エンタングルメントの動作
3. CHSHゲーム

Tsuyoshi Hashimoto

12/6@Quantum Tokyo

Outline

エンタングルメントの動作

1. テレポーテーション
2. 超密度符号 ← 前回

3. CHSHゲーム

3.1 非局所ゲーム

3.2 CHSHゲームの説明

3.3 古典的戦略の限界

3.4 CHSHゲームの戦略

3.5 備考

3.6 Qiskit での実装

今回話さないこと
- CHSH不等式、 Tsirelson不等式

3 CHSHゲーム

CHSHゲームは非局所ゲームと呼ばれるゲームのクラスに属するもの

非局所ゲームは、物理学、コンピュータサイエンス、数学と深い関わりを持ち、いまだ未解決の謎を抱えた魅力的なゲーム

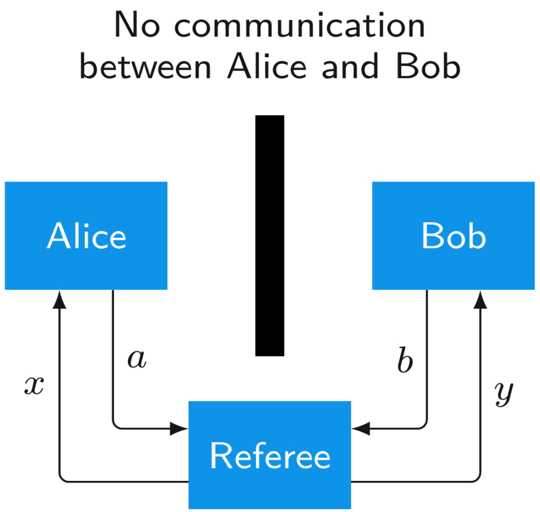
CHSHの文字は、この例が最初に記述された1969年の論文の著者、John Clauser、Michael Horne、Abner Shimony、Richard Holt

The CHSH officer was surprisingly unphased by Alice measuring qubits in the interrogation room.

3.1 非局所ゲーム

AliceとBobの2人のプレイヤーが特定の結果を得るために協力し合うゲーム

ゲームは審判によって運営され、審判はAliceとBobに知られた厳格なガイドラインに従って行動する



- 事前準備OK
- ゲーム開始後はコミュニケーション禁止
- 質問
    - 審判がAliceに質問x、Bobに質問yをする (CHSHゲームではx、yはビット)
    - 質問はある確率に従ってランダムに出題される
    - AliceとBobを含む全員がこの確率を知っている
- 返答
    - Aliceはa、Bobはbと質問に対して答える (CHSHゲームではa、bはビット)
- 質問 (x, y) に対して返答 (a, b) が正しいかどうかで勝敗を判定

3.2 CHSH ゲームの説明

(x, y) = (Aliceの質問, Bobの質問)、 (a, b) = (Aliceの返答, Bobの返答)

1. 質問と返答はすべてビット: $x, y, a, b \in \{0, 1\}$
2. 審判は質問 (x, y) を一様無作為に選ぶ。
   (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) の4つの可能性のそれぞれが確率1/4で選択される
3. 返答 (a, b) が$a \oplus b = x \land y$の場合質問 (x, y) に対して勝ち、それ以外の場合は負ける

(x,y)	**勝ち**	**負け**	
$(0,0)$	$a=b$	$a \neq b$	$x \land y = 0$
$(0,1)$	$a=b$	$a \neq b$	$x \land y = 0$
$(1,0)$	$a=b$	$a \neq b$	$x \land y = 0$
$(1,1)$	$a \neq b$	$a=b$	$x \land y = 1$

$\land$: 論理積
$\oplus$: 排他的論理和

3.3 古典的戦略の限界

(x,y)	勝ち	負け
$(0,0)$	$a=b$	$a\neq b$
$(0,1)$	$a=b$	$a\neq b$
$(1,0)$	$a=b$	$a\neq b$
$(1,1)$	$a\neq b$	$a=b$

決定論的戦略

- Aliceの返答 a = a(x), x = 0, 1
- Bobの返答 b = b(y), y = 0, 1
- 4つの質問ペアのうち少なくとも1つに対して必ず負ける
  - *1ビットから1ビット~~まで~~への4つの関数 (four possible functions from one bit to one bit)*
  - 決定論的戦略は$2^2 \times 2^2$ = 16通り
  - 3つの可能性全てで勝つ場合

(x,y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$
勝つパターン	$a(0)=b(0)$	$a(0)=b(1)$	$a(1)=b(0)$

$\longrightarrow$ $\boxed{a(0)=b(0)=b(1)=a(1)}$

最後のケース(x, y) = (1, 1)で負ける
決定論的戦略で勝つ最大の確率は3/4

3.3 古典的戦略の限界

確率論的戦略

- 決定論的戦略を用いてCHSHゲームで75%以上の確率で勝利することはできない
- ランダム性を利用することでAliceとBobを助けることができるか → ***No***

- 確率論的戦略は決定論的戦略のランダムな選択とみなすことができる (→ first lesson)
- 平均値が最大値より大きくなることはないため、確率論的戦略には利点がない

古典的戦略を用いたときのAliceとBobの勝率の最大値は3/4

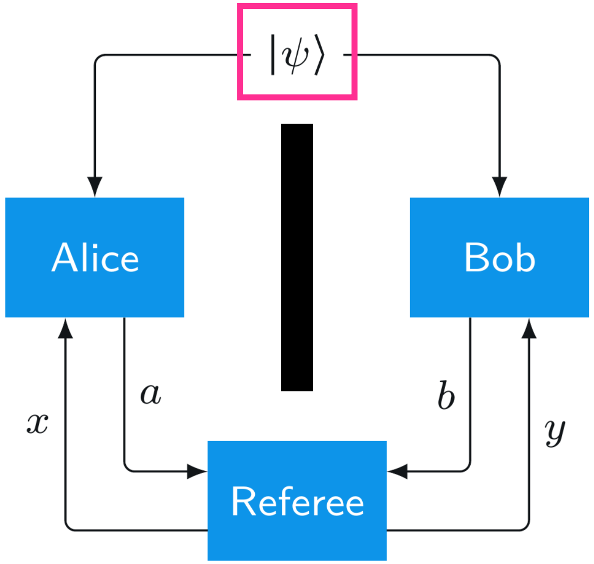
Outline

3.4 CHSH ゲームの戦略

AliceとBobが量子的な戦略を用いることで

より良い結果を得ることができるのだろうか?

$\rightarrow$ ***Yes***



エンタングルした量子状態をAliceとBobが事前に共有しておく

3.4 CHSH ゲームの戦略

必要なベクトルと行列

$$\boxed{|\psi_\theta\rangle \equiv \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle}$$

AliceとBobがそれぞれθを選ぶ

- 簡単な例

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle, \quad |\psi_{\pi/2}\rangle = |1\rangle, \quad |\psi_{\pi/4}\rangle = |+\rangle, \quad |\psi_{-\pi/4}\rangle = |-\rangle$$

- その他の例

$$|\psi_{-\pi/8}\rangle = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}|1\rangle, \quad |\psi_{\pi/8}\rangle = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}|1\rangle$$

$$|\psi_{3\pi/8}\rangle = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}|1\rangle, \quad |\psi_{5\pi/8}\rangle = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}|1\rangle$$

三角関数の公式

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

- ベクトル間の内積

$$\langle\psi_\alpha|\psi_\beta\rangle = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta)$$

単位ベクトル間の内積なので
ベクトル間の角度のcosになる

3.4 CHSH ゲームの戦略

必要なベクトルと行列

$$\boxed{|\psi_\theta\rangle \equiv \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle}$$

- Bell状態との内積

$$|\phi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{2}$$

$$\langle\psi_\alpha \otimes \psi_\beta|\phi^+\rangle = \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)}{2} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sqrt{2}} = \frac{\langle\psi_\alpha|\psi_\beta\rangle}{\sqrt{2}}$$

- ユニタリー行列

$$\boxed{U_\theta \equiv |0\rangle\langle\psi_\theta| + |1\rangle\langle\psi_{\theta+\pi/2}|}$$

  - $\langle\psi_\theta|\psi_{\theta+\pi/2}\rangle = \cos(\pi/2) = 0$
  - $|\psi_\theta\rangle \to |0\rangle, \quad |\psi_{\theta+\pi/2}\rangle \to |1\rangle$ にマッピング
  - ユニタリー性 $U_\theta U_\theta^\dagger = (|0\rangle\langle\psi_\theta| + |1\rangle\langle\psi_{\theta+\pi/2}|)(|\psi_\theta\rangle\langle 0| + |\psi_{\theta+\pi/2}\rangle\langle 1|)$
  $= |0\rangle\langle\psi_\theta|\psi_\theta\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle\psi_\theta|\psi_{\theta+\pi/2}\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle\psi_{\theta+\pi/2}|\psi_\theta\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle\psi_{\theta+\pi/2}|\psi_{\theta+\pi/2}\rangle\langle 1|$
  $= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = 1$

3.4 CHSH ゲームの戦略

必要なベクトルと行列

$$\boxed{\begin{aligned} |\psi_\theta\rangle &\equiv \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle \\ U_\theta &\equiv |0\rangle\langle\psi_\theta| + |1\rangle\langle\psi_{\theta+\pi/2}| \end{aligned}}$$

- 行列表記

$$U_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \cos(\theta+\pi/2) & \sin(\theta+\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

原点を中心に-θ回転

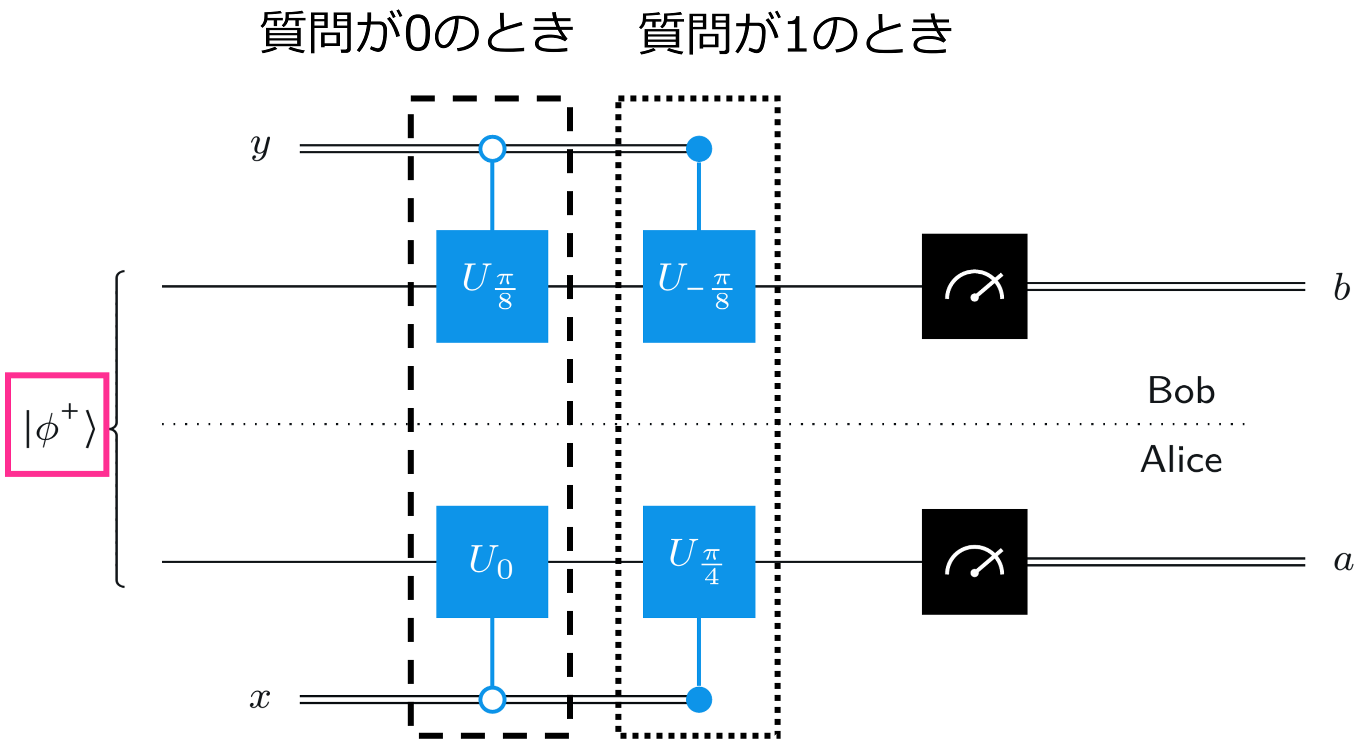
$$\left[R_y(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad U_\theta = R_y(-2\theta) \right.$$

CHSHゲームに直接は関係ないが、
Qiskitで実装する際に用いる]

ここまでが以降で必要な量子的な戦略の道具立て

3.4 CHSH ゲームの戦略

戦略の説明



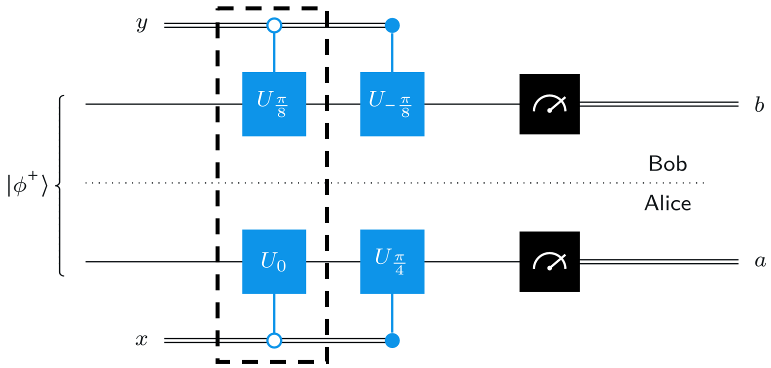
AliceとBobは**e-bit (entangle-bit、Bell状態)** を事前に共有

Alice: $\begin{cases} U_0 & \text{if } x = 0 \\ U_{\pi/4} & \text{if } x = 1 \end{cases} \longrightarrow$ 測定

Bob: $\begin{cases} U_{\pi/8} & \text{if } y = 0 \\ U_{-\pi/8} & \text{if } y = 1 \end{cases} \longrightarrow$ 測定

3.4 CHSH ゲームの戦略

ケースバイケース分析　ケース1: (x, y) = (0, 0)



- AliceはU_0、Bobは$U_{\pi/8}$を実行

$$\boxed{U_\theta \equiv |0\rangle\langle\psi_\theta| + |1\rangle\langle\psi_{\theta+\pi/2}|}$$

$$\begin{aligned}(U_0 \otimes U_{\pi/8})|\phi^+\rangle &= |00\rangle\langle\psi_0 \otimes \psi_{\pi/8}|\phi^+\rangle + |01\rangle\langle\psi_0 \otimes \psi_{5\pi/8}|\phi^+\rangle \\ &\quad + |10\rangle\langle\psi_{\pi/2} \otimes \psi_{\pi/8}|\phi^+\rangle + |11\rangle\langle\psi_{\pi/2} \otimes \psi_{5\pi/8}|\phi^+\rangle \\ &= \frac{\cos(-\frac{\pi}{8})|00\rangle + \cos(-\frac{5\pi}{8})|01\rangle + \cos(\frac{3\pi}{8})|10\rangle + \cos(-\frac{\pi}{8})|11\rangle}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

テンソル積の性質

$$\begin{aligned}(|\phi_0\rangle\langle\psi_0| \otimes |\phi_1\rangle\langle\psi_1|)|a_0a_1\rangle &= |\phi_0\rangle\langle\psi_0|a_0\rangle \otimes |\phi_1\rangle\langle\psi_1|a_1\rangle \\ &= \langle\psi_0|a_0\rangle\langle\psi_1|a_1\rangle|\phi_0\phi_1\rangle \\ &= |\phi_0\phi_1\rangle\langle\psi_0\psi_1|a_0a_1\rangle\end{aligned}$$

3.4 CHSH ゲームの戦略

ケースバイケース分析　ケース1: (x, y) = (0, 0)

- AliceはU_0、Bobは$U_{\pi/8}$を実行

$$
\begin{aligned}
(U_0 \otimes U_{\pi/8})|\phi^+\rangle &= |00\rangle \langle \psi_0 \otimes \psi_{\pi/8}|\phi^+\rangle + |01\rangle \langle \psi_0 \otimes \psi_{5\pi/8}|\phi^+\rangle \\
&\quad + |10\rangle \langle \psi_{\pi/2} \otimes \psi_{\pi/8}|\phi^+\rangle + |11\rangle \langle \psi_{\pi/2} \otimes \psi_{5\pi/8}|\phi^+\rangle \\
&= \frac{\cos(-\frac{\pi}{8})|00\rangle + \cos(-\frac{5\pi}{8})|01\rangle + \cos(\frac{3\pi}{8})|10\rangle + \cos(-\frac{\pi}{8})|11\rangle}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

三角関数の公式

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$$

$\longrightarrow$

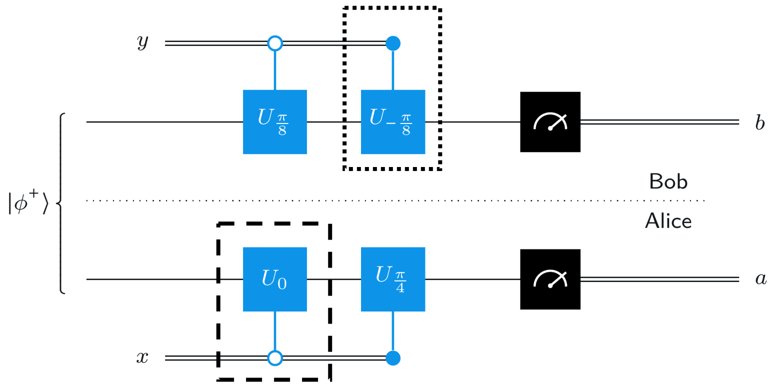
$$
\boxed{
\begin{aligned}
\Pr[(a,b) = (0,0)] = \Pr[(a,b) = (1,1)] &= \frac{1}{2}\cos^2\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{8} \\
\Pr[(a,b) = (0,1)] = \Pr[(a,b) = (1,0)] &= \frac{1}{2}\cos^2\left(-\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{8}
\end{aligned}
}
$$

(x, y)	勝ち	負け
$(0,0)$	$a = b$	$a \neq b$
$(0,1)$	$a = b$	$a \neq b$
$(1,0)$	$a = b$	$a \neq b$
$(1,1)$	$a \neq b$	$a = b$

- 質問のペア (0, 0) に対して、AliceとBobはa=bのときに勝つ

$\longrightarrow$ 勝つ確率 $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

3.4 CHSH ゲームの戦略



ケースバイケース分析　ケース2: (x, y) = (0, 1)

- AliceはU_0、Bobは$U_{-\pi/8}$を実行

$$(U_0 \otimes U_{-\pi/8})|\phi^+\rangle = |00\rangle \langle \psi_0 \otimes \psi_{-\pi/8}|\phi^+\rangle + |01\rangle \langle \psi_0 \otimes \psi_{3\pi/8}|\phi^+\rangle$$
$$+|10\rangle \langle \psi_{\pi/2} \otimes \psi_{-\pi/8}|\phi^+\rangle + |11\rangle \langle \psi_{\pi/2} \otimes \psi_{3\pi/8}|\phi^+\rangle$$
$$= \frac{\cos(\frac{\pi}{8})|00\rangle + \cos(-\frac{3\pi}{8})|01\rangle + \cos(\frac{5\pi}{8})|10\rangle + \cos(\frac{\pi}{8})|11\rangle}{\sqrt{2}}$$

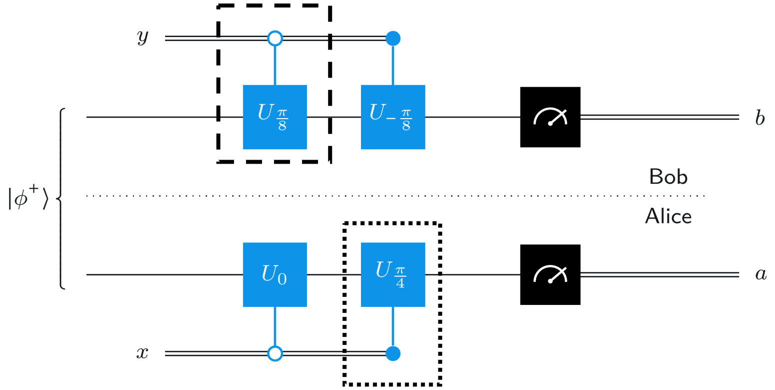
$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \Pr[(a,b)=(0,0)] = \Pr[(a,b)=(1,1)] = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{8} \\ \Pr[(a,b)=(0,1)] = \Pr[(a,b)=(1,0)] = \frac{1}{2}\cos^2\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{8} \end{aligned}}$$

(x,y)	勝ち	負け
$(0,0)$	$a=b$	$a\neq b$
$(0,1)$	$a=b$	$a\neq b$
$(1,0)$	$a=b$	$a\neq b$
$(1,1)$	$a\neq b$	$a=b$

- 質問のペア (0, 1) に対して、AliceとBobはa=bのときに勝つ

$\longrightarrow$ 勝つ確率 $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

3.4 CHSH ゲームの戦略



ケースバイケース分析　ケース3: (x, y) = (1, 0)

- Aliceは$U_{\pi/4}$、Bobは$U_{\pi/8}$を実行

$$(U_{\pi/4} \otimes U_{\pi/8})|\phi^+\rangle = |00\rangle\langle\psi_{\pi/4} \otimes \psi_{\pi/8}|\phi^+\rangle + |01\rangle\langle\psi_{\pi/4} \otimes \psi_{5\pi/8}|\phi^+\rangle$$
$$+|10\rangle\langle\psi_{3\pi/4} \otimes \psi_{\pi/8}|\phi^+\rangle + |11\rangle\langle\psi_{3\pi/4} \otimes \psi_{5\pi/8}|\phi^+\rangle$$
$$= \frac{\cos(\frac{\pi}{8})|00\rangle + \cos(-\frac{3\pi}{8})|01\rangle + \cos(\frac{5\pi}{8})|10\rangle + \cos(\frac{\pi}{8})|11\rangle}{\sqrt{2}}$$

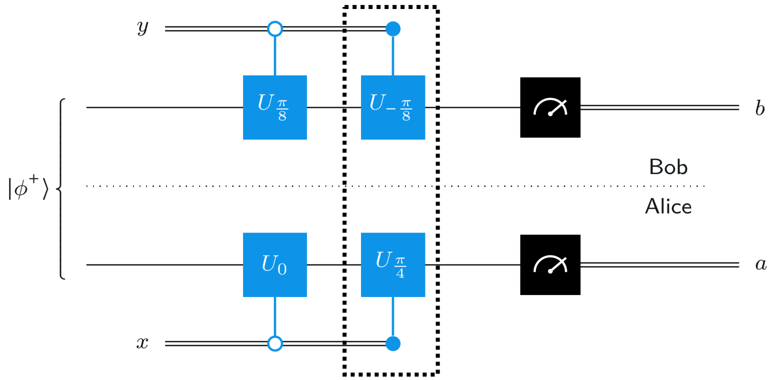
$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \Pr[(a,b)=(0,0)] = \Pr[(a,b)=(1,1)] &= \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{8} \\ \Pr[(a,b)=(0,1)] = \Pr[(a,b)=(1,0)] &= \frac{1}{2}\cos^2\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{8} \end{aligned}}$$

(x, y)	勝ち	負け
$(0, 0)$	$a = b$	$a \neq b$
$(0, 1)$	$a = b$	$a \neq b$
$(1, 0)$	$a = b$	$a \neq b$
$(1, 1)$	$a \neq b$	$a = b$

- 質問のペア (1, 0) に対して、AliceとBobはa=bのときに勝つ

$\longrightarrow$ 勝つ確率 $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

3.4 CHSH ゲームの戦略



ケースバイケース分析　ケース4: (x, y) = (1, 1)

- Aliceは$U_{\pi/4}$、Bobは$U_{-\pi/8}$を実行

$$(U_{\pi/4} \otimes U_{-\pi/8})|\phi^+\rangle = |00\rangle\langle\psi_{\pi/4} \otimes \psi_{-\pi/8}|\phi^+\rangle + |01\rangle\langle\psi_{\pi/4} \otimes \psi_{3\pi/8}|\phi^+\rangle$$
$$+|10\rangle\langle\psi_{3\pi/4} \otimes \psi_{-\pi/8}|\phi^+\rangle + |11\rangle\langle\psi_{3\pi/4} \otimes \psi_{3\pi/8}|\phi^+\rangle$$
$$= \frac{\cos(\frac{3\pi}{8})|00\rangle + \cos(-\frac{\pi}{8})|01\rangle + \cos(\frac{7\pi}{8})|10\rangle + \cos(\frac{3\pi}{8})|11\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \Pr[(a,b)=(0,0)] = \Pr[(a,b)=(1,1)] = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{8} \\ \Pr[(a,b)=(0,1)] = \Pr[(a,b)=(1,0)] = \frac{1}{2}\cos^2\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{8} \end{aligned}}$$

(x,y)	勝ち	負け
$(0,0)$	$a=b$	$a\neq b$
$(0,1)$	$a=b$	$a\neq b$
$(1,0)$	$a=b$	$a\neq b$
$(1,1)$	$a\neq b$	$a=b$

- 質問のペア (1, 1) に対して、AliceとBobはa≠bのときに勝つ

$\longrightarrow$ 勝つ確率　$\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

3.4 CHSH ゲームの戦略

ケースバイケース分析

- 最終的に勝つ確率は

$$\frac{2+\sqrt{2}}{4} \approx 0.85 > \frac{3}{4}$$

古典的な戦略よりも優れている

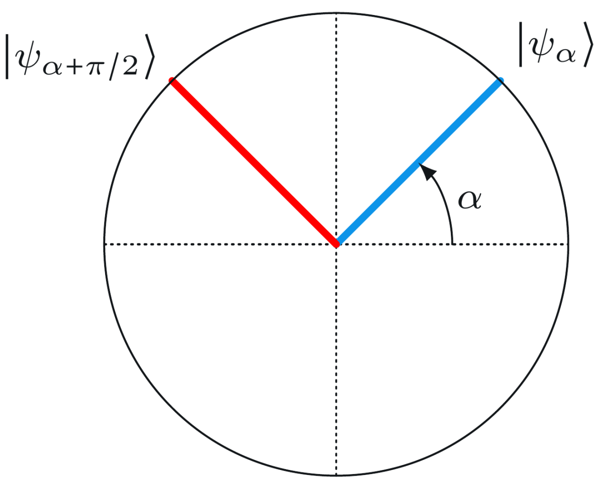
- この確率は量子的な戦略にとって最適な勝率であり、どんなエンタングル状態や測定法を選んでもこれ以上の勝率は得られない (Tsirelson不等式)
  - TsirelsonはCHSH実験をゲームとして最初に説明した人物

古典的な戦略	⟷	**CHSH不等式** $\lvert S\rvert \leq 2$	⟶	**上限:** $3/4$
量子的な戦略	⟷	**Tsirelson不等式** $\lvert S\rvert \leq 2\sqrt{2}$	⟶	**上限:** $(2+\sqrt{2})/4$

3.4 CHSH ゲームの戦略

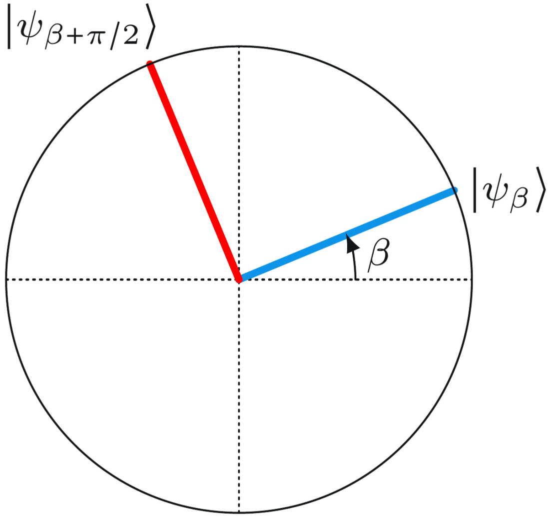
幾何学的描像

Alice:



青が0、赤が1の
回答に対応

Bob:



$$
\begin{aligned}
(U_\alpha \otimes U_\beta)|\phi^+\rangle &= |00\rangle \langle \psi_\alpha \otimes \psi_\beta|\phi^+\rangle + |01\rangle \langle \psi_\alpha \otimes \psi_{\beta+\pi/2}|\phi^+\rangle \\
&\quad + |10\rangle \langle \psi_{\alpha+\pi/2} \otimes \psi_\beta|\phi^+\rangle + |11\rangle \langle \psi_{\alpha+\pi/2} \otimes \psi_{\beta+\pi/2}|\phi^+\rangle \\
&= \frac{\langle \psi_\alpha|\psi_\beta\rangle|00\rangle + \langle \psi_\alpha|\psi_{\beta+\pi/2}\rangle|01\rangle + \langle \psi_{\alpha+\pi/2}|\psi_\beta\rangle|10\rangle + \langle \psi_{\alpha+\pi/2}|\psi_{\beta+\pi/2}\rangle|11\rangle}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

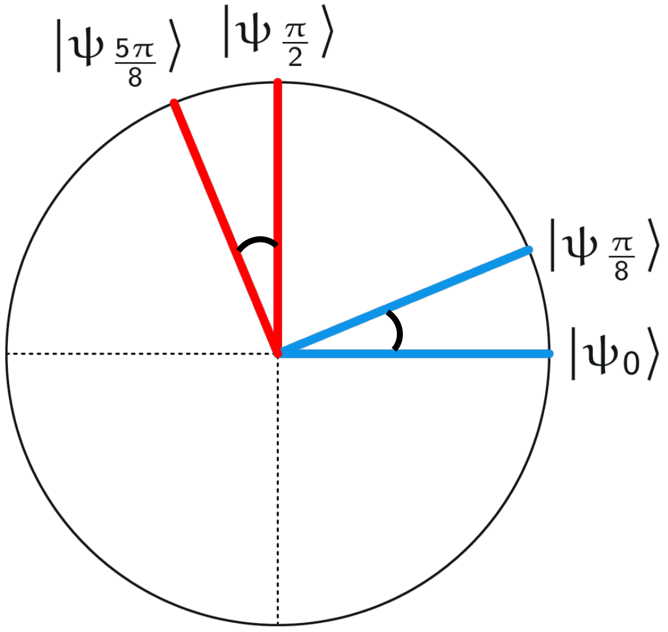
$\longrightarrow$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\Pr(a = b) &= \frac{1}{2}|\langle \psi_\alpha|\psi_\beta\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle \psi_{\alpha+\pi/2}|\psi_{\beta+\pi/2}\rangle|^2 = \cos^2(\alpha - \beta) \\
\Pr(a \neq b) &= \frac{1}{2}|\langle \psi_\alpha|\psi_{\beta+\pi/2}\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle \psi_{\alpha+\pi/2}|\psi_\beta\rangle|^2 = \sin^2(\alpha - \beta)
\end{aligned}
}
$$

3.4 CHSH ゲームの戦略

戦略を探る

- (x, y) = (0, 0)



(x, y)	勝ち	負け
$(0,0)$	$a = b$	$a \neq b$
$(0,1)$	$a = b$	$a \neq b$
$(1,0)$	$a = b$	$a \neq b$
$(1,1)$	$a \neq b$	$a = b$

赤の状態同士、
青の状態同士の
内積の和

=

アリスとボブの結果が
一致する確率

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

返答が一致しない確率

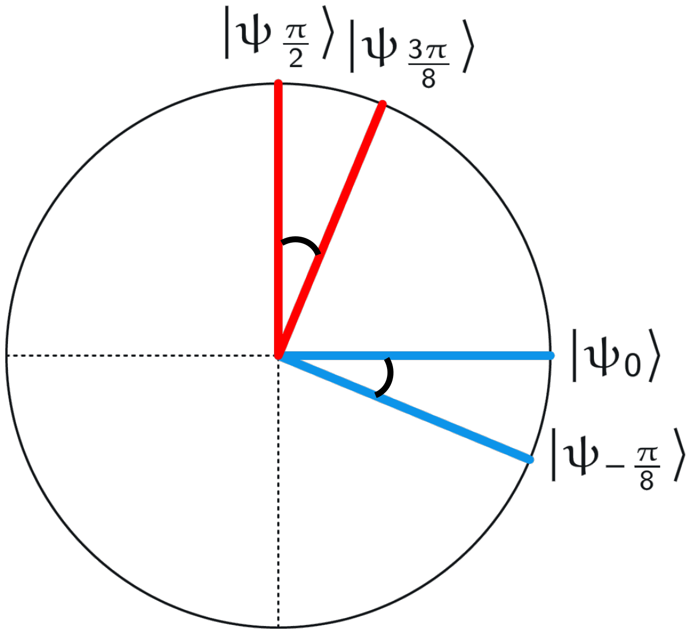
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

状態間の角度が小さいほど勝率が上がる

3.4 CHSH ゲームの戦略

戦略を探る

- (x, y) = (0, 1)



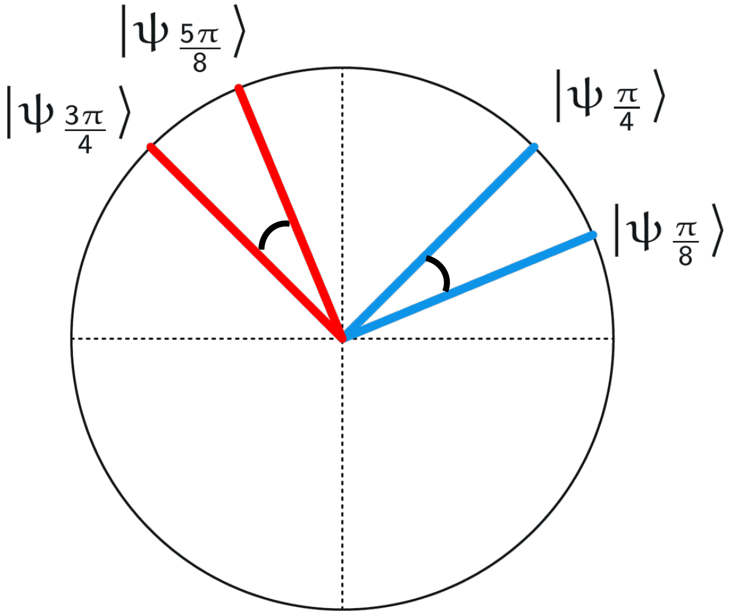
アリスとボブの結果が一致する確率

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

返答が一致しない確率

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

- (x, y) = (1, 0)



アリスとボブの結果が一致する確率

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

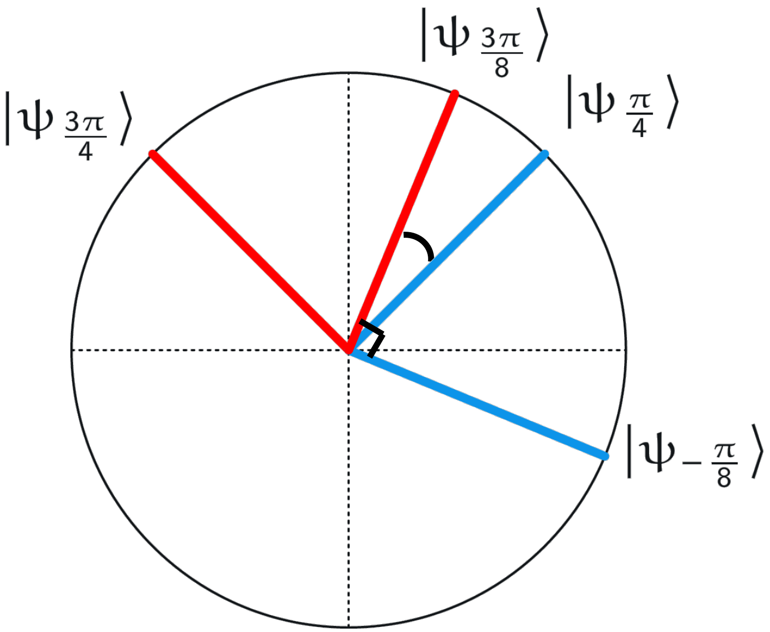
返答が一致しない確率

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

3.4 CHSH ゲームの戦略

戦略を探る

- (x, y) = (1, 1)



(x,y)	勝ち	負け
$(0,0)$	$a=b$	$a\neq b$
$(0,1)$	$a=b$	$a\neq b$
$(1,0)$	$a=b$	$a\neq b$
$(1,1)$	$a\neq b$	$a=b$

全体として
勝率最大になる角度

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{if } x=0 \\ \pi/4 & \text{if } x=1 \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \pi/8 & \text{if } y=0 \\ -\pi/8 & \text{if } y=1 \end{cases}$$

アリスとボブの結果が一致する確率

$$\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

返答が一致しない確率

$$\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

状態間の角度が直角に近いほど勝率が上がる

Outline

3.5 備考

- **エンタングルメントによって古典的な記述とは矛盾する統計的な結果が得られる**CHSHゲームのような考え方の元はBell状態の名付け親であるJohn Bellによるもので、この種の実験はよくBellテストと呼ばれる
- Bellの定理と呼ばれることもあるが、これは様々な形で定式化されており、その本質は、**量子力学はいわゆる局所隠れ変数理論とは相容れないというもの**
- CHSHゲームはBellテストの非常に優れたきれいな例であり、Bellの定理の証明、あるいは実証と見なすことができる
- 2022年のノーベル物理学賞では、この分野の重要性が認められ、Alain Aspect、John Clauser (CHSHのC)、Anton Zeilingerが、エンタングルした光子のBellテストによってエンタングルメントを観測したことで受賞

3.6 Qiskit での実装

- ゲーム自体の定義

```python
from numpy.random import randint

def chsh_game(strategy):
    """Plays the CHSH game
    Args:
        strategy (callable): A function that takes two bits (as `int`s) and
            returns two bits (also as `int`s). The strategy must follow the
            rules of the CHSH game.
    Returns:
        int: 1 for a win, 0 for a loss.
    """
    # Referee chooses x and y randomly
    x, y = randint(0, 2), randint(0, 2)

    # Use strategy to choose a and b
    a, b = strategy(x, y)

    # Referee decides if Alice and Bob win or lose
    if (a != b) == (x & y):
        return 1  # Win
    return 0  # Lose
```

3.6 Qiskit での実装

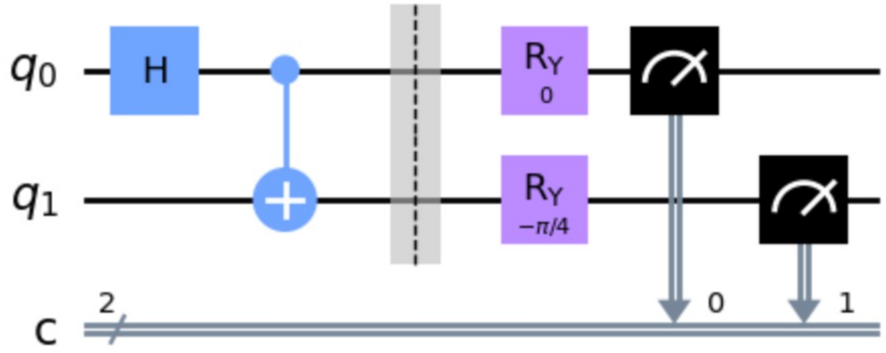
- 組み込みゲート$R_y(\theta)$を使う

```python
from qiskit import QuantumCircuit
from numpy import pi

def chsh_circuit(x, y):
    """Creates a `QuantumCircuit` that implements the best CHSH strategy.
    Args:
        x (int): Alice's bit (must be 0 or 1)
        y (int): Bob's bit (must be 0 or 1)
    Returns:
        QuantumCircuit: Circuit that, when run, returns Alice and Bob's
            answer bits.
    """
    qc = QuantumCircuit(2, 2)
    qc.h(0)
    qc.cx(0, 1)
    qc.barrier()

    # Alice
    if x == 0:
        qc.ry(0, 0)
    else:
        qc.ry(-pi / 2, 0)
    qc.measure(0, 0)

    # Bob
    if y == 0:
        qc.ry(-pi / 4, 1)
    else:
        qc.ry(pi / 4, 1)
    qc.measure(1, 1)

    return qc
```

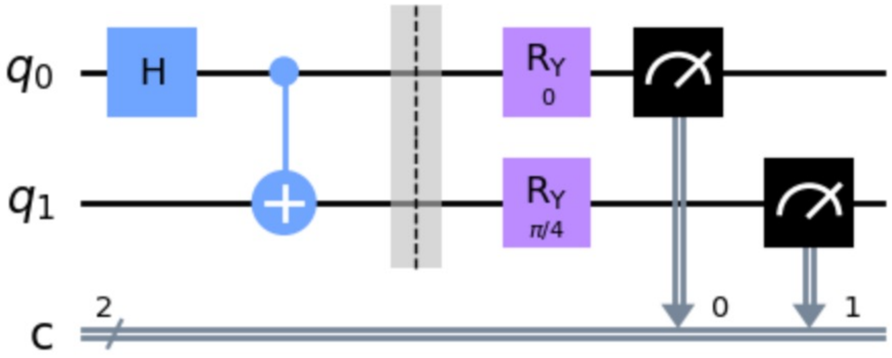
```python
# Draw the four possible circuits

print("(x,y) = (0,0)")
display(chsh_circuit(0, 0).draw())

print("(x,y) = (0,1)")
display(chsh_circuit(0, 1).draw())

print("(x,y) = (1,0)")
display(chsh_circuit(1, 0).draw())

print("(x,y) = (1,1)")
display(chsh_circuit(1, 1).draw())
```

3.6 Qiskit での実装

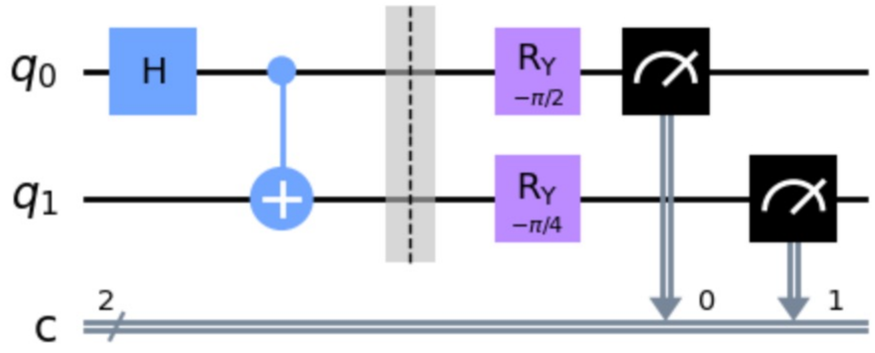
(x,y) = (0,0)



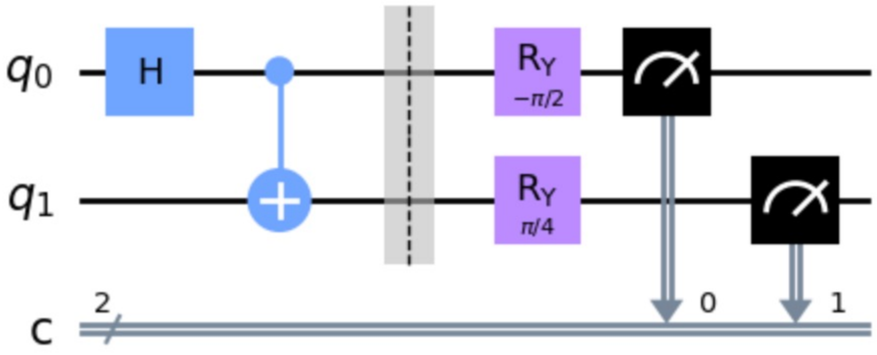
(x,y) = (0,1)



(x,y) = (1,0)



(x,y) = (1,1)



3.6 Qiskit での実装

- Aerシミュレーターを使用して特定の入力ペアに対して回路を1回実行する ジョブを作成

```
from qiskit_aer import AerSimulator

simulator = AerSimulator()


def quantum_strategy(x, y):
    """Carry out the best strategy for the CHSH game.
    Args:
        x (int): Alice's bit (must be 0 or 1)
        y (int): Bob's bit (must be 0 or 1)
    Returns:
        (int, int): Alice and Bob's answer bits (respectively)
    """
    # `shots=1` runs the circuit once
    # `memory=True` enables the `.get_memory()` method
    job = simulator.run(chsh_circuit(x, y), shots=1, memory=True)
    result = job.result().get_memory()[0]
    a, b = result[0], result[1]
    return a, b
```

3.6 Qiskit での実装

- ゲームを1000 回プレイし、この戦略で勝つ確率を計算

```
NUM_GAMES = 1000
TOTAL_SCORE = 0

for _ in range(NUM_GAMES):
    TOTAL_SCORE += chsh_game(quantum_strategy)

print("Fraction of games won:", TOTAL_SCORE / NUM_GAMES)
```

Fraction of games won: 0.832

量子的な戦略では約85％の確率で勝利し、古典的な戦略では約75％以上の確率で勝利することはできない

古典的な戦略

```
def classical_strategy(x, y):
    """The best classical strategy for the CHSH game
    Args:
        x (int): Alice's bit (must be 0 or 1)
        y (int): Bob's bit (must be 0 or 1)
    Returns:
        (int, int): Alice and Bob's answer bits (respectively)
    """
    # Alice's answer
    if x == 0:
        a = 0
    elif x == 1:
        a = 1

    # Bob's answer
    if y == 0:
        b = 1
    elif y == 1:
        b = 0

    return a, b
```

```
NUM_GAMES = 1000
TOTAL_SCORE = 0

for _ in range(NUM_GAMES):
    TOTAL_SCORE += chsh_game(classical_strategy)

print("Fraction of games won:", TOTAL_SCORE / NUM_GAMES)
```

Fraction of games won 0.758