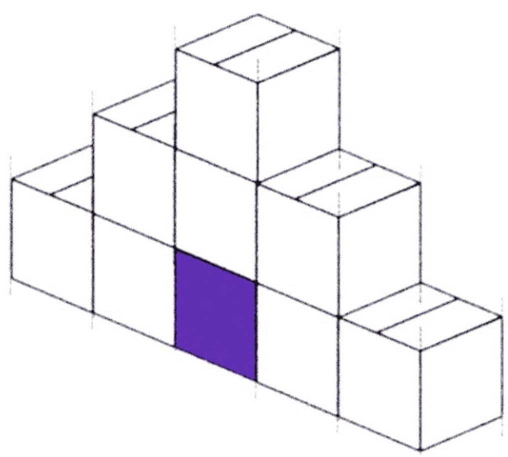
Qiskit Textbook 勉強会.

Multiple systems



原文: https://learn.qiskit.org/course/basics/multiple-systems#multiple-systems-classical-info
和訳: https://ja.learn.qiskit.org/course/basics/multiple-systems#multiple-systems-classical-info

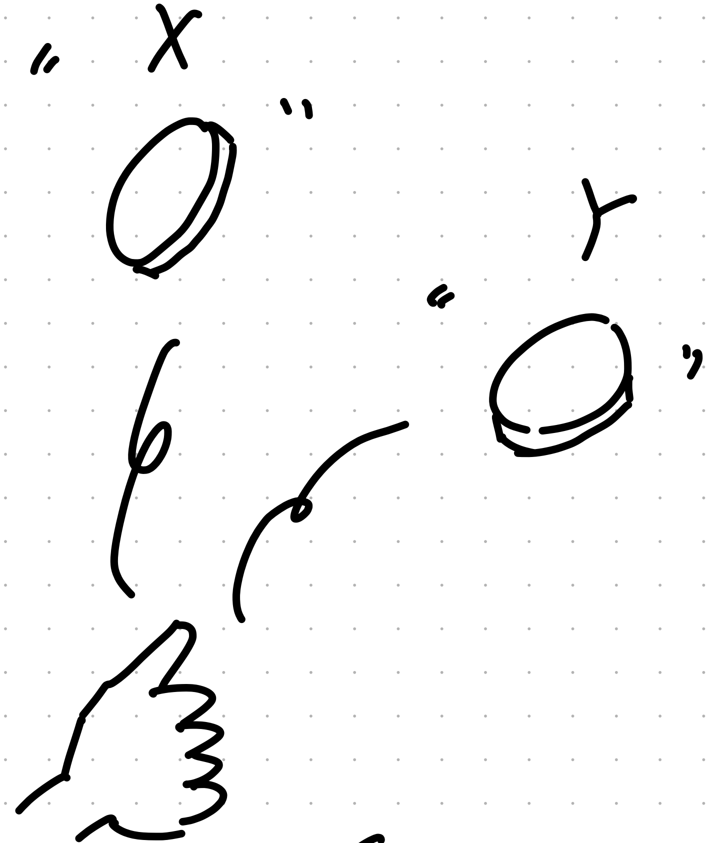
10 May, 2023
Bo Tang

本日のメニュー

テーマ：テンソル積表現に慣れ親しむ

- 古典の合成システムや"あえて"テンソル積で表してみる.
- テンソル積表記した時の(古典の)合成系における測定と演算を理解する.
- 古典の合成系と量子の合成系の違いをハイライト.

デカルト積



コイントス（コイン X, Y）

↳ ラベル X : $\Sigma = \{0, 1\}$

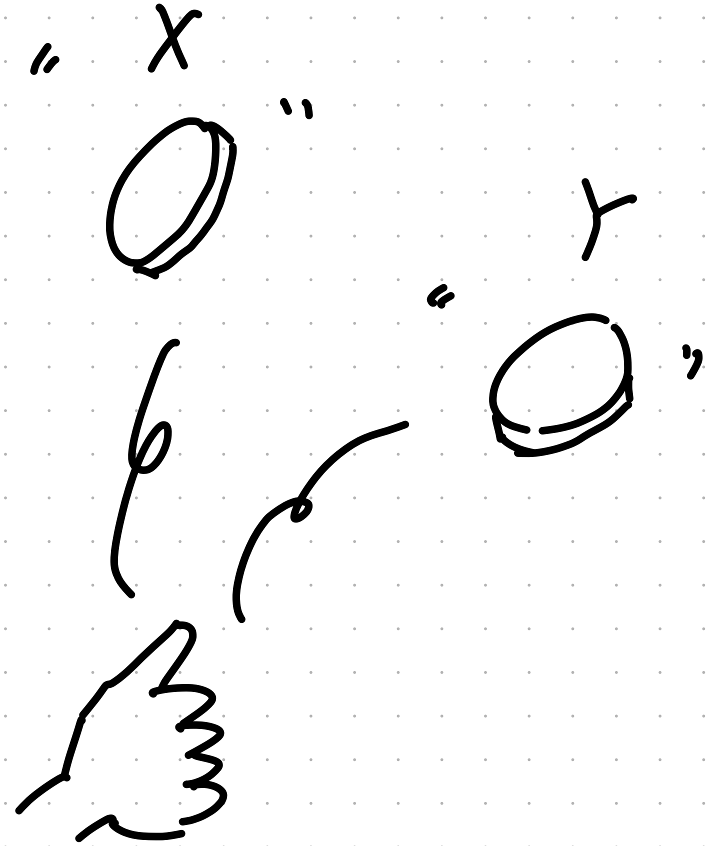
　　　　Y : $\Gamma = \{0, 1\}$

Σ, Γ のデカルト積（直積）.

表 :　　　　　　　　　　　　　　　　集合.

$$\begin{array}{cc} & \Gamma \\ \Sigma & \begin{bmatrix} (0,0) & (0,1) \\ (1,0) & (1,1) \end{bmatrix} \end{array} = \Sigma \times \Gamma = \left\{ \begin{array}{c} (0,0) \\ (0,1) \\ (1,0) \\ (1,1) \end{array} \right\}$$

デカルト積



コイントス(コインX, Y)

↳ ラベル X : $\Sigma=\{0, 1\}$

Y : $\Gamma=\{0, 1\}$

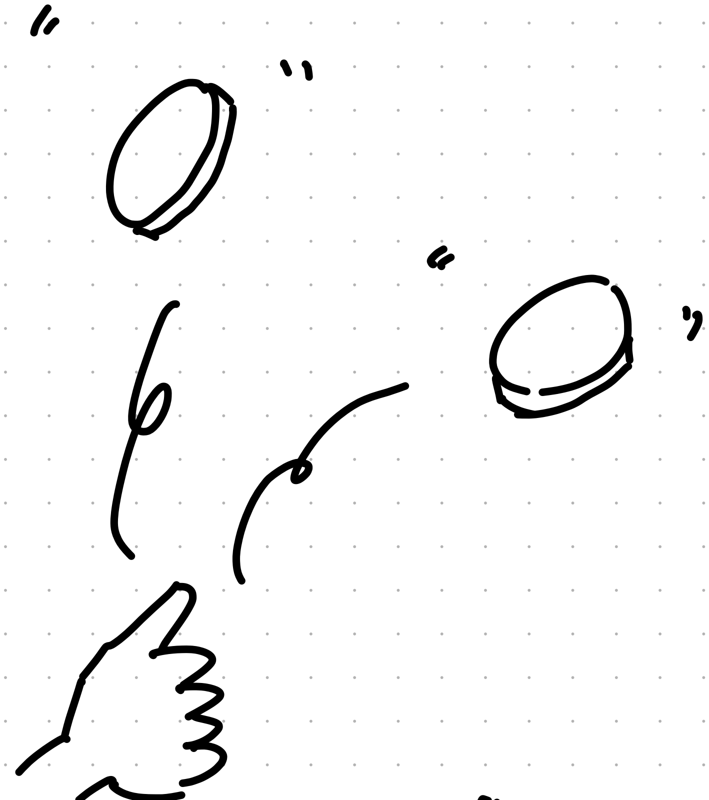
Σ, Γ のデカルト積(直積)。

表:

$$\begin{array}{cc} & \Gamma \\ \Sigma & \begin{bmatrix} (0, 0) & (0, 1) \\ (1, 0) & (1, 1) \end{bmatrix} \end{array} = \Sigma \times \Gamma \Rightarrow \begin{array}{c} \text{ベクトル} \\ \begin{bmatrix} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

使ってみよう!!

デカルト積



0と1の確率分布。

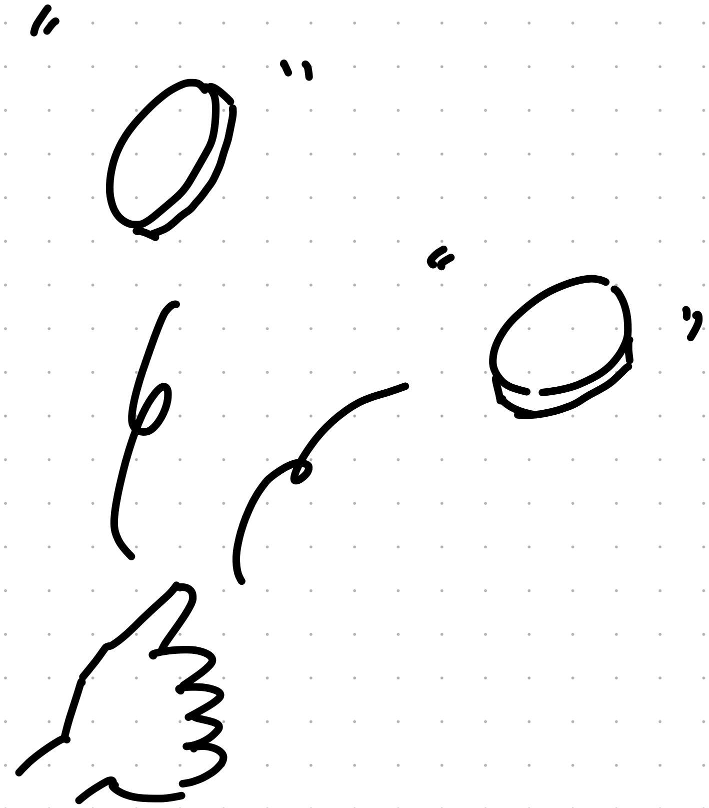
$P^{(X)} = \{0: 0.3,\ 1: 0.7\}$

$P^{(Y)} = \{0: 0.6,\ 1: 0.4\}$

$P^{(X)}, P^{(Y)}$が独立なら、

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & \quad\quad\quad 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.3\times 0.6 & 0.3\times 0.4 \\ & \\ 0.7\times 0.6 & 0.7\times 0.4 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \quad P^{(XY)} \quad \begin{array}{c} P_{00} \\ P_{01} \\ P_{10} \\ P_{11} \end{array} \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.12 \\ 0.42 \\ 0.28 \end{bmatrix}$$

デカルト積



0と1の確率分布

$$p^{(X)} = \{ 0 : 0.3 ,\ 1 : 0.7 \}$$

$$p^{(Y)} = \{ 0 : 0.6 ,\ 1 : 0.4 \}$$

$p^{(X)}, p^{(Y)}$が独立なら、

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} 0.3 \times 0.6 & 0.3 \times 0.4 \\ 0.7 \times 0.6 & 0.7 \times 0.4 \end{bmatrix}$}} \\ 1 & & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0.3 \times 0.6 & 0.3 \times 0.4 \\ 0.7 \times 0.6 & 0.7 \times 0.4 \end{bmatrix} \Rightarrow p^{(XY)}$$

$$\begin{array}{c} P_{00} \\ P_{01} \\ P_{10} \\ P_{11} \end{array} \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.12 \\ 0.42 \\ 0.28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} \\ 0.7 \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

デカルト積 → テンソル積

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0.18 & 0.12 \\ 1 & 0.42 & 0.28 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{array} \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.12 \\ 0.42 \\ 0.28 \end{bmatrix}$$

ベクトルによる確率分布の記述

$$0.18\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + 0.12\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + 0.42\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + 0.28\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

と置くことで、線形空間上の1点にマッピング。

デカルト積 ⟶ テンソル積

$$
\begin{array}{c|cc}
 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0.18 & 0.12 \\
1 & 0.42 & 0.28
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{c}
p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11}
\end{array}
\begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.12 \\ 0.42 \\ 0.28 \end{bmatrix}
$$

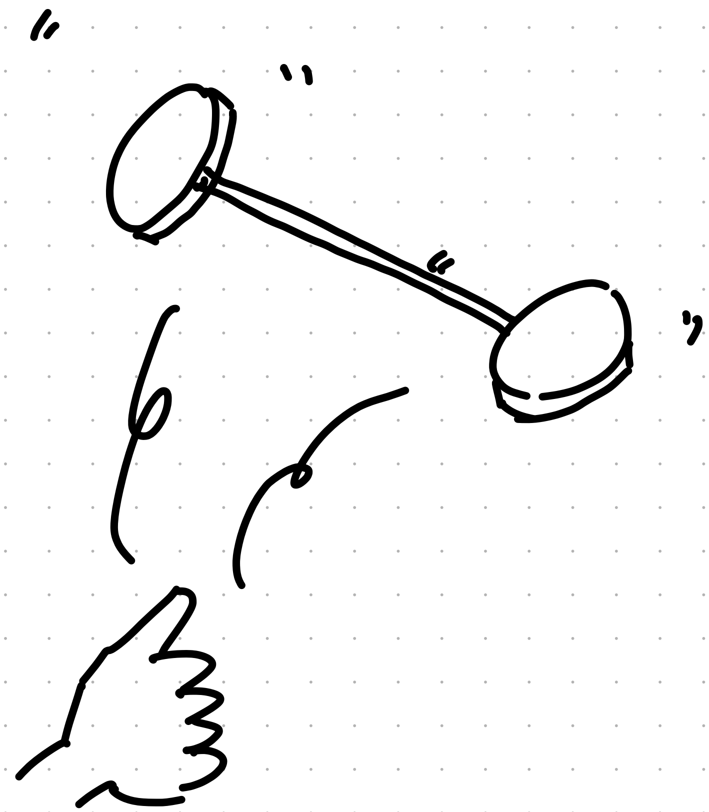
$$
0.18 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.12 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.42 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.28 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$0.18\,|00\rangle + 0.12\,|01\rangle + 0.42\,|10\rangle + 0.28\,|11\rangle$$

ディラック表記

デカルト積



0と1の確率分布

$P^{(X)} = \{0: 0.3,\ 1: 0.7\}$

$P^{(Y)} = \{0: 0.6,\ 1: 0.4\}$

$P^{(X)}, P^{(Y)}$ が独立ではない場合もある。

$$P^{(X,Y)} = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0.3 & 0 \\ 1 & 0.3 & 0.4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{array} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

デカルト積

0と1の確率分布

$p^{(X)} = \{0: 0.3,\ 1: 0.7\}$

$p^{(Y)} = \{0: 0.6,\ 1: 0.4\}$

$p^{(X)}, p^{(Y)}$が独立ではない場合：

$p_{ij} = p_i^{(X)} p_j^{(Y)}$を満たす
$p^{(X)}, p^{(Y)}$は存在しない。

$\because)$ $p_0^{(X)} p_1^{(Y)} = 0$ より、

$p_0^{(X)} = 0$ or $p_1^{(Y)} = 0$

$\downarrow$ $\quad\quad$ $\downarrow$

$p_{00} = 0.3$ と矛盾 $\quad$ $p_{11} = 0.4$ と矛盾

(proofはこのケースのみ)

$$
p^{(X,Y)} = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$}} \\ 1 & & \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{array}
\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}
$$

デカルト積 → テンソル積

$$\sum_{i\in\{0,1\}^2} p_i |i\rangle = \begin{array}{c} p_{00}\\ p_{01}\\ p_{10}\\ p_{11}\end{array} \begin{bmatrix}0.18\\ 0.12\\ 0.42\\ 0.28\end{bmatrix} \begin{array}{c}00\\ 01\\ 10\\ 11\end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Sigma_0 \\ |0\rangle \otimes |0\rangle \\ |0\rangle \otimes |1\rangle \\ |1\rangle \otimes |0\rangle \\ |1\rangle \otimes |1\rangle \\ \Sigma_1 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} p_0^{(x)} \begin{bmatrix} p_0^{(y)} \\ p_1^{(y)} \end{bmatrix} \\ p_1^{(x)} \begin{bmatrix} p_0^{(y)} \\ p_1^{(y)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

このようにして、それぞれの基底を並べて合成システムの大きなベクトル空間の基底を作る

↳ テンソル積(空間)

テンソル積の定義

コインn個

$\Sigma_0, \cdots, \Sigma_{n-1} = \{0, 1\} \rightarrow 2$通り

$\Sigma_0 \otimes \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \cdots \otimes \Sigma_{n-1} = \{0, 1\}^n \rightarrow 2^n$通り

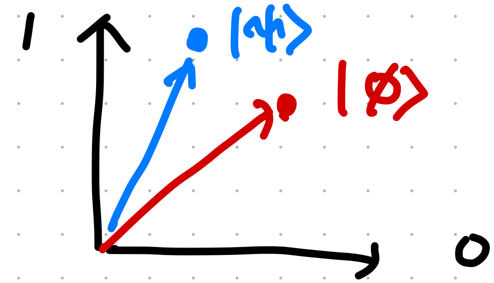
n桁の0, 1による文字列

基底のラベル

サイズ 2^1 ・ 2^2 ・ 2^3

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_0 \otimes \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_0 \otimes \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \end{array}$$

テンソル積の定義



$$|\phi\rangle = \sum_{a\in\Sigma} \alpha_a |a\rangle, \quad |\psi\rangle = \sum_{b\in\Gamma} \beta_b |b\rangle.$$

$$|\pi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle = \sum_{(a,b)\in\Sigma\times\Gamma} \alpha_a \beta_b |ab\rangle$$

$$= \sum_{(a,b)\in\Sigma\times\Gamma} \alpha_a \beta_b |a\rangle \otimes |b\rangle$$

(${}^\forall a, b,\quad \langle ab|\pi\rangle = \langle a|\phi\rangle\langle b|\psi\rangle$

も同値な定義)

テンソル積と確率分布の独立性

$$P^{(XY)} = \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.12 \\ 0.42 \\ 0.28 \end{bmatrix}$$

$P^{(XY)} = P^{(X)} \otimes P^{(Y)}$
となる $P^{(X)}, P^{(Y)}$ が存在する

$$\left(P^{(X)} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix},\ P^{(Y)} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} \right)$$

$$P^{(XY)} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$P^{(XY)} = P^{(X)} \otimes P^{(Y)}$
となる $P^{(X)}, P^{(Y)}$ が存在しない

確率的状態の測定

不確定性を測定により確定させる

|| テンソル積の表現では… ||

様々な基底の要素で張られた点、 ‖ 観測された基底に射影

$$P^{(XY)} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$= 0.3|00\rangle + 0.3|10\rangle + 0.4|11\rangle$$

X、Yを両方測定すると… 図

確率

$\xrightarrow{0.3} |00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\xrightarrow{0.3} |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\xrightarrow{0.4} |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ に変化

確率的状態の測定

不確定性を測定により確定させる。

=

様々な基底の要素で張られた点、

=

観測された基底に射影

重要：古典情報における確率的"状態"

状態の要素 = 測定確率。

確率的状態の部分測定

$$P^{(XY)} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Xのみ測定すると...

Yの不確定要素は残る.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0.3 & 0 & 0.3 \\ 1 & 0.3 & 0.4 & 0.7 \end{array}$$

$$P^{(X)} = \{0: 0.3,\ 1: 0.7\}$$

確率的状態の部分測定

$$P^{(XY)} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Xのみ測定すると...

Yの不確定要素は残る.

$$P^{(X)} = \{0 : 0.3,\ 1 : 0.7\}$$

$$P^{(Y)} = \{0 : 0.6,\ 1 : 0.4\}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

確率		Yの確率分布.	
0.3	で,	$\begin{bmatrix} 0.3 & 0 \end{bmatrix}$	を選ぶ
0.7	で	$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$	を選ぶ

確率的状態の部分測定

$$P^{(XY)} = \begin{bmatrix}0.3\\0\\0.3\\0.4\end{bmatrix}$$

Xのみ測定すると...

Yの不確定要素は残る。

$$P^{(X)} = \{0 : 0.3,\ 1 : 0.7\}$$

$$P^{(Y)} = \{0 : 0.6,\ 1 : 0.4\}$$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc}0 & \quad 1\end{array} & \text{確率} \\ \begin{array}{c}0\\1\end{array} & \begin{bmatrix}0.3 & 0\\ \hline 0.3 & 0.4\end{bmatrix} & \begin{array}{c}0.3\\0.7\end{array}\end{array}$$

Yの確率分布

$$0.3 \xrightarrow{\text{の条件下で}} \begin{bmatrix}0.3 & 0\end{bmatrix}$$

$$0.7 \xrightarrow{\text{の条件下で}} \begin{bmatrix}0.3 & 0.4\end{bmatrix}$$

確率的状態の部分測定

$$p^{(XY)} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Xのみ測定すると...

Yの不確定要素は残る。

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

0が得られたら、 $\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \end{array}$

1が得られたら、 $\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \end{array}$

確率的状態の部分測定

$$P^{(XY)} = \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.12 \\ 0.42 \\ 0.28 \end{bmatrix} = \underset{P^{(A)}}{\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}} \otimes \underset{P^{(B)}}{\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} \boxed{0.18 \quad 0.12} \\ \boxed{0.42 \quad 0.28} \end{bmatrix} \end{array}$$

$\rightarrow$ 0が得られたら、 $\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}$

$\rightarrow$ 1が得られたら、 $\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}$

X, Yが独立な場合。

確率的状態の部分測定

- Xだけ測定したときの結果は、Yも測定されたときの結果と同じ

$$X : \Sigma \longrightarrow [0,1]$$

$$Y : \Gamma \longrightarrow [0,1]$$

$$\Pr[X=a] = \sum_{b\in\Gamma} \Pr[(X,Y)=(a,b)]$$

- Xだけ測定したときのYの不確実性

$$\Pr[Y=b \mid X=a] = \frac{\Pr[(X,Y)=(a,b)]}{\Pr[X=a]}$$

確率的状態の部分測定

- Xだけ測定したときの結果は、
  Yも測定されたときの結果と同じ。

$$X : \Sigma \to [0,1]$$

$$Y : \Gamma \to [0,1]$$

$$\Pr[X=a] = \sum_{b\in\Gamma} \Pr[(X,Y)=(a,b)] = \sum_{b\in\Gamma} p_{ab}$$

- Xだけ測定したときのYの不確実性。

$$\Pr[Y=b \mid X=a] = \frac{\Pr[(X,Y)=(a,b)]}{\Pr[X=a]} = \frac{p_{ab}}{\sum_{b\in\Gamma} p_{ab}}$$

確率的状態の部分測定

$$|\mu\rangle = \sum_{(a,b)\in\Sigma\times\Gamma} p_{ab}|ab\rangle$$

e.g.) $p_{00}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+p_{01}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+p_{10}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+p_{11}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

$\boxed{A}$: X を測定し、a を得ると...

$$|a\rangle\otimes|\pi_a\rangle$$

X で a が得られた条件下での Y の確率分布

$\Pr[X=a]$ で"正規化"

$$|\pi_a\rangle = \frac{\sum_{b\in\Gamma} p_{ab}|b\rangle}{\boxed{\sum_{b\in\Gamma} p_{ab}}} = \sum_{b\in\Gamma}\frac{p_{ab}}{\sum_{c\in\Gamma} p_{ac}}|b\rangle$$

確率的状態の部分測定

$$|\pi_a\rangle = \frac{\sum_{b\in\Gamma} p_{ab}|b\rangle}{\boxed{\sum_{b\in\Gamma} p_{ab}}} = \sum_{b\in\Gamma} \frac{p_{ab}}{\sum_{c\in\Gamma} p_{ac}}|b\rangle$$

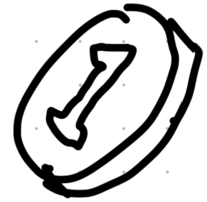
$\Pr[X=a]$

$$\sum_{b\in\Gamma} p_{0b}|b\rangle \; : \; 0.18\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 0.12\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} \boxed{0.18 \quad 0.12} \\ \\ \boxed{0.42 \quad 0.28} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \Pr[X=0] \\ \\ \longrightarrow \Pr[X=1] \end{array}$$

確率的状態の演算

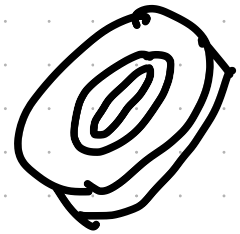
例えば…



コインX.

$P^{(X)} = \{0: 0.3,\ 1: 0.7\}$

↓ 表裏のラベルを書きかえたい.



$P'^{(X)} = \{0: 0.7,\ 1: 0.3\}$

このプロセスを $P^{(X)} = \begin{bmatrix} P_0^{(X)} \\ P_1^{(X)} \end{bmatrix}$ に対する行列で思うと.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

: 100%の確率でラベル 0→1 へ
100%の確率でラベル 1→0 へ

確率的状態の演算

$$p'^{(X)} \qquad M \qquad p^{(X)}$$

$$\begin{bmatrix} p_0'^{(X)} \\ p_1'^{(X)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0^{(X)} \\ p_1^{(X)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{bmatrix} = \sum_{i,j \in \{0,1\}} \alpha_{ij} |i\rangle\langle j|$$

(i, j 成分のみ 1
他は全て 0)

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \alpha_{00} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{|0\rangle\langle 0|} + \alpha_{01} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{|0\rangle\langle 1|} + \alpha_{10} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{|1\rangle\langle 0|} + \alpha_{11} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{|1\rangle\langle 1|}$$

確率的状態の演算

$$\begin{cases} P'^{(X)} = M P^{(X)} \\ P'^{(Y)} = N P^{(Y)} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} p_0'^{(X)} \\ p_1'^{(X)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0^{(X)} \\ p_1^{(X)} \end{bmatrix} \qquad M = \sum_{i,j \in \{0,1\}} \alpha_{ij} |i\rangle\langle j|$$

$$\begin{bmatrix} p_0'^{(Y)} \\ p_1'^{(Y)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} \\ \beta_{10} & \beta_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0^{(Y)} \\ p_1^{(Y)} \end{bmatrix} \qquad N = \sum_{i,j \in \{0,1\}} \beta_{ij} |i\rangle\langle j|$$

$$\hookrightarrow P'^{(XY)} = P'^{(X)} \otimes P'^{(Y)} = (M P^{(X)}) \otimes (N P^{(Y)})$$

$$= A \, (P^{(X)} \otimes P^{(Y)})$$

となる行列 A はどう構成される？

確率的状態の演算

$$P'^{(X)} \otimes P'^{(Y)} = (MP^{(X)}) \otimes (NP^{(Y)}) = A\,(P^{(X)} \otimes P^{(Y)})$$

$$\begin{cases} \text{コインXで表裏をひっくり返す} \longrightarrow M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{コインYはそのまま} \longrightarrow N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{00} \\ p'_{01} \\ p'_{10} \\ p'_{11} \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 00 & 01 & 10 & 11 \end{array} \\ \begin{array}{c} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}} & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{O}} \\ & 1 & & \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{10} \\ p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{10} \\ p_{11} \\ p_{00} \\ p_{01} \end{bmatrix}$$

Yに関しては何もしない

確率的状態の演算

$$P'^{(X)} \otimes P'^{(Y)} = (MP^{(X)}) \otimes (NP^{(Y)}) = A\,(P^{(X)} \otimes P^{(Y)})$$

$$A = \sum_{i,j,k,l \in \{0,1\}} \alpha_{ij}\,\beta_{kl} \underbrace{|ik\rangle\langle jl|}_{|i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l|} =: M \otimes N .$$

$$M = \sum_{i,j \in \{0,1\}} \alpha_{ij} |i\rangle\langle j|$$

$$N = \sum_{i,j \in \{0,1\}} \beta_{ij} |i\rangle\langle j|$$

$\uparrow$

2×2行列.

$$M \otimes N = \begin{bmatrix} \alpha_{00}\begin{bmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} \\ \beta_{10} & \beta_{11} \end{bmatrix} & \alpha_{01}\begin{bmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} \\ \beta_{10} & \beta_{11} \end{bmatrix} \\ \alpha_{10}\begin{bmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} \\ \beta_{10} & \beta_{11} \end{bmatrix} & \alpha_{11}\begin{bmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} \\ \beta_{10} & \beta_{11} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$\uparrow$

4×4行列

確率的状態の演算.

$M \otimes N$で書けない合成システム上の主要演算.

ex). 制御NOT.
(CNOT)

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} 00 & 01 & 10 & 11 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

⇒ コインX, Yを同時に振って、
Xで1が出たときだけ、
Yの結果をひっくり返す.

確率的状態の演算

M⊗Nで書けない合成システム上の重要演算

ex) 制御NOT
(CNOT)

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} 00 & 01 & 10 & 11 \end{array} \\
\begin{array}{c} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array} &
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
|00\rangle \\ |01\rangle \\ |10\rangle \\ |11\rangle
\end{array}
\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{CNOT}}
\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.4 \\ 0.3 \end{bmatrix}
$$

古典と量子の確率的状態の違い。

古典

確率的状態、

$$|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 確率\frac{1}{3}で|00\rangle \\ 確率\frac{2}{3}で|11\rangle \end{cases}$$

$$\| \, |\phi\rangle \|_1 = \sum_{a \in \Sigma} |p_a| = 1$$

L1-ノルム.

状態そのものが測定確率

= まざってるだけ.

量子

量子状態、(重ね合わせ)

$$|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \rightarrow$$

確率 $\frac{i}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\bar{i}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$ で $|00\rangle$

確率 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$ で $|11\rangle$

$$\langle\phi|\phi\rangle = (|\phi\rangle)^\dagger |\phi\rangle = 1$$

共役転置.

状態 ≠ 測定確率分布.

↑

ただのヒルベルト空間上の"点"。

古典と量子の確率的状態の違い。

古典

確率的状態、

$$|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{測}} \begin{cases} 確率\frac{1}{3}で|00\rangle \\ 確率\frac{2}{3}で|11\rangle \end{cases}$$

$\Downarrow$

状態間の相関は状態で表された通り。

量子

量子状態、（重ね合わせ）

$$|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{測}}$$

確率 $\frac{-i}{\sqrt{3}} \cdot \frac{i}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$ で $|00\rangle$

確率 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$ で $|11\rangle$

$\Downarrow$

うまくやると、2システム間で面白い相関を作れるかも？

$\longrightarrow$ 作れる！（テレポーテーション）

テイクホームメッセージ

- テンソル積を使用して、合成システムをより大きな線形空間上の点として表現できる
  - ↳ ラベルを並べただけ、でも、豊かな数学的構造
  - 古典の合成システムでの測定と演算
- 古典の確率的状態は、その観測確率の分布に等しい。
  - ↳ つまり、観測しなくても同じ（そこにある）
  - BUT … 量子状態はそうではない!!