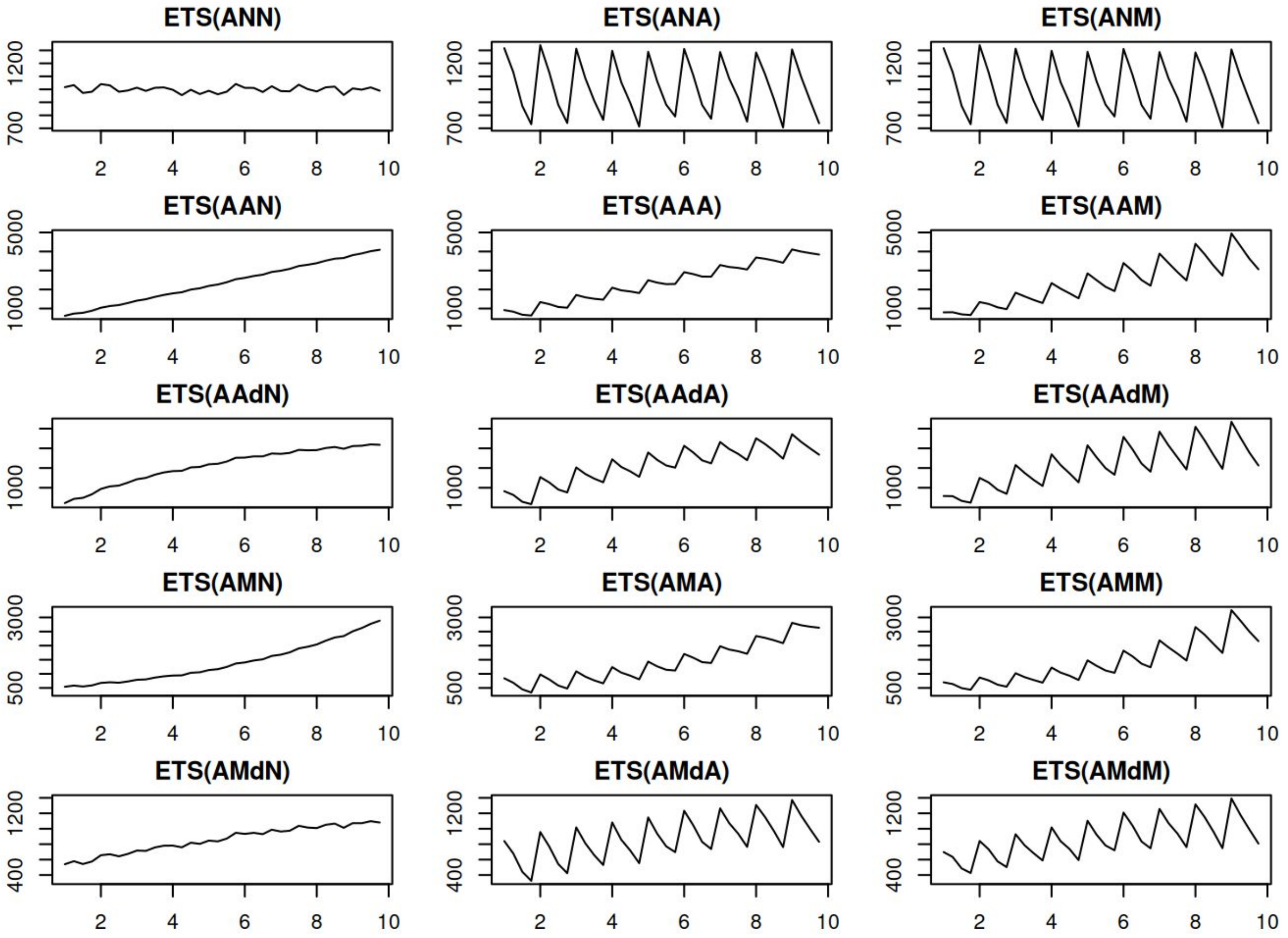
Аддитивная vs Мультипликативная ошибки.

Для аддитивной ошибки:

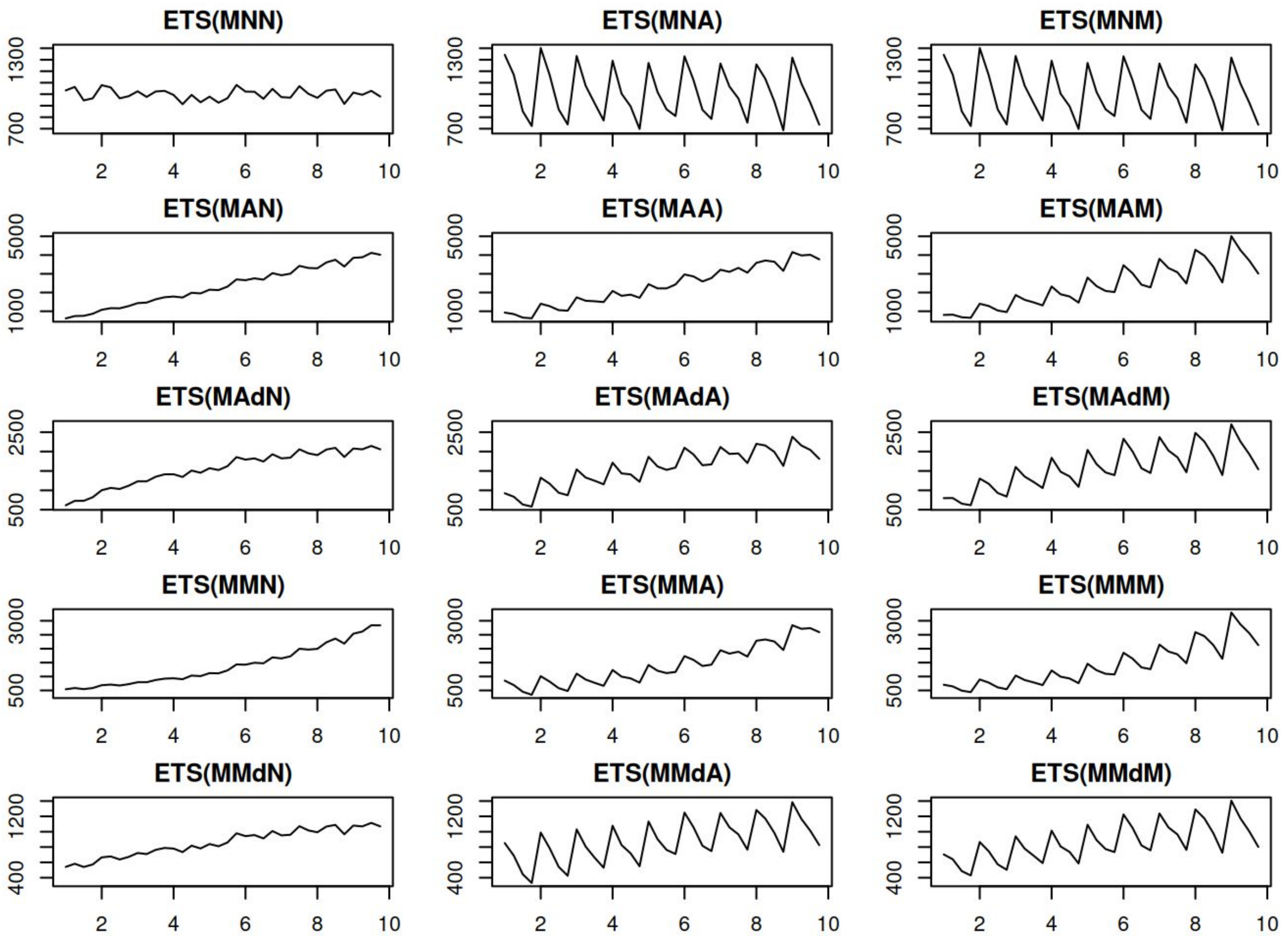
$$e_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1}, \quad \text{тогда} \quad y_t = \ell_{t-1} + e_t, \quad \ell_t = \ell_{t-1} + \alpha e_t.$$

Для мультипликативной ошибки:

$$\varepsilon_t = \frac{y_t - \hat{y}_{t|t-1}}{\hat{y}_{t|t-1}}, \quad \text{тогда} \quad y_t = \ell_{t-1}(1 + \varepsilon_t), \quad \ell_t = \ell_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t).$$



https://openforecast.org/adam/ETSTaxonomy.html



https://openforecast.org/adam
/ETSTaxonomy.html

Плюсы и минусы ETS-моделей

Плюсы:

- Простота интерпретации
- Быстрота вычислений
- Устойчивость к шуму (адаптируемость)
- Не нужно предобрабатывать ряд
- Дают теоретические прогнозные интервалы

Минусы:

- Не учитывают внешние факторы
- Плохо работают на длинном горизонте
- Все же нужно экспертно подбирать спецификацию (а AutoETS может ошибаться)
- Не подходят для сложных, нерегулярных паттернов (мультисезонность, смена тренда)
- Мультипликативные модели нестабильны при малых значениях и требует положительности значений

Дополнительные материалы

- Р. Хайдман, Дж. Атанасопулос — Прогнозирование: принципы и практика, гл. 8 (стр. 234-272) (рус.).
- https://mlgu.ru/5840/?ysclid=miha5estf5706446028 — Хорошая суммаризация с примерами на Python (рус.).
- ETS в Python (statsforecast) — https://nixtlaverse.nixtla.io/statsforecast/docs/models/autoets.html (там же есть и более простые модели) (англ.).

Совсем дополнительные материалы:

- https://openforecast.org/adam/ETSTaxonomyMaths.html — полная таксономия методов ETS (англ.). Можно почитать и другие главы отсюда.
- Лукашин Ю. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов (рус.) — если хотите погрузиться в развитие адаптивных моделей. Написано достаточно интересно, но местами сложно.