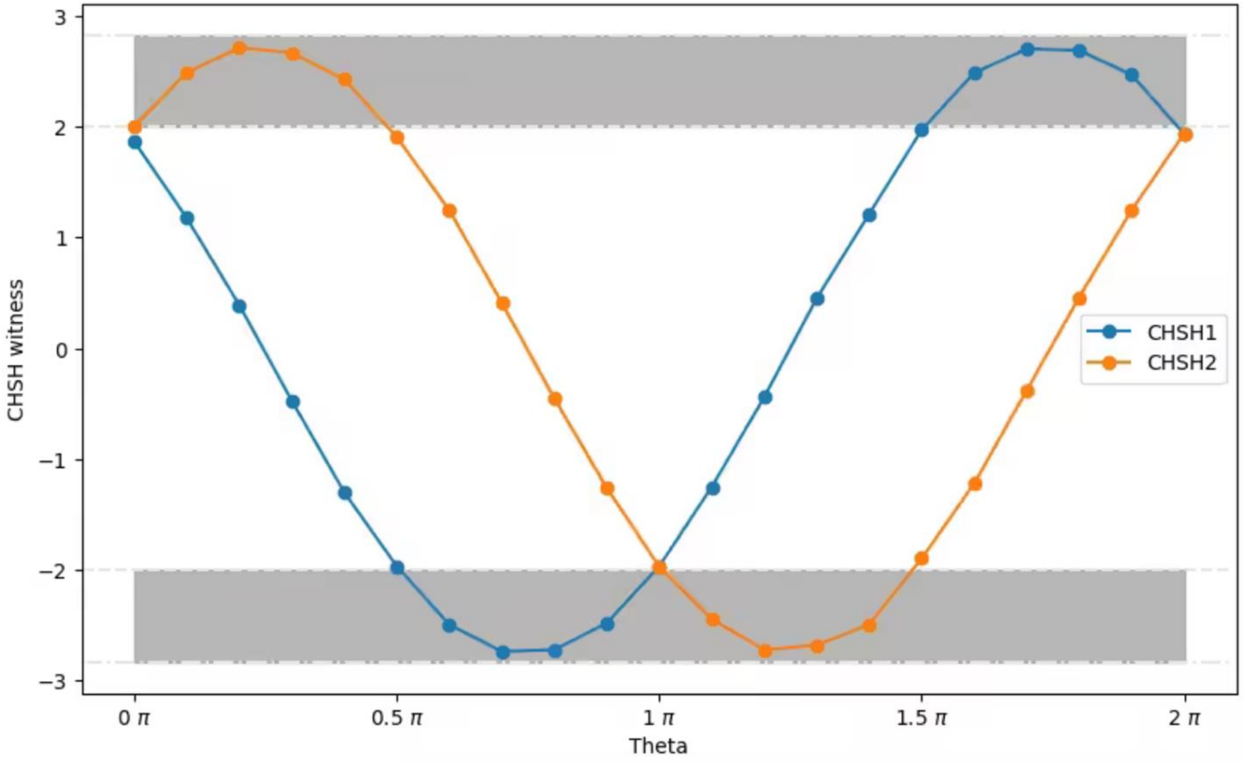
IBM-UTokyo 量子コンピューティング・駒場スクール

CHSH不等式の破れ



Sep 29, 2025

沼田祈史
Kifumi Numata
IBM Quantum

IBM **Quantum**

CHSH不等式の破れ

観測量 A, B, a, b が 1または−1 のとき、次の二つの S_1, S_2 の値は、±2 です。

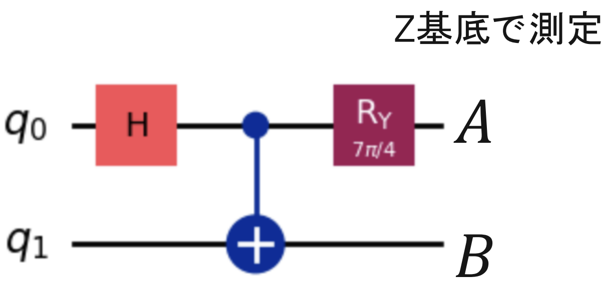
$$S_1 = A(B - b) + a(B + b) \qquad S_2 = A(B + b) - a(B - b)$$

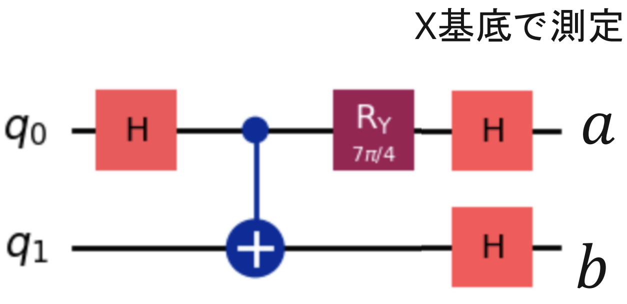
つまり、

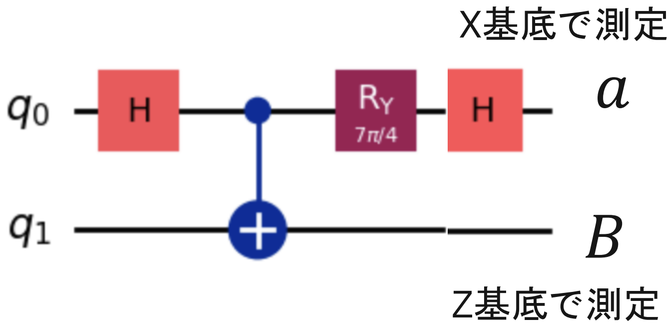
$$|\langle S_1 \rangle| = |\langle AB \rangle - \langle Ab \rangle + \langle aB \rangle + \langle ab \rangle| \leq 2 \qquad |\langle S_2 \rangle| = |\langle AB \rangle + \langle Ab \rangle - \langle aB \rangle + \langle ab \rangle| \leq 2$$

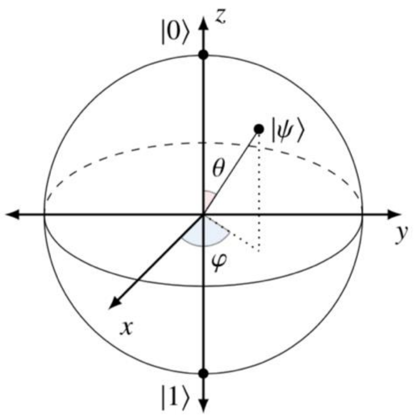
これが古典の場合

一方、2つの観測量のペア AB, Ab, aB, ab がそれぞれエンタングルしていて、
A, Bは計算(Z)基底、 a, bはX基底で測定する場合（つまり量子の場合）
以下の回路でやはり、 A, B, a, b は −1から1 ですが、$|\langle S_1 \rangle|$と$|\langle S_2 \rangle|$ は 2を超えます。









X基底で測定するには、Hゲートをかけてから測定します。
Qiskit の Estimator primitive を使うと、期待値 $\langle AB \rangle, \langle Ab \rangle$, $\langle aB \rangle, \langle ab \rangle$ が直接求められます。

物理量$\boldsymbol{Z}$の期待値

物理量 $\boldsymbol{Z}$ （パウリ演算子$\boldsymbol{Z}$）の期待値とは、 $\boldsymbol{Z}$ を測定したときに得られる平均的な値で、

$\langle \boldsymbol{Z} \rangle = \langle \psi | \boldsymbol{Z} | \psi \rangle$として以下のように求めます。

量子ビット $|\psi\rangle = \alpha\ |0\rangle + \beta\ |1\rangle$ のとき、$|\psi\rangle$を計算基底で測定する（ $\boldsymbol{Z}$ 測定する）と、

$\boldsymbol{Z}\ |0\rangle =\ |0\rangle,\ \boldsymbol{Z}\ |1\rangle =\ -|1\rangle$より、 確率$|\alpha|^2$で1、確率$|\beta|^2$で-1を得るので、

$$\langle \psi | \boldsymbol{Z} | \psi \rangle = \alpha^* \alpha \langle 0 | \boldsymbol{Z} | 0 \rangle + \beta^* \beta \langle 1 | \boldsymbol{Z} | 1 \rangle = \ |\alpha|^2 - |\beta|^2$$ ：物理量$\boldsymbol{Z}$の期待値 $\langle \boldsymbol{Z} \rangle$

同様に

- $\boldsymbol{X}$の期待値 $\langle \boldsymbol{X} \rangle$ ：$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{HZH}$より、
  $\langle \psi | \boldsymbol{HZH} | \psi \rangle = \langle \boldsymbol{H}\psi | \boldsymbol{Z} | \boldsymbol{H}\psi \rangle$ ：$\boldsymbol{H}$(アダマール)演算を掛けてから$\boldsymbol{Z}$測定する。

- $\boldsymbol{ZZ}$の期待値$\langle \boldsymbol{ZZ} \rangle$
  2量子ビット $|\psi\rangle = a_{00}\ |00\rangle + a_{01}\ |01\rangle + a_{10}\ |10\rangle + a_{11}\ |11\rangle$ とすると
  $$\langle \psi | (\boldsymbol{Z} \otimes \boldsymbol{Z}) | \psi \rangle = (\alpha^*{}_{00} \langle 00| + \alpha^*{}_{01} \langle 01| + \alpha^*{}_{10} \langle 10| + \alpha^*{}_{11} \langle 11|)(\boldsymbol{Z} \otimes \boldsymbol{Z})$$
  $$|(a_{00}\ |00\rangle + a_{01}\ |01\rangle + a_{10}\ |10\rangle + a_{11}\ |11\rangle) = \ |a_{00}|^2 + |a_{11}|^2 - |a_{01}|^2 - |a_{10}|^2$$

- $\boldsymbol{XX}$の期待値 $\langle \boldsymbol{XX} \rangle$
  $$\langle \psi | (\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{X}) | \psi \rangle = \langle \psi | (\boldsymbol{HZH}) \otimes (\boldsymbol{HZH}) | \psi \rangle = \langle \psi | (\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{H})(\boldsymbol{Z} \otimes \boldsymbol{Z})(\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{H}) | \psi \rangle = \langle (\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{H})\psi | \boldsymbol{Z} \otimes \boldsymbol{Z} | (\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{H}) | \psi \rangle$$
  ：各量子ビットに$\boldsymbol{H}$演算を掛けてから$\boldsymbol{Z}$測定する。

Qiskit の Estimator primitive を使うと、期待値 $\langle ZZ \rangle, \langle ZX \rangle$, $\langle XZ \rangle, \langle XX \rangle$ などが直接求められます。

ブラケット表記

量子状態：$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$

（ここで、α, βは$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$を満たす複素数。）

ケット

$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$: 縦ベクトル

ブラ

$\langle\psi| = (|\psi\rangle)^\dagger = (\alpha^* \quad \beta^*)$：横ベクトル

† （ダガー）：随伴行列(エルミート共役)。
転置と要素の複素共役を同時に取る。

例） $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき

$A^\dagger = \begin{bmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{bmatrix}$

ここで

$a = x + iy$

$a^* = x - iy$

ベクトル$\langle\psi|$と$|\psi\rangle$の内積：

ブラケット

$\langle\psi|\psi\rangle = (\alpha^* \quad \beta^*)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha^*\alpha + \beta^*\beta = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$：数値

量子状態$|\psi\rangle$は、$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を正規直交基底とする2次元の複素内積空間内の単位ベクトルで、大きさは１に規格化されている。