Kawasaki Quantum Summer Camp 2024

ベクトル・行列入門

沼田 祈史
Kifumi Numata
IBM Quantum

川崎市
KAWASAKI CITY

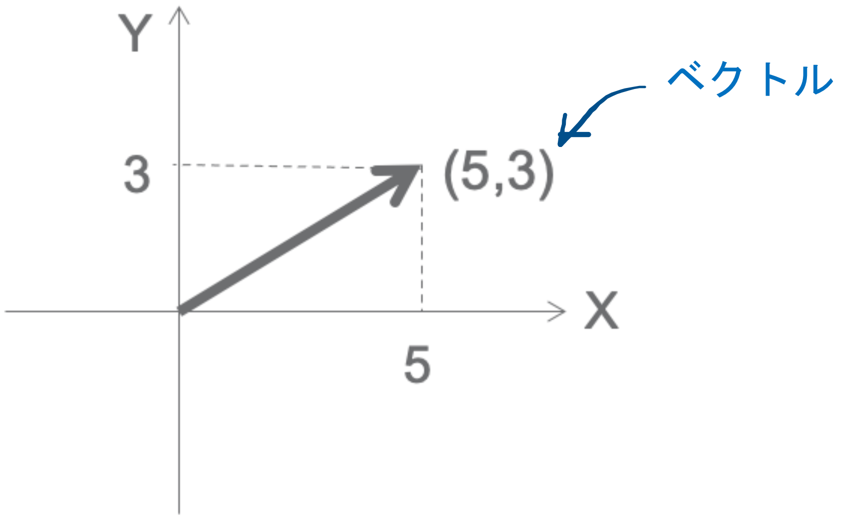
Qiskit

量子コンピューターの学習を始める前に、ベクトルと行列について学んでおくと、理解が深まります。

量子コンピューターの世界（量子力学）	数学の世界	計算上の表現
量子状態（計算に使うデータ） ⇔	ベクトル ⇔	$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$：縦ベクトル
量子状態（データ）に対する操作（ゲート） ⇔	行列 ⇔	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

ベクトルとは

「大きさ」と「向き」を持った量です。



ベクトルは、数が横や縦に一列に並んだ形をしています。

横ベクトルの例

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}$$

縦ベクトルの例

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ベクトルを拡張して、数を長方形の形に並べたものが行列です。

行列の例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1. ベクトル・行列の足し算・引き算

- ベクトル・行列は、同じ成分同士を足し引きすることが可能です。
  - 構造が同じ者同士でしか、演算はできません。

縦ベクトル：$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$

例） $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

横ベクトル：$(v_1 \ \cdots \ v_m) + (w_1 \ \cdots \ w_m) = (v_1 + w_1 \ \cdots \ v_m + w_m)$

行列：$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$

- 引き算についても同様です。

例） $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 & 4+1 \\ 3+3 & 1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

1. ベクトル・行列の足し算・引き算の演習

以下の計算をしてみましょう。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

2. ベクトル・行列のかけ算

- ベクトルと行列の定数倍
  - 全ての成分を定数倍するだけ

$$c\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_1 \\ \vdots \\ cv_n \end{pmatrix} \qquad c\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

例） $2*\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2*1 \\ 2*3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

- 行列と縦ベクトルの積
  - 黄色の行と青色の列の成分を１つずつかけて、全てたし合わせて、ベクトルの一つの成分（緑色）となる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + & \cdots & +a_{1n}v_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}v_1 + & \cdots & +a_{mn}v_n \end{pmatrix}$$

- 行列同士の積
  - 行列とベクトルのかけ算と同じ計算をして、行列の一つの成分（緑色）となる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + \cdots + a_{1n}c_{n1} & \cdots & a_{11}c_{1k} + \cdots + a_{1n}c_{nk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}c_{11} + \cdots + a_{mn}c_{n1} & \cdots & a_{m1}c_{1k} + \cdots + a_{mn}c_{nk} \end{pmatrix}$$

例） $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2*(-1)+4*3 & -2*1+4*6 \\ 3*(-1)+1*3 & 3*1+1*6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+12 & -2+24 \\ -3+3 & 3+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 22 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

6

2. ベクトル・行列のかけ算の演習

以下の計算をしてみましょう。

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ & \ \\ \ & \ \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ & \ \\ \ & \ \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ & \ \\ \ & \ \end{pmatrix}$

演習 の 解答

1. ベクトル・行列の足し算・引き算の演習 (解答編)

以下の計算をしてみましょう。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. ベクトル・行列のかけ算の演習

以下の計算をしてみましょう。

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

3.（発展）ベクトル・行列のテンソル積

■ ベクトルとベクトルの**テンソル積**：左側のベクトルの成分に右側のベクトルをかける。

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ v_n \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

■ 行列と行列の**テンソル積**：左側の行列の成分に右側の行列をかける。

$$\mathrm{A} \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B \\ A_{21}B & A_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

■ ２量子ビットの状態は、１量子ビットのテンソル積で表せます

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle, \quad |01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |1\rangle,$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle, \quad |11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |3\rangle$$