

Kawasaki Quantum Summer Camp 2024

ベクトル・行列入門

沼田 祈史

Kifumi Numata

IBM Quantum



量子コンピューターの学習を始める前に、ベクトルと行列について学んでおくと、理解が深まります。

量子コンピューターの世界 (量子力学)	数学の世界	計算上の表現
量子状態 (計算に使うデータ)	ベクトル	$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$: 縦ベクトル
量子状態 (データ) に対する操作 (ゲート)	行列	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

1. ベクトル・行列の足し算・引き算

- ベクトル・行列は、同じ成分同士を足し引きすることが可能です。
 - 構造が同じ者同士でしか、演算はできません。

$$\text{縦ベクトル: } \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

$$\text{例)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \\ 3 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{横ベクトル: } (v_1 \cdots v_m) + (w_1 \cdots w_m) = (v_1 + w_1 \cdots v_m + w_m)$$

$$\text{行列: } \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

- 引き算についても同様です。

$$\text{例)} \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 1 & 4 + 1 \\ 3 + 3 & 1 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

1. ベクトル・行列の足し算・引き算の演習

以下の計算をしてみましょう。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

2. ベクトル・行列のかけ算

- ベクトルと行列の定数倍

- 全ての成分を定数倍するだけ

$$c \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_1 \\ \vdots \\ cv_n \end{pmatrix}$$

$$c \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

例) $2 * \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 * 1 \\ 2 * 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

- 行列と縦ベクトルの積

- 黄色の行と青色の列の成分を1つずつかけて、全てたし合わせて、ベクトルの一つの成分（緑色）となる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n \end{pmatrix}$$

- 行列同士の積

- 行列とベクトルのかけ算と同じ計算をして、行列の一つの成分（緑色）となる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + \cdots + a_{1n}c_{n1} & \cdots & a_{11}c_{1k} + \cdots + a_{1n}c_{nk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}c_{11} + \cdots + a_{mn}c_{n1} & \cdots & a_{m1}c_{1k} + \cdots + a_{mn}c_{nk} \end{pmatrix}$$

例) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 * (-1) + 4 * 3 & -2 * 1 + 4 * 6 \\ 3 * (-1) + 1 * 3 & 3 * 1 + 1 * 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 12 & -2 + 24 \\ -3 + 3 & 3 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 22 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

2. ベクトル・行列のかけ算の演習

以下の計算をしてみましょう。

$$(1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\quad \right)$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left(\quad \quad \right)$$

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\quad \right)$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\quad \right)$$

$$(5) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\quad \quad \right)$$

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(\quad \quad \right)$$

演習 の 解答

1. ベクトル・行列の足し算・引き算の演習 (解答編)

以下の計算をしてみましょう。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. ベクトル・行列のかけ算の演習

以下の計算をしてみましょう。

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (発展) ベクトル・行列のテンソル積

- ベクトルとベクトルの**テンソル積**：左側のベクトルの成分に右側のベクトルをかける。

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ v_n \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

- 行列と行列の**テンソル積**：左側の行列の成分に右側の行列をかける。

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B \\ A_{21}B & A_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} \end{matrix} & \begin{matrix} A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} \end{matrix} & \begin{matrix} A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

- 2量子ビットの状態は、1量子ビットのテンソル積で表せます

$$\begin{aligned} |00\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle, & |01\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |1\rangle, \\ |10\rangle &= |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle, & |11\rangle &= |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |3\rangle \end{aligned}$$